教育部高等理工教育教学改革与实践项目研究成果

离散数学及其应用

屈婉玲　耿素云　张立昂

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高等理工教育教学改革与实践项目研究成果

离散数学及其应用

Lisan Shuxue ji qi Yingyong

屈婉玲　耿素云　张立昂

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是在面向21世纪课程教材《离散数学》（屈婉玲、耿素云、张立昂编著，高等教育出版社）的基础上，针对培养计算机应用型人才的教学要求，对原教材内容进行调整和改写而成的。在写作中保留了原教材的框架和严谨性，着重选取能够突出基本知识、基本理论、基本方法及基本应用方面的内容，并保留了大量生动的实例。本书主要内容包括数理逻辑、集合论、图论、组合数学和代数系统简介五部分，可以适应课程少学时的教学要求。本书配套有电子教案和《离散数学学习指导与习题解析》。

本书可作为普通高等学校计算机及相关专业离散数学课程教材，也可供科技人员阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及其应用／屈婉玲，耿素云，张立昂编著. —北京：高等教育出版社，2011.5

ISBN 978-7-04-032245-3

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①屈…②耿…③张… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 057997 号

策划编辑 刘 艳　　责任编辑 刘 艳　　封面设计 于文燕　　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　　责任校对 陈旭颖　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18.5	版　　次	2011年5月第1版
字　　数	410 000	印　　次	2011年5月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	30.00元

物 料 号　32245-00

前言

本书在面向21世纪课程教材《离散数学》(屈婉玲、耿素云、张立昂编著,高等教育出版社;以下简称“原教材”)的基础上,依据教育部高等学校计算机科学与技术教学指导委员会编制的《高等学校计算机科学与技术专业规范》和《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》编写而成。相对于计算机应用人才的培养目标,原教材的教学内容偏多、偏深,学时较多。针对计算机应用型人才的教学要求,对原教材内容进行了一定的调整和改写,主要变动如下。

1. 选材更为精练,主要包括基本知识、基本理论、基本方法及基本应用方面的内容。去掉了初等数论,删减了原教材中一阶逻辑的形式系统和推理、集合论中关于自然数和基数的部分理论、组合数学中的高级计数,重新组织了图论中关于某些特殊图的内容。而对于代数系统部分,则去掉了大部分定理及证明,只保留了相关概念的简要介绍。在改编时保留了大量的应用实例,并根据相关教学内容调整了习题。

2. 在安排上考虑到知识单元之间的关系和教学的方便,调整了先后顺序,把数理逻辑、集合论、图论放在前面,组合数学放在后面,而代数系统作为可选知识单元放在最后。

3. 在写作上既注意以易于理解的方式引入新的概念,也注意概念和知识体系的严谨,把相关理论、方法和应用有机结合起来。

本书主要面向计算机应用专业,教师可以根据自己的教学计划对相关内容进行取舍,完成全部内容的教学需要一个学期,约60~80学时。对于从事计算机科学技术研究和开发的工程技术人员,本书也可以作为学习离散数学的入门参考书。

与本书配套的还有电子教案和《离散数学学习指导与习题解析》,为使用本书的教师和学生提供参考。

本书的出版得到高等教育出版社的大力支持，许多使用原教材的教师给我们提出了很好的建议，对此我们表示衷心的感谢！本书的第一章至第五章、第九章至第十一章由耿素云和张立昂完成，第六章至第八章、第十二章至第十四章由屈婉玲完成。由于水平所限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请读者指正。

作 者

2010年12月

目录

第一部分　数理逻辑

第二部分　集合论

第三部分 图 论

第四部分 组 合 数 学

第五部分 代数系统简介

第一部分　数 理 逻 辑

第一章
命题逻辑的基本概念

1.1　命题与联结词

数理逻辑是研究形式推理的数学分支，形式推理由一系列的陈述句组成. 例如，因为 $3>2$，所以 $3\neq2$. 在这里“$3>2$”和“$3\neq2$”是两个陈述句，整个“因为 $3>2$，所以 $3\neq2$”也是一个陈述句. 这 3 个陈述句都成立，即为真. 这种非真即假的陈述句称为*命题*.

作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的*真值*，真值只取两个值：*真*或*假*. 真值为真的命题称为*真命题*，真值为假的命题称为*假命题*. 真命题表达的判断正确，假命题表达的判断错误. 任何命题的真值都是唯一的.

命题“因为 $3>2$，所以 $3\neq2$”由两个更简单的命题“$3>2$”和“$3\neq2$”组成. “$3>2$”和“$3\neq2$”不能再分解成更简单的命题了. 这种不能被分解成更简单的命题称为*简单命题*或*原子命题*. 在命题逻辑中，简单命题是最小的基本单位，对它不再细分. 但在各种论述和推理中，所出现的命题多数不是简单命题，如上面的“因为 $3>2$，所以 $3\neq2$”. 由简单命题通过联结词联结而成的命题，称为*复合命题*.

判断给定句子是否为命题，应该分两步：首先判定它是否为陈述句，其次判断它是否有唯一的真值.

例 1.1　判断下列句子是否为命题.

(1) 4 是素数.

(2) $\sqrt{5}$是无理数.

(3) x 大于 y，其中 x 和 y 是任意的两个数.

(4) 火星上有水.

(5) 2050 年元旦是晴天.

(6) π大于$\sqrt{2}$吗?

(7) 请不要吸烟!

(8) 这朵花真美丽啊!

(9) 我正在说假话.

解　本题的 9 个句子中,(6) 是疑问句,(7) 是祈使句,(8) 是感叹句,因而这 3 个句子都不是命题. 剩下的 6 个句子都是陈述句,但(3)与(9)不是命题. (3)的真值不确定,根据 x 和 y 的不同取值情况它可真可假,即无唯一的真值,因而不是命题. (9)特别有意思，若(9)为真,即“我正在说假话”是真的,则我正在说真话，因而(9)的真值应为假,矛盾；反之,若(9)为假,即“我正在说假话”是假的,则我正在说假话，因而(9)的真值应为真,同样也矛盾. 因而(9)既不能为真、也不能为假,故它也不是命题. 像(9)这样既不能为真、也不能为假的陈述句称为悖论. 悖论不是命题.

本例中,(1),(2),(4),(5)是命题. (1) 为假命题,(2) 为真命题. 虽然至今还不知道火星上是否有水，但火星上是否有水是客观存在的，并且要么是有,要么是没有，只是现在人类还不知道而已. 也就是说，(4)的真值是客观存在的,而且是唯一的，因此它是命题. 根据同样的道理，(5)也是命题. 作为命题，是否知道它的真值是不重要的，重要的是它有唯一的真值.

在本书中,用小写英文字母表示命题,用“1”表示真,用“0”表示假,于是命题的真值为 0 或 1. 这里用 p, q, r, s 分别表示例 1.1 中(1)，(2)，(4)，(5)的命题:

p:4 是素数.

q:$\sqrt{5}$是无理数.

r:火星上有水.

s:2050 年元旦是晴天.

称为这些命题的符号化. 其中 p 的真值为 0,q 的真值为 1,r 和 s 的真值现在还不知道. 这 4 个命题都是简单命题.

例 1.2　先将下面各陈述句中出现的原子命题符号化,并指出它们的真值,然后再写出这些陈述.

(1) $\sqrt{2}$是有理数是不对的.

(2) 2 是偶素数.

(3) 2 或 4 是素数.

(4) 如果 2 是素数,则 3 也是素数.

(5) 2 是素数当且仅当 3 是素数.

解　在(1)中“$\sqrt{2}$是有理数”是原子命题；(2)～(5)中各有两个原子命题，分别是“2是素数”和“2是偶数”，“2是素数”和“4是素数”，“2是素数”和“3是素数”以及“2是素数”和“3是素数”. 共有5个原子命题，将它们分别符号化为

p:$\sqrt{2}$是有理数.

q:2是素数.

r:2是偶数.

s:3是素数.

t:4是素数.

p,t的真值为0，其余的真值为1. 将原子命题的符号代入，上述各陈述句可表示成：

(1) 非p(p不成立)；(2) q并且(与)r；(3) q或t；(4) 如果q，则s；(5) q当且仅当s.

这5个命题都是复合命题. 不妨称上述表述方式为半形式化的，这种半形式化的表述形式不能令人满意. 数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化，即构造各种符号语言来代替自然语言，完全由符号所构成的语言称为形式语言. 为了达到这个目的，就要求进一步抽象化，即将联结词也符号化. 在例1.2中出现的联结词有5个：“非”、“并且”、“或”、“如果…，则…”、“当且仅当”，这些联结词是自然语言中常用的联结词. 但自然语言中出现的联结词有的具有二义性，因而在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义，并且将它们符号化.

定义1.1　设p为命题，复合命题“非p”(或“p的否定”)称为p的*否定式*，记作$\neg p$. 符号$\neg$称作*否定联结词*. 规定$\neg p$为真当且仅当p为假.

由定义可知，$\neg p$的逻辑关系为p不成立，因而当p为真时，$\neg p$为假；反之当p为假时，$\neg p$为真.

在例1.2中，“非p”可符号化为$\neg p$. 由于p的真值为0，所以$\neg p$的真值为1.

定义1.2　设p,q为两个命题，复合命题“p并且q”(或“p与q”)称为p与q的*合取式*，记作$p\wedge q$. $\wedge$称作*合取联结词*. 规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

由定义可知，$p\wedge q$的逻辑关系为p与q同时成立，因而只有当p与q同时为真时，$p\wedge q$才为真，其他情况下$p\wedge q$均为假.

在例1.2中，“q并且r”符号化为$q\wedge r$. 由于q与r的真值全为1，所以$q\wedge r$的真值为1.

使用联结词$\wedge$需要注意两点：其一是$\wedge$的灵活性. 自然语言中的“既…，又…”，“不但…，而且…”，“虽然…，但是…”，“一面…，一面…”等都表示两件事情同时成立，因而都可以符号化为$\wedge$. 其二，不要见到“与”、“和”就使用联结词$\wedge$，见下面的例子.

例1.3　将下列命题符号化.

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 先给出(1)到(4)中的原子命题，并将其符号化.

p:吴颖用功.

q:吴颖聪明.

r:张辉是三好生.

s:王丽是三好生.

(1)到(4)都是复合命题,它们使用的联结词表面看来各不相同,但都是合取的意思,分别符号化为 $p \wedge q$, $p \wedge q$, $q \wedge \neg p$, $r \wedge s$.

在(5)中,虽然也使用了“与”,但这个“与”是联结该句主语中的两个人的,而整个句子仍是简单陈述句,所以(5)是原子命题,符号化为 t:张辉与王丽是同学.

定义 1.3 设 p, q 为两个命题,复合命题“p 或 q”称作 p 与 q 的析取式,记作$p \vee q$. $\vee$ 称作析取联结词. 规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

由定义可知,当 p 与 q 中有一个为真时,$p \vee q$ 为真. 只有当 p 与 q 同时为假时,$p \vee q$ 才为假.

在例 1.2 中,“q 或 t”符号化为 $q \vee t$. 由于 q 为真,所以$q \vee t$为真。

以上定义的析取联结词 $\vee$ 与自然语言中的“或”不完全一样. 自然语言中的“或”具有二义性,用它有时具有相容性(即它联结的两个命题可以同时为真),有时具有排斥性(即只有当一个为真、另一个为假时才为真),对应的分别称为相容或和排斥或.

例 1.4 将下列命题符号化.

(1) 张晓静爱唱歌或爱听音乐.

(2) 张晓静只能挑选 202 或 203 房间.

(3) 张晓静是江西人或安徽人.

解 先给出原子命题，并将其符号化，然后再将整个(复合)命题符号化.

(1) p:张晓静爱唱歌.

q:张晓静爱听音乐.

显然这个“或”为相容或. 当 p 与 q 中有一个为真，包括两个都为真时,这个命题为真. 符号化为 $p \vee q$.

(2) r:张晓静挑选 202 房间.

s:张晓静挑选 203 房间.

由题意可知,这个“或”应为排斥或. r,s 的取值有 4 种可能:同真,同假,一真一假(2 种). 如果符号化为 $r \vee s$,则当 r 和 s 都为真时为真，这意味着张晓静可以同时挑选 202 和 203 两个房间,这不符合原意. 原意是张晓静只能挑选 202 和 203 中的一间. 如何达到只能挑选一个房间的要求呢？可以使用多个联结词,符号化为$(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$. 不难验证，此复合命题为真当且仅当 r,s 中一个为真,另一个为假. 它准确地表达了原意. 当 r 为真 s 为假时,张晓静挑选 202 房间,r 为假 s 为真时,张晓静挑选 203 房间,其他情况都是不允许的.

(3) t:张晓静是江西人.

u:张晓静是安徽人.

这个“或”也应为排斥或. 和上面一样，可以形式化为$(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$. 但是，在这里张晓静不可能既是江西人又是安徽人，即t与u实际上不能同时为真，因而也可以符号化为$t \vee u$.

定义 1.4 设p，q为两个命题，复合命题“如果p，则q”称为p与q的蕴涵式，记作$p \to q$，并称p为蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件. $\to$称作蕴涵联结词. 并规定$p \to q$为假当且仅当p为真q为假.

$p \to q$的逻辑关系为q是p的必要条件.

在例 1.2 中，“如果q，则s”应符号化为$q \to s$. 由于q与s的真值均为 1，所以$q \to s$的真值也为 1.

在使用联结词$\to$时，要特别注意以下几点.

1. 在自然语言里，特别是在数学中，q是p的必要条件有许多不同的叙述方式，例如，“只要p，就q”，“因为p，所以q”，“p仅当q”，“只有q才p”，“除非q才p”，“除非q，否则非p”，等等. 以上各种叙述方式表面看来有所不同，但都表示q是p的必要条件，因而都应使用$\to$，符号化为$p \to q$.

2. 作为推理“如果p，则q”的形式化，当p为真q为真时，$p \to q$显然为真；当p为真q为假时，$p \to q$显然为假. 问题是当p为假时，为什么规定无论q是真是假，$p \to q$均为真？其实平时经常会采用这种思维方式，譬如，说“如果太阳从西边出来，我就不姓张. ”其实，不管“我”是否姓张，这句话都是对的，因为太阳不可能从西边出来. 也就是说，前件“太阳从西边出来”为假，不论后件“我不姓张”是真是假，这句话都是对的.

3. 在自然语言中，“如果p，则q”中的前件p与后件q往往具有某种内在联系. 而数理逻辑是研究抽象的形式推理，p与q可以无任何内在联系. 譬如，“因为$2<3$，所以$1+1=2$. ”在通常的意义下是不对的，或者认为它是毫无意义的. 但在数理逻辑中，设p：$2<3$，q：$1+1=2$，这句话可形式化为$p \to q$. 而且因为p和q都为真，故$p \to q$为真. 由此可见，$p \to q$为真仅表示p与q的取值关系（当p为真时，q必为真；当q为假时，p必为假），而和p与q是否有内在联系无关.

例 1.5 将下列命题符号化，并指出它们的真值.

(1) 如果$3+3=6$，则雪是白色的.

(2) 如果$3+3 \neq 6$，则雪是白色的.

(3) 如果$3+3=6$，则雪不是白色的.

(4) 如果$3+3 \neq 6$，则雪不是白色的.

(5) 只要a能被 4 整除，则a一定能被 2 整除.

(6) a能被 4 整除，仅当a能被 2 整除.

(7) 除非a能被 2 整除，a才能被 4 整除.

(8) 除非a能被 2 整除，否则a不能被 4 整除.

(9) 只有a能被 2 整除，a才能被 4 整除.

(10) 只有a能被 4 整除，a才能被 2 整除.

其中a是一个给定的正整数.

解 令p:3+3=6,p 的真值为 1.

q:雪是白色的,q 的真值也为 1.

(1)到(4)的符号化形式分别为 $p\to q$, $\neg p\to q$, $p\to\neg q$, $\neg p\to\neg q$. 这 4 个复合命题的真值分别为 1, 1, 0, 1. 这 4 个蕴涵式的前件与后件没有什么内在联系.

令 r:a 能被 4 整除.

s:a 能被 2 整除.

仔细分析可知,(5)到(9)叙述的都是 a 能被 2 整除是 a 能被 4 整除的必要条件,因而都符号化为 $r\to s$. 由于 a 是给定的正整数,因而 r 与 s 的真值是客观存在的,但是真是假与 a 的值有关,现在并不知道. 可是 r 与 s 是有内在联系的,当 r 为真(a 能被 4 整除)时,s 必为真(a 能被 2 整除),于是 $r\to s$ 不会出现前件真后件假的情况,因而 $r\to s$ 的真值为 1.

而(10)叙述的是,a 能被 4 整除是 a 能被 2 整除的必要条件,因而应符号化为 $s\to r$, 它的真值与 a 的值有关. 例如, 当 $a=8$ 时为真, 当 $a=6$ 时为假. 而通常认为(10)是错的, 这再一次提醒我们要正确地理解命题逻辑中的联结词, 不能简单地与自然语言中的联结词等同起来. 如何正确地表示通常所理解的(10), 将在第四章一阶逻辑中介绍.

定义 1.5 设 p,q 为两个命题,复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价式,记作 $p\leftrightarrow q$,$\leftrightarrow$ 称作等价联结词. 规定 $p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件.

在例 1.2 中,"q 当且仅当 s"应符号化为 $q\leftrightarrow s$. 由于 q 与 s 同为真,所以 $q\leftrightarrow s$ 为真.

不难看出,$(p\to q)\land(q\to p)$ 与 $p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系完全一样,即都表示 p 与 q 互为充分必要条件.

例 1.6 将下列命题符号化,并讨论它们的真值.

(1) $\sqrt{3}$是无理数当且仅当加拿大位于亚洲.

(2) 2+3=5 的充要条件是$\sqrt{3}$是无理数.

(3) 若两圆 O_1,O_2的面积相等,则它们的半径相等; 反之亦然.

(4) 当王小红心情愉快时,她就唱歌; 反之,当她唱歌时,一定心情愉快.

解 令 p:$\sqrt{3}$是无理数,真值为 1.

q:加拿大位于亚洲,真值为 0.

(1) 可符号化为 $p\leftrightarrow q$,其真值为 0.

令 r:2+3=5,其真值为 1.

(2) 可符号化为 $r\leftrightarrow p$,真值为 1.

令 s:两圆 O_1,O_2面积相等.

t:两圆 O_1,O_2的半径相等.

(3) 可符号化为 $s\leftrightarrow t$. 虽然不知道 s, t 的真值,但知道当 O_1,O_2的面积相等时, O_1,O_2的半径也相等; 当 O_1,O_2的面积不相等时, O_1,O_2的半径也不相等. 即:当 s 为真时, t 也为真; 当 s 为

假时，t 也为假. 故 $s\leftrightarrow t$ 的真值为 1.

令　u:王小红心情愉快.

v:王小红唱歌.

(4) 可符号化为 $u\leftrightarrow v$，其真值可能为真，也可能为假，要由具体情况而定，这里不再详述.

以上定义了 5 个最基本、最常用，也是最重要的联结词，它们组成一个联结词集$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. 其中$\neg$为一元联结词，其余的 4 个是二元联结词. 现将它们汇总如表 1.1 所示.

表 1.1　联结词$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$的定义

p　q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0　0	1	0	0	1	1
0　1	1	0	1	1	0
1　0	0	0	1	0	0
1　1	0	1	1	1	1

使用多个联结词可以组成更复杂的复合命题，此外还可以使用圆括号（和），（和）必须成对出现. 求这种复杂的复合命题的真值时，除依据表 1.1 外，还要规定联结词的优先顺序. 将圆括号计算在内，规定优先顺序为( )，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；对同一优先级，按照从左到右顺序进行.

例 1.7　令　p:北京比天津人口多.

q:$2+2=4$.

r:乌鸦是白色的.

求下列复合命题的真值.

(1) $(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\rightarrow r$

(2) $(q\vee r)\rightarrow(p\rightarrow\neg r)$

(3) $(\neg p\vee r)\leftrightarrow(p\wedge\neg r)$

解　p，q，r 的真值分别为 1,1,0，容易算出 (1)，(2)，(3) 的真值分别为 1，1，0.

1.2　命题公式及其赋值

上节讨论的是简单命题(原子命题)和复合命题以及它们的符号化形式. 简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位，其真值是确定的，又称作*命题常项*或*命题常元*. 命题常项相当于初等数学中的常数，非 0 即 1. 初等数学中还有变量，对应地，这里有命题变项. 取值 1(真)或 0(假)的变元称作*命题变项*或*命题变元*. 可以用命题变项表示真值可以变化的陈述句. 命题变项不是命题，命题变项与命题常项的关系如同初等数学中变量与常量的关系. 今后也用 p，q，r 等表示命题变项. 这样一来，p，q，r 等既可以表示命题常项，又可以表示命题变项，通常可以由上下文看出.

将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式. 当使用联结词集$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$时,合式公式定义如下.

定义 1.6 (1) 单个命题变项和命题常项是合式公式,并称为原子命题公式.

(2) 若 A 是合式公式,则$(\neg A)$是合式公式.

(3) 若 A, B 是合式公式,则$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$是合式公式.

(4) 有限次地应用(1)~(3)形成的符号串是合式公式.

合式公式也称为命题公式,简称为公式

设 A 为合式公式,B 为 A 中一部分,若 B 也是合式公式,则称 B 为 A 的子公式

对于定义 1.6,要做以下说明.

1. 定义 1.6 给出的合式公式的定义方式称为归纳定义或递归定义方式,下文中还将多次出现这种定义方式.

2. 定义中的 A, B 等符号表示任意的合式公式,可以把它们替换成任意的具体公式.

3. 为方便起见,$(\neg A)$,$(A \wedge B)$等公式单独出现时,外层括号可以省去,写成$\neg A$,$A \wedge B$ 等. 另外,公式中不影响运算次序的括号也可以省去,如公式$(p \vee q) \vee (\neg r)$可以写成 $p \vee q \vee \neg r$.

由定义可知,$(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$, $(p \wedge q) \wedge \neg r$, $p \wedge (q \wedge \neg r)$等都是合式公式,而 $pq \rightarrow r$, $p \rightarrow (r \rightarrow q$等不是合式公式.

下面给出公式层次的定义.

定义 1.7 (1) 若公式 A 是单个的命题变项,则称 A 为 0 层公式.

(2) 称 A 为 $n+1(n \geqslant 0)$层公式,是指下面情况之一:

(a) $A = \neg B$, B 是 n 层公式;

(b) $A = B \wedge C$,其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式,且 $n = \max(i,j)$;

(c) $A = B \vee C$,其中 B,C 的层次及 n 同(b);

(d) $A = B \rightarrow C$,其中 B, C 的层次及 n 同(b);

(e) $A = B \leftrightarrow C$,其中 B, C 的层次及 n 同(b).

(3) 若公式 A 的层次为 k,则称 A 是 k 层公式.

例如,$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$, $(\neg(p \rightarrow \neg q)) \wedge ((r \vee s) \leftrightarrow \neg p)$分别为 3 层和 4 层公式.

在命题公式中,由于有命题变项出现,因而真值是不确定的. 用命题常项替换公式中的命题变项称作解释. 当将公式中出现的全部命题变项都解释成具体的命题常项之后,公式就成了真值确定的命题. 例如,在公式$(p \vee q) \rightarrow r$ 中,若将 p 解释成:2 是素数,q 解释成:3 是偶数,r 解释成:$\sqrt{2}$是无理数,则公式$(p \vee q) \rightarrow r$ 解释成:若 2 是素数或 3 是偶数,则$\sqrt{2}$是无理数. 这是一个真命题. 若 p, q 的解释不变,r 解释为:$\sqrt{2}$是有理数,则$(p \vee q) \rightarrow r$ 解释成:若 2 是素数或 3 是偶数,则$\sqrt{2}$是有理数. 这是一个假命题. 还可以给出这个公式各种不同的解释,其结果不是得到真命题就是得到假命题. 其实,将一个命题变项解释成真命题,相当于指定这个命题变项的真值为 1; 解释成假命题,相当于指定这个命题变项的真值为 0.