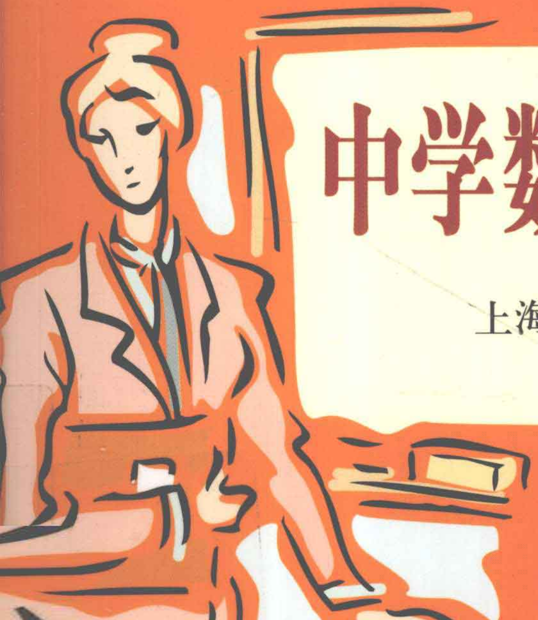

中学数学建模与赛题集锦

上海市中学生数学知识应用竞赛组织委员会　编

復旦大學出版社

中学数学建模与赛题集锦

上海市中学生数学知识应用竞赛组织委员会　编

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学数学建模与赛题集锦/上海市中学生数学知识应用竞赛组织委员会编.
—上海:复旦大学出版社,2008.6
ISBN 978-7-309-06052-2

Ⅰ. 中…　Ⅱ. 上…　Ⅲ. 数学课-中学-教学参考资料　Ⅳ. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 065188 号

中学数学建模与赛题集锦
上海市中学生数学知识应用竞赛组织委员会　编

出版发行　复旦大学出版社　上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　范仁梅
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　常熟市华顺印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16
印　　张　15.25
字　　数　333 千
版　　次　2008 年 6 月第一版第一次印刷
印　　数　1—5 100

书　　号　ISBN 978-7-309-06052-2/G・753
定　　价　26.00 元

内 容 提 要

该书为中学生数学建模竞赛培训指导用书.书中结合上海市中学生数学知识应用竞赛系列活动,介绍适合中学生水平的应用数学建模知识和有关竞赛试题,包括对中学生应用数学竞赛优秀论文的介绍和点评.

本书主要内容有:第一部分,发展变化的差分方程模型和不定方程;工程网络图及有关排序问题;初等应用概率;随机模拟;数学分类方法.第二部分,图上的最优化问题;组合设计;初等几何问题;立体几何中的应用问题;资源分配模型与线性规划;动态规划;经济数学问题.书后的附录给出了历年竞赛的优秀论文及其评论;美国近年的赛题和解答;2007年上海市中学生应用数学知识竞赛的初赛题和复赛题.

本书可供广大中学生、中学数学教师阅读,也可供相关专业的大学生和教师参考.

前　言

随着科技的发展和社会的进步，数学这门历史悠久的学科得到了越来越广泛的应用．20世纪是科学技术突飞猛进的时代：人类登上月球，飞向太空；科学家开始解读遗传密码，开创了生物工程；人们发明了功能强大的高速数字电子计算机，开启了在网络上自由奔腾的新纪元．在这些重大的科技成果背后数学无不发挥着重要的有时是关键的影响．

如今数学不仅在各门自然科学、技术和制造业、信息业和服务业等各种行业中有广泛的应用，而且在国民经济的规划和预测，自然资源的勘探、开发和保护，交通和物资调配，气象预报和各种灾害的预报、防治以及医学和社会科学的许多领域中乃至日常生活中都显示出举足轻重的作用．这一切促使人们对数学的重要性有了新的和更加深刻的认识．联合国将20世纪的最后一年——2000年列为“世界数学年”．“高技术本质上是一种数学技术”、“人类进入了数学工程技术的时代”已经成为人们的共识．

在这样的背景下，以计算机为工具、应用数学知识解决实际问题的能力将成为新世纪青年重要的科学素质．用数学解决实际问题，需要将现实问题归结为数学问题(又称建立数学模型或数学建模)；然后选择合适的数学方法加以求解；对求得的结果用适当的方法加以验证；最后将结果应用于现实问题，对某些现象加以解释，或作出预测，或用于设计或控制某个过程等等．这些能力不是天生的，也不是单纯通过学习数学基础知识就能获得的，只能通过有意识的反复训练和实践才能获得．然而以往的数学教学在这方面是欠缺的，有必要加以改革和完善．青年学生应自觉提高这方面的能力，迎接未来的挑战；数学教育工作者也应加强这种素质的培养．

1991年开始，上海市工业与应用数学学会和上海市青少年科技教育中心(当时的青少年科技指导站)召开了一系列大中学教师座谈会进行调查研究，决定举办上海市中学生数学知识应用系列活动作为对高中数学教学的改革和补充的一种探索，并自那一年开始，每年举行一次中学生数学知识应用竞赛．这项活动每年都有5 000多名中学生参加，至今已连续开展了17年．

从1991年至1993年，这项活动主要由中学生数学知识应用系列讲座和上海市中学生数学知识应用竞赛组成．讲座是由高等院校从事应用数学教学和研究的教师向参加活动的中学生通过案例分析介绍用数学解决科技、生产和生活中的实际问题的方法和过程，即数学建模的方法和过程．竞赛分为初赛与复赛两个阶段．初赛的试题公开刊登在报刊上，要求学生在数天内完成，允许学生之间的相互讨论，也允许学生向教师、家长和专业人士请教．根据初赛的成绩和中学任课教师的推荐，从初赛参加者中选拔出一部分同学参加决赛；决赛用闭卷方式进行，评选个人一、二、三等奖和学校团体奖5名．由于试题切合实际，初赛试题公开，学生与学生、学生与老师、学生与家长之间的相互探讨，形成了社会各界关心数学和数学应用的良好氛围．这种独树一帜的竞赛模式，得到了社会的肯定与学生的喜爱．中学生数学知识应用系列讲座的讲义经多次试用修改于1995年以书名《中学数学知识应用精编》正式出版，以后又陆续出版了《中学应用数学竞赛题萃》、《高中应用数学选讲》等教材．

在实践中，上海市中学数学知识应用竞赛系列活动本身也在不断地发展和完善. 为了使学生更直接地接触社会，发现身边的数学问题，磨炼真刀真枪地用数学解决问题的能力，从1995年开始，在应用数学竞赛系列活动中增加了小论文竞赛. 撰写应用数学小论文使学生亲身经历了解决实际问题的全过程，在问题的发现、数据的采集、数学模型的建立、数学问题的求解、结论的验证、论文的写作、论文的答辩等过程中各种能力得到全面的提高. 同学们的参赛论文中洋溢着创新精神，十分令人鼓舞. 从中选拔出来的优秀论文多次在国内外获奖.

为了让中学生亲身体会用计算机作为工具、应用数学知识解决实际问题的全过程，从2001年起举办了上海市中学生应用数学夏令营活动. 在夏令营活动中，要求营员们组成3人小组，用两天时间解决一个实际问题，完成一篇论文. 这次活动涌现出许多有潜质的学生，写出了高质量的论文. 在夏令营活动中，学生们从共同的目标出发，分工协作，取长补短，有效地培养了自身的团队精神和集体荣誉感.

作为竞赛活动的一个组成部分，从1997年起，组委会先后组织辅导了部分中学组队参加美国大学生数学建模竞赛，取得了优异成绩. 近年来组委会还组织部分中学参加美国中学生数学建模竞赛，同样获得非常优异的成绩.

上海市中学生数学知识应用竞赛系列活动在国内外产生了很大的影响，国内有的省、市也从1993年起陆续举行中学生数学知识应用竞赛. 特别是，从1997年起北京市组织了有八千多中学生参加的竞赛，并有逐年扩大的趋势，吸引了许多其他省、市的中学生参加. 这些竞赛基本上采取了公开初赛—决赛—小论文的有效模式. 随着我国对素质教育的倡导，有的学校已把开展应用数学活动、培养学生的综合素质作为一项课题进行研究，更多的学校已把应用数学或数学模型作为研究型选修课程，甚至成立应用数学特色学校.

我国数学工作者分别在1995年华盛顿举行的国际工业与应用数学大会、1996年塞维利亚召开的第八届国际数学教育大会、2002年北京召开的国际数学建模教学与应用大会等国际会议上介绍了上海市中学生数学知识应用竞赛活动的情况，引起与会者的浓厚兴趣和巨大反响，得到了国际中学数学教育界的赞誉和称道.

为了充分反映近年中学生数学知识应用竞赛系列活动的成果并为今后的活动提供更丰富的资料，我们又组织了一直关心和参与中学生应用数学教学并在应用数学方面有造诣的教授、副教授或高级教师编写了本书. 本书的主要内容为：提供若干有用的初等应用数学方法和数学模型；对国内中学生数学知识应用竞赛试题分类型进行分析、详细解答和方法总结，这部分的内容覆盖了现有中学生数学知识应用竞赛的大多数试题. 另外，本书还收录了上海市中学生数学知识应用小论文竞赛和上海市中学生应用数学夏令营活动中的若干优秀论文（我们未对原文作任何修改），还收录了最新的上海市中学生数学知识应用竞赛试题以及美国中学生数学建模竞赛的试题.

本书可以作为中学生数学知识应用竞赛系列活动的辅导教材；也可作为高中数学的参考书，或中学应用数学、数学建模研究型课程的教材. 若将本书与其姐妹书籍《高中应用数学选讲》结合使用会有更好的效果.

上海市中学生数学知识应用竞赛组织委员会

2008年4月

目　　录

第 一 部 分

第 二 部 分

Mathematics

MATHEMATICS

第一部分

第 1 章　发展变化的差分方程模型和不定方程

在自然界和人类社会中，变化无所不在. 在我们目光所及范围内，总能发现发展变化的事物. 数学正是研究事物发展变化的有效手段. 事物的变化往往又是相互关联的，函数正是研究不同量变化之间相互关系的一种有力数学工具. 当我们研究某种离散量的变化规律时，一种特殊的函数——数列就是合适的数学工具，而差分方程模型就是最有效的数学模型.

非波那契(Fibonacci)兔子数就是一个很好的例子. 意大利比萨的莱昂纳多，他的另一个名字非波那契更是为人所知，通常被认为是中世纪最伟大的数学家之一. 他在 1202 年完成的一部书得益于阿拉伯和印度记数法，提出了许多数学问题，其中最引起后人兴趣的是这样的一个问题：

年初时出生一对兔子，这对兔子 2 个月后有生殖能力. 若每月每对兔子会生产一对幼兔，到年底一共会有多少对兔子？

我们假设兔子没有死亡，最初 4 个月的兔子数变化的情况可以从图 1 - 1 中看出. 图中，深色的表示有生殖力的兔子. 在每个框中，同一对兔子都处在固定的位置上.

在代表每个月的框的顶部的那对兔子就是最初的一对. 假设年初时它们刚出生，因此在第 2 个月末就生育一对幼兔，而且以后每个月都生育一对幼兔. 第 2 个月末出生的那对兔子，直到第 4 个月才会生育.

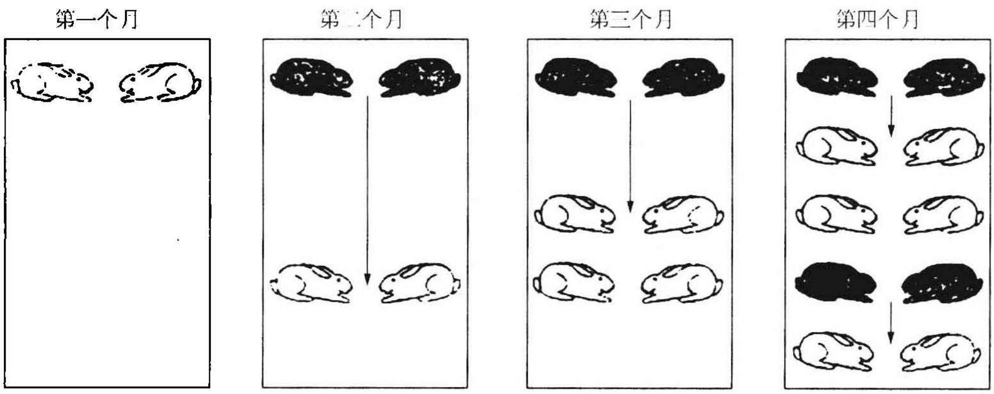

图 1 - 1

令 x_k 为 k 月末兔子的对数，从图 1 - 1 中可以看出

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 5.$$

用同样的方法可以一个月一个月地画下去，相继得到第 5 个月末至第 12 个月末的兔子对数：

$$x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},$$

从而解决了原来的问题，但这是很繁琐的．有效的方法是设法导出刻画任何一个月的兔子数是如何依赖于以前几个月兔子数的一般数学模型．

由于不考虑兔子的死亡，以兔子对为单位，应该有：本月末的兔子数等于上月末的兔子数加上本月内出生的兔子数．注意到兔子出生 2 个月后才有生育能力，所以本月内出生的兔子数应等于 2 个月以前的兔子数．这样，本月末的兔子数就等于上月末的兔子数加上前一个月末的兔子数，用公式表示即为

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2} \quad (k = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots).$$

这个方程通常称为菲波那契方程，但实际上是由开普勒(Kepler)首先将它写成这样形式的．由菲波那契方程很容易得到

$$x_5 = x_4 + x_3 = 8,\ x_6 = x_5 + x_4 = 13,\ \cdots.$$

最终得到 $x_{12} = 233$，即 1 年后兔子为 233 对．这就解决了菲波那契的问题．用这一方程，我们还可以继续预言 1 年以后各个月末的兔子数

$$x_{13},\ x_{14},\ \cdots.$$

$x_k(k = 1,\ 2,\ \cdots)$ 称为菲波那契数列，它给出了在离散的时间点即各月末的兔子对数．而菲波那契方程就是一个差分方程，它刻画了菲波那契数的本质特征．以后可以看到，从这一差分方程甚至可以得到菲波那契数的一般表达式：

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right],\ k = 1,\ 2,\ \cdots.$$

本章主要讨论差分方程的一些基本性质、差分方程的解法，用差分方程模型解决一些实际问题，并研究差分方程解的一些有趣的性态．

§1.1 数列和差分

一、数列

数列是用来描述某种数量是如何随着离散的时间变量、空间变量或其他离散变量变化的一种工具．例如，有一笔钱用于投资，它的价值是随时间变化的．我们考察它在每个月末的情况，用 V_1 表示它在投资后第 1 个月末的价值，用 V_2 表示它在投资后第 2 个月末的价值，……，用 V_k 表示它在投资后第 k 月末的价值，……，那么

$$V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_k,\ \cdots$$

就是一个数列. 又如, 测量一条河的宽度. 由于河的宽度随着位置的不同而变化, 我们测量距河的起点 1 千米处河的宽度为 w_1, 2 千米处河的宽度为 w_2, $\cdots$, k 千米处河的宽度为 w_k, $\cdots$, 则

$$w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_k,\ \cdots$$

又是一个数列. 一般地, 我们有如下的定义.

定义　若对任一正整数 k, 有唯一的一个实数 x_k 与之对应, 我们就称 $x_k(k = 1,\ 2,\ \cdots)$ 为一个数列, 记为 $\{x_k\}$ 或 $X = \{x_k\}$.

已经了解函数概念的读者不难发现, 数列其实是一种特殊的函数, 它的定义域限定为正整数(有时可扩充为非负整数).

有时, 数列中 k 和 x_k 的对应关系可以用数学公式明显地表示出来, 这种公式称为通项公式.

例 1　数列 $\{x_k\} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$, 显然有

$$x_k = \frac{1}{k},\ k = 1,\ 2,\ \cdots.$$

例 2　对数列 $\{x_k\} = \{1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \cdots\}$, 下列公式成立

$$x_k = \frac{1}{2}k(k+1),\ k = 1,\ 2,\ \cdots.$$

与函数一样, 数列也可以用图像表示. 图 1－2 所示就是非波那契数列的图像, 其中横坐标表示 k 的变化, 纵坐标表示 x_k 的取值, 数列的图像是图中离散的圆点.

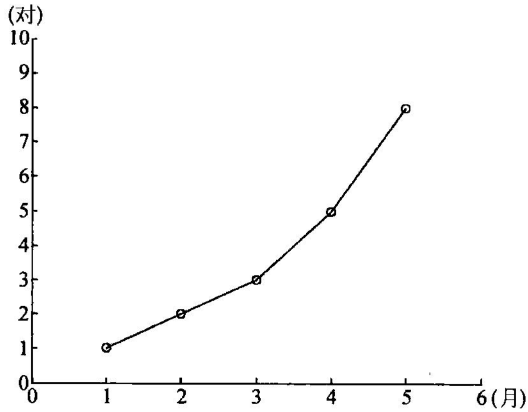

图 1－2

有时我们需要了解一个数列 $\{x_k\}$ 当 k 越来越大时的变化趋势.

定义　当 k 越来越大时, 数列 $\{x_k\}$ 中的元素 x_k 越来越无限地接近一个实数 A, 我们称 A 为数列 x_k 的极限, 记作

$$\lim_{k\to\infty} x_k = A.$$

例 3　$\{x_k\}$ 的通项公式为 $x_k = \frac{1}{k(k+1)}$, 有

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

显然, 并不是所有的数列都是有极限的. 如通项公式为

$$x_k = (-1)^k \frac{k}{(k+1)}$$

的数列，随着 k 越来越大，它总在 1 和 −1 之间波动，不可能无限接近一个实数.

二、差分

数列相邻两项之差构成的一个新的数列，称为差分数列，简称差分. 数列的差分对研究数列的性质通常是有帮助的. 下面我们给出差分的严格定义.

定义 设 $X = \{x_k\}$ 为一数列，

$$x_{k+1} - x_k,\ k = 1,\ 2,\ \cdots.$$

构成的数列称为 X 的差分数列，简称为差分，记为 ΔX，并记

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x_k,\ k = 1,\ 2,\ \cdots.$$

称 Δ 为差分算子.

显然有

$$\Delta X = \{\Delta x_k\} = \{x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \cdots,\ x_{k+1} - x_k,\ \cdots\}.$$

例 4 若 $\{x_k\} = \{2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \cdots\}$，则有

$$\{\Delta x_k\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\},$$

对差分数列再作一次差分称为二阶差分，如数列 $X = \{x_k\}$ 的差分为 $\Delta X = \{\Delta x_k\} = \{x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \cdots,\ x_{k+1} - x_k,\ \cdots\}$. 再作一次差分后得到一个新的数列 $\{x_3 - 2x_2 + x_1,\ x_4 - 2x_3 + x_2,\ \cdots\}$，记为 $\Delta^2 X$ 或 $\{\Delta^2 x_k\}$.

例 5 若 $\{x_k\} = \{2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \cdots\}$，则

$$\{\Delta x_k\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\},$$

$$\{\Delta^2 x_k\} = \{2,\ 2,\ 2,\ \cdots\}.$$

类似地，可以定义三阶差分、四阶差分等高价差分.

已知数列的通项公式，即可求得差分数列的通项公式. 如例 4 和例 5 中的数列 $\{x_k\}$ 的通项公式是

$$x_k = k^2 + 1,$$

那么，显然有

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = [(k+1)^2 + 1] - [k^2 + 1] = 2k + 1,$$

而

$$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = 2.$$

这就简单地获得了例 4 和例 5 的结果.

利用差分可以求出某些数列的通项公式. 如例 2 中的数列 $\{x_k\} = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots\}$, 其差分为

$$\{\Delta x_k\} = \{2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}.$$

显然

$$\Delta x_k = k + 1.$$

由

$$x_k = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_{k-1},$$

可得

$$x_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

我们还有以下命题.

命题 1 若对数列 $\{x_k\}$, $x_k = ck + b$ 对一切 $k = 1, 2, \cdots$ 成立,其中 c 和 b 为常数,则成立

$$\Delta x_k = c, \ k = 1, 2, \cdots;$$

反之,若成立 $\Delta x_k = c$, $k = 1, 2, \cdots$, 则必存在常数 b,使得

$$x_k = ck + b.$$

证明 设 $x_k = ck + b$, 对一切正整数 k, 有

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = [c(k+1) + b] - (ck + b) = c.$$

这就证明了命题的第一部分.

为证明命题的第二部分,先证明以下事实: 若对数列 $\{z_k\}$ 成立 $\Delta z_k = 0$, $k = 1, 2, \cdots$, 则必存在某个常数 b,成立 $z_k = b$, $k = 1, 2, \cdots$ 由于对一切正整数 k 成立 $\Delta z_k = 0$, 即对一切正整数 k 成立 $z_{k+1} = z_k$, 从而

$$z_{k+1} = z_k = z_{k-1} = \cdots = z_2 = z_1,$$

即 $\{z_k\}$ 是一个常数数列.

现在证明命题的第二部分.

设 $\Delta x_k = c$, $k = 1, 2, \cdots$; 令 $y_k = ck$, $z_k = x_k - y_k$, 那么对数列 $\{z_k\}$ 的差分成立

$$\begin{aligned}\Delta z_k &= z_{k+1} - z_k = (x_{k+1} - y_{k+1}) - (x_k - y_k) \\ &= \Delta x_k - \Delta y_k = 0, \ k = 1, 2, \cdots.\end{aligned}$$

于是必存在一个常数 b,使得对一切正整数 k,成立

$$z_k = b,$$

从而

$$x_k = z_k + y_k = ck + b.$$

这就证明了命题 1 的第二部分.

类似地,我们还可证明以下命题.

命题 2 若对数列 $\{x_k\}$ 成立 $x_k = \frac{1}{2}ck^2 + dk + b$, $k = 1, 2, \cdots$ 则对一切正整数 k,成立

$$\{\Delta^2 x_k\} = c;$$

反之,若对一切正整数 k 成立, $\{\Delta^2 x_k\} = c$; 则必存在常数 d 和 b,使得

$$x_k = \frac{1}{2}ck^2 + dk + b,\ k = 1, 2, \cdots.$$

命题的证明作为习题,请读者自己完成.

三、用差分刻画变化趋势

若对数列 $\{x_k\}$,不等式 $x_l < x_{l+1}$ 成立,即数列在其第 l 项有增加的趋势,我们称数列在第 l 项处是增加的. 这一性质可用 $\Delta x_l > 0$ 来刻画. 同样,若成立 $x_l > x_{l+1}$,我们称数列在其第 l 项处是减小的,此时成立 $\Delta x_l < 0$. 若成立 $x_l < x_{l+1}$, $x_l \leqslant x_{l-1}$,我们称数列 $\{x_k\}$ 在第 l 项达到相对极小. 这一性质也可以用 $\Delta x_l > 0$, $\Delta x_{l-1} \leqslant 0$ 来刻画. 同样若成立 $x_l > x_{l+1}$, $x_l \geqslant x_{l-1}$,我们称数列 $\{x_k\}$ 在第 l 项达到相对极大. 这一性质可用 $\Delta x_l < 0$, $\Delta x_{l-1} \geqslant 0$ 来刻画.

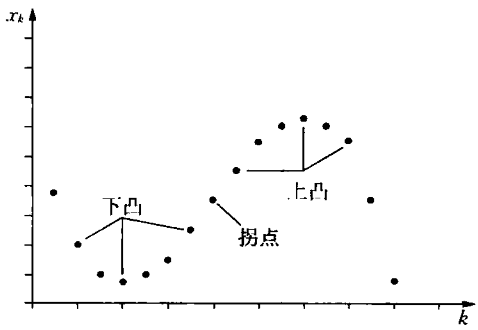

图 1-3

若成立 $x_l > \frac{1}{2}(x_{l-1} + x_{l+1})$,我们称数列 $\{x_k\}$ 在第 l 项处为上凸的. 这一性质可用 $\Delta x_{l-1} > \Delta x_l$ 或 $\Delta^2 x_{l-1} < 0$ 来刻画. 同样,若成立 $x_l < \frac{1}{2}(x_{l-1} + x_{l+1})$,我们称数列 $\{x_k\}$ 在第 l 项处是下凸的. 这一性质可以用 $\Delta x_{l-1} < \Delta x_l$ 或 $\Delta^2 x_{l-1} > 0$ 来刻画.

若数列经过第 l 项由上凸变为下凸或由下凸变为上凸,我们称数列 $\{x_k\}$ 在 l 项处有一个拐点. 这一性质可用 $\Delta^2 x_{l-2} \cdot \Delta^2 x_l < 0$ 来刻画.

图 1-3 给出了数列凸性和拐点图形.

若将 $\{x_k\}$, $\{\Delta x_k\}$ 和 $\{\Delta^2 x_k\}$ 列在同一表中,数列的变化趋势就十分明显地呈现出来了.