

盛立人 编著

老百姓的数学

数学家

LAOBAIXING DESHUXUE

SHUXUEJIA ZOUJIN SHEHUIXUE

走进社会学



老百姓的数学

数学家

盛立人 编著

走

进社会学



安徽教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

老百姓的数学. 数学家走进社会学 / 盛立人编著.
合肥: 安徽教育出版社, 2001. 9
ISBN 7-5336-2779-2

I. 老... II. 盛... III. ①数学—普及读物②数学—应用—社会学 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 063720 号

责任编辑: 严云锦 陈海燕 装帧设计: 李 静
出版发行: 安徽教育出版社(合肥市跃进路 1 号)
网 址: <http://www.ahep.com.cn>
经 销: 新华书店
排 版: 安徽飞腾彩色制版有限责任公司
印 刷: 合肥义兴印刷厂
开 本: 880×1230 1/32
印 张: 3.5
字 数: 80 000
版 次: 2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷
印 数: 2 000
定 价: 5.50 元

发现印装质量问题, 影响阅读, 请与我社发行部联系调换
电 话: (0551)2651321 邮 编: 230061

序

数(shù)起源于数(shǔ),量(liàng)起源于量(liáng)。在文字历史之前人类就有了数和图形的概念。几千年来,数学由人类生产和社会实践的需求而产生和发展。她不仅被用于科学和技术各领域,也渗透到经济和管理领域以及老百姓的日常生活之中。她不仅是一种工具和语言,也是人们重要的思考方式。她是一种文化,是人类文明的一个重要组成部分。

人类生产和社会实践的需求是数学产生和发展的根本动力。与此同时,数学还有自身内部逻辑完善和追求数学美的强大内部动力。这种内部动力的意义和作用往往不被人们所正确理解,被视为“抽象的游戏”。此外,数学的术语和符号也不易看懂。从中学几何证明开始,数学论述的书写形式就被训练成以固有的逻辑推理为基础,而这种形式常常是探究和思考的真正数学思维方式的颠倒。这一切使人们对数学望而生畏,把数学看成是少数人的一种专门技艺。

学的几个文科系(社会学、经济和管理等专业)开设了两门新的公选课:《社会选择》和《实用规划》,作为文科数学课的辅助课程。实践说明,这两门课深受文科学生,乃至不少理科学生的欢迎。追踪调查显示,学生们对于这种比传统数学课更灵活、更实用、更轻松的数学,是非常感兴趣的。

正是出于这样的效果,使作者心中燃起了勇气:倘使这些材料能在大学校园外也发挥它应有的作用,也许正是为我们上面提到的那个理想氛围在添砖加瓦。或许那时就产生了写一部书的想法。

但是此事想的容易,做起来极难。作者既要时时克服犹豫、彷徨等心理上的障碍,还要不断索求大量资料。幸而我得到的却都是支持和勉励:在南京大学、中国科学技术大学和安徽大学的师长、朋友和同事们的不断鼓励下,才毅然动起笔来。

我最初确定选材的标准是:有实用价值,有深厚背景,有现代意识;同时,材料应不与现有许多通俗书籍重复;方法应强调实用且易于掌握。经多方考虑,将本套书分成五个分册。

《千姿百态的几何世界》

《数学家走进社会学》

《数学家走进管理学》

《计算机的数学故事》

《统计——数字的科学》

在撰写过程中,取材最多的是圣 Olaf 学院, Lynn A. Steen 教授领衔主编的(参与写作的专家达 15 位之多)

For all practical purposes: Introduction to contemporary mathematics.

除此之外,采集和借鉴的来自报章书刊的材料,为数极多。对于有关作者和译者,在此一并表示我的谢意,不再一一列出。

三

本书从开始撰写到刊行,先后经历5年时间,其间最深切的体会是:比起撰写一部学术专著来,撰写通俗材料其实更为困难。由于受作者能力的限制,选材虽然很用心思,实际仍不能免俗;行文力求流畅生动,写来却时有晦涩;内容纵有考虑,难度仍难以驾驭。这就造成本套书目前这个样子。不足之处,还希望宽容的读者多多包涵才是。

清华大学冯克勤教授对本书表示了自始至终的关注,并愿为之作序,在此表示我衷心的感谢。

最后,在严肃著作的出版和商品经济尚未协调运行的今天,安徽教育出版社毅然支持本书出版,令人感动,特陈数语,以表谢意。

盛立人

安徽大学数学系

2000年10月

目 录

引言	1
第一章 漫说选举	5
§ 1 罗马元老院面临抉择	5
§ 2 逐轮选举	9
§ 3 捉对表决	11
§ 4 等级与记分	12
§ 5 伪修正案法	15
§ 6 人人是赢家	16
§ 7 阿罗和他有关选举的研究	18
思考题	21
第二章 漫说权力	27
§ 1 加权选举系统	27
§ 2 数学记号	29
§ 3 彭翠芙权力指数	30
§ 4 计算权力指数	32
§ 5 设置权数	36
§ 6 否决权	38
§ 7 图表法	39
§ 8 权力指数与美国选举	41

思考题	42
第三章 漫说公平分配	48
§ 1 公平原则	48
§ 2 连续态的情形	50
§ 3 离散态的情形	52
§ 4 整分问题	55
§ 5 除数方法	59
§ 6 又一个“不可能性定理”	66
思考题	68
第四章 竞争的数学	72
§ 1 竞争与策略	72
§ 2 混合策略	75
§ 3 决胜对策	80
§ 4 求解矩阵对策、实用	85
§ 5 非零和对策	86
§ 6 从对策论到囚徒怪圈	90
思考题	93
部分思考题答案与提示	98

引 言

说来不信,近几十年来,数学界正在悄悄地进行着一场革命,那就是将数学作为一种基本工具而运用到人类本身的种种活动中去:研究人类的行为、价值、交流、斗争、组织、公平配额、决策乃至一些涉及近代技术和复杂组织的层面。那情形与 300 年来将数学用于研究物理对象和它们的运动这种情况相比,简直不可同日而语。就像数学和计算机当年在了解我们社会时所起的巨大作用一样,一种用数学来思考人类事务的专业已经应运而生。

总的说来,有关人们实施决策的一些事务,已经越来越多地受到数学的深刻影响,专家们甚至已经创造出一些独特的数学对象,让人们能进行更好的决策。诚然,在决策中使用的方法有时候是非定量的,例如我们的问题涉及到历史、公正和道德。这时候的决断方法或许更像是艺术。但另一方面,有些施行决策的技巧,从性质上来看则完全是纯数学的,因而可以当作一种纯科学来看待。

每一个决策者一开头总是从他所控制的事态出发,然后希望能从中得出一种最好的选择。为此,人们需要确认所有有关变化因素和它们之间的关系——如果可能的话,最好赋以一定的度量。这时候,决策者还必须弄清楚他自身的价值,其决策的动机,甚至还要弄清楚他的能力限度以及来自社会的约束力量。只有这样,才能最后得到尽可能好的和可以达到的结果。

但问题更复杂的一面是:一大堆包括数字和预测等不确定因素的量,常常是捉摸不定的,无法预知的。于是,有些决策者便把精力放在有关事态本身,不时调整偶发因素,为的是最终能作出预测。此外,涉及道德范畴的因素(例如公平性问题),以及涉及群体

意向的因素(例如选择问题),更是必须处处予以考虑。最后,决策者还必须研究决策所牵动的社会和政治方面的影响。

早在二战时期已经有好几种不同的数学方法被介绍过来,用来帮助个体或群体作出一个好的和有效的决策。下面的表中列出了足足有一打与决策有关的专门理论,它们中除去一个外,其余都属于数学的各个分支。这些理论中除了连续态的最优理论、统计和概率论外,大部分在最近 20 年来,在被用到人类组织活动中时获得了长足的发展。

	决策活动类型	有关数学专门知识
1	确定和度量策略变化	度量理论
2	了解一个复杂系统	系统分析、图论
3	量化一个偏爱对象	相关理论
4	陈述有关对象和约束	规划理论
5	数字采括和预报	统计
6	确定最有效的事态	最优化理论
7	研究不确定性	概率论
8	解决争端	对策论
9	群体决策机制	社会选择理论
10	研究平衡性	公平分配理论
11	多层次决策	运筹学与管理科学
12	背景分析	政治学

在本书里我们自然不可能将所有有关内容全都讨论到,我们将把讨论限制在一个特殊的范围——社会学,具体地就是社会选择理论。

说到社会学,可以说,在人文科学里,社会学被公认为是最难给出定义的学科之一。只要浏览已有社会学的出版物,我们就可以轻易地找出一打以上的、不尽相同的有关社会学的定义来。这既反映了社会学的复杂性——因为它面对的是一个瞬息万变的大千世界,还反映了社会学的严肃性——因为它是一门具体科学,赋

有促使社会良性和有序发展的重大使命。

正当大部分哲学家们迟迟未能为社会学给出一个合适定义的时候,作为哲学家的一个特殊群体——数学家,已经在思索着如何介入社会学。数学家的优势有两个:独特的度量方法和严格的演绎思想。前者能使他们从繁复的数字堆里找出规律,后者使他们有能力提供准确安全的预报。数学家很快发现,在社会学的诸多定义中有一个共同的基本点,说白了便是:社会学有点像是社会医学。惟其如此,诊断、判断或决断应是研究这门学科的重要环节。为此数学家们首先看好社会选择这个分支,他们希望在这里能为个体或群体的决策或决断提供更好的服务。他们因此选择了三个方面作为介入社会学的有效途径:选举理论、度量权力和公平分配。

选举本身是一门理论,需要对之进行严肃的研究。众所周知,社会必须在大量的政策(这些政策覆盖所有方面:外事、财政、军事等等)之间进行遴选和抉择。但是社会每一位个体对这些政策都有自己的偏爱、意向。因此,选举理论要研究的是:怎样在公平意义下给出诸多政策的一个排序。这是任何一个民主社会,甚至在一些多人决断的集权国家,都必须考虑的问题。数学家们的主要工作便是,为社会提供一个最好的排序方法。对于熟悉数学基础公理方法的数学家来说,这里是一个理想的用武之地。

从表面上看,权力这个词是很难给以严格界定的,但是可以肯定,权力惟有与群体相联系,以决断为表现形式,以成为赢家为目的,才会有它的意义,这也就是理论家们常说的“权力三要素”的概念。因此,数学家为了用度量来描绘权力这个概念,便在一个理想的选举系统——加权选举系统里进行细腻的分析。在研究赢家致胜能力以后,他们得到了一个相当广泛的权力指数概念——彭翠芙指数。实践证明,这个指数概念不但能以度量权力,还可以用来设计和改进选举系统。

公平原则自然是施行决策的一个重要依据。数学家强调这个公平性问题的目的是:让每个人都尽量处于相对平等地位,并由此去认真对待什么是他们该赢得的,什么又是他们不该得的。为此,对于不同类型的分配情况,数学家期望能提供种种科学的均分方法。其中我们特别要讨论的,是在周围现实世界里特别有意义的整分技术。

令人吃惊的是,数学家的研究结果表明,在理论上要寻求一个完美的公平的社会选择机制,几乎是不可能的。数学家的这个预报,对于西方一些怀有理想主义的社会哲学家来说,或许算得上是一个悲剧。

我们现在就来看看,数学家是怎样介入社会学的。

第一章 漫说选举

§ 1 罗马元老院面临抉择

不夸张地说,每个人从他记事起,直到离开这个世界,都要无时无刻地同表决或选举打交道。对于成人,选举是每个公民的权利,而在少年或儿童时期,则可以说选举是一种权益(有时这种选举表现得也是很认真的,例如在学校里选举班长或少先队长等)。

尽管如此,每一次选举之后,除了为数不多的工作人员,很少有人会对选举过程表示关注。大多数人都以得知结果为满足。说起来,选举本来属于社会学范畴,要是我们分得更细一些,它还属于社会学的一个分支——社会选择。因此,选举本身是一种理论,需要对之进行严肃的研究。在我国,由于国情和社会主义民主氛围,为了避免繁文褥节,在许多重大的选举活动中常常采取民主协商的办法,以保障选举活动的顺利进行。因此选举的理论研究开展得相对地较少,或许除了少数专家以外。但在西方国家,作为一项重要的社会事务,已经根植于每个公民的意识里,因而相对地比较被看重;特别是,很早就有一大批理论家投入进行研究,形成了相当完整的选举理论。

不言而喻,选举的重要意义在于体现某种程度的公平性。而这种公平性首先表现在,不管采用的是什么选举方法,其选举结果应能代表大多数人的意志。一般人对此已可以感到满足,但是对一个怀有理想主义的社会学家来说,他不会到此为止。例如他会进一步问:多数是不是意味着大多数?有没有一个使全社会都满

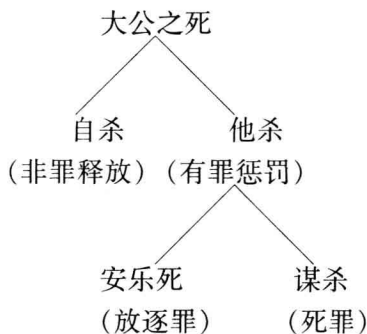
意的选举方法？如果没有，则是否可以设计一种最完美的，以便在每一次施行这个办法后，能使每一个选举成员感到满意？

我们将会看到，不同的选举方法所体现的多数人意志的内涵也将完全不同，这就使选举理论变得非常复杂。为了详细分析一个选举过程所诱发的种种复杂性，有必要怀怀旧——让我们从历史上最早的一宗表决案开始。

2000 多年前，一位名叫普林(Pliny)的罗马历史学家，向我们讲了这么一个有趣的故事。

……有一天，罗马元老院出现一场争论，事情涉及已经死亡的大公狄克斯特(Afranius Dexter)以及他的自由奴的生死。因为元老院不能确定，大公狄克斯特是自杀，还是死于自由奴之手。或者，是否因为狄克斯特的精神原因，自由奴由于服从杀了大公……

看来一切问题都围绕在大公的死因上。即使自由奴真的杀了他们的大公，也不清楚是否是出于大公本人的意愿，因而是一种安乐死行为(按照罗马法，自由奴必须被放逐)，还是真是一场谋杀(此时自由奴必须被处死)。当然，大公也可能是自杀(自由奴当然无罪释放)。我们把三种可能性，包括自由奴可能受到的惩罚，图示如下：



普林把元老院的元老们分成三类：

甲组——他们相信自由奴无罪,因而应予释放;

乙组——他们认为自由奴有罪,但情有可原,应予放逐;

丙组——他们确信自由奴犯有谋杀罪,应处死刑。

我们以甲、乙、丙记那三个组,用 A, B, C 记三种结果:释放、放逐及死刑。为了方便,再假定那三组人数分别占元老院的 40%, 35% 及 25%。因而我们可以列出一张信息表:

组 别	甲	乙	丙
预 设	A	B	C
百分比	40	35	25

现在,自由奴的命运,完全决定于元老们根据他们获得的信息以及他们由于策略考虑所采取的表决方式。我们可以分五种情况来考虑。

第一法 多数原则——以最多票者为胜方。其时得胜方未必是全体元老的大多数。

如果自由奴的命运将由这个多数原则决定,那么上表说明,他们将无罪释放,因为主张判决 A 的元老占有 40% 的多数。

但是元老们可能选择不同的表决方法,特别是当他们事先知道潜在的投票分布时。比方说,丙组的人出于对死刑的顾虑,在表决时不投 C 票,而改投了 B 票。结果是, A 只得 40% 的票,而 B 却得了 $35\% + 25\% = 60\%$ 的多数票。于是流放在等待着自由奴们。在许多情况下我们有理由相信丙组人会这样来投票,因为通常除了他们的第一选择 C 外,更偏爱选择 B 。此种带有谋略的表决,或者叫做非真诚表决,可以说是常有的事。

说到谋略,如果我们允许采用谋略表决,情形又会怎么样呢?

假如我们已经知道有关甲、乙、丙三个组的附加信息,例如我们知道了他们的第二和第三选择,下面的形势应认为是合理的:甲组的元老们偏爱结果 A 甚于 B , 偏爱 B 甚于 C ; 丙组元老们正好

相反,偏爱 C 甚于 B ,偏爱 B 甚于 A 。至于偏爱无罪释放的乙组中人,可能在第二选择时发生分歧:某些人偏爱非罪 A 甚于极刑 C ,某些人虽然反对死刑,却坚持有罪必罚,哪怕是判以极刑。为简单计,让我们假定乙组每位元老偏爱 B 甚于 A ,偏爱 A 甚于 C 。这时我们得到下面这张信息表:

组 别	甲	乙	丙
第一选择	A	B	C
第二选择	B	A	B
第三选择	C	C	A
百 分 比	40	35	25

现在甲组的元老们仍坚持选择 A ,而乙组和丙组的元老们则可在 A, B, C 中任选其一。我们把这些谋略和最后表决结果也列成一张表如下:

甲 组 选 择		丙 组 选 择		
		A	B	C
乙 组 选 择	A	A	A	A
	B	A	B	A
	C	A	A	C

在这张表里,右下方框表示甲、乙及丙三个组采取不同选择时所导致的最后种种结果。例如,若是甲组选择 A ,乙组选择 B ,丙组选择 C ,则结果应该是 A ——位于右下方框中第二横行的最末一个字母。通常我们把各人以最偏爱的选择进行表决的选举称为**真诚选举**。仔细分析上面那张表格可以看出,只要丙组取代 C 改为选择 B ,将使乙丙两组得益。因为丙组将以第二选择为满足,不需要第三选择,而乙组仍可坚持第一选择。

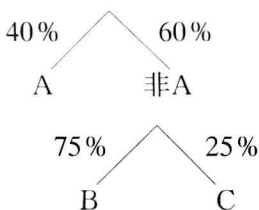
上述这种分析建议丙组进行非真诚选举,即选择 B 。因此乙

组与丙组实际上已经组成了一个反对甲组的联盟。并且这样做并不需要事先共谋或是传递信息。

§ 2 逐轮选举

要对出现两个以上议案的选举进行表决时,上述这个多数原则常常遭到反对。反对者的一个主要理由是:赢家往往未过半数。例如上面的真诚选举中的甲组元老(共占 40%)。为了服从于大多数原则(要求半数以上通过),就得要求增加议程。我们来看一下罗马元老院将怎样处理。

元老院的第一个议程是在有罪与非罪之间进行表决。只有在确认有罪的情况下,才有必要进行第二轮表决:决定判决 B 还是 C。这一议程用下图表示:



在这次表决中,第一轮 A 以 40% 比 60% (35% + 25%) 败给了 B,第二轮 B 以 75% (40% + 35%) 比 25% 赢了 C。因此放逐成为最后判决。我们看到,这一次每一位元老都是真诚选举,各组之间也无需进行什么联盟。而在“多数原则”下进行表决,要想达到结果 B,则非采取非真诚选举或组成联盟不可。这一分析表明,不同的选举原则,将带来完全不同的情况——在“多数原则”下,非真诚选举是最佳策略,而“大多数原则”下,最佳策略该是真诚选举。

现在我们假定在第二轮表决中,元老们确定罪与非罪之前,事先决定给以惩罚 B 与 C,于是表决过程如下: