经济应用数学基础
学习指导及习题解答

李万军　赵白云　王建明
秦素萍　宿金勇　薛庆平　编著

河南商业高等专科学校

经济应用数学[illegible]
学习指导及习题解答

李万军　赵白云　王建明
秦素萍　宿金勇　薛庆平　编著

河南商业高等专科学校

前　言

经济数学是财经类专业的核心基础课程，是专升本、自考、考研的必考课程。由于课时所限，课堂教学内容不能够满足财经类学生对经济数学知识的需求。为了便于学生自学，满足学生增强自身后劲，追求高学历的发展需要，同时，也为了减轻教师批改作业的负担，作为原教材《经济应用数学基础》（上、下册，电子科技大学出版社）的配套教材，我们组织编写了这本《经济应用数学基础学习指导及习题解答》教学参考书。该书按原教材体系分章编写，每章有两部分内容，第一部分是该章要求掌握的知识要点，第二部分是课后习题解答。该书可作为高校师生的经济数学教学参考书。

本书《微积分》部分第一、二、三章由秦素萍副教授编写，第四、五章由薛庆平老师编写，第六章由李万军副教授编写，《线性代数与线性规划》部分第一、二、四章由王建明副教授编写，第三章由宿金勇副教授编写，第六、七、八章由赵白云副教授编写。本书图形由薛庆平、赵辉两位教师制作。在出书过程中得到了河南商专教务处教材科的大力支持，在此深表谢意。

由于水平所限，书中不完善之处恳请读者提出宝贵意见，在此表示感谢。

作者

2001 年 9 月 10 日

目　录

上册　微积分

下册　线性代数与线性规划

第一章　函数、极限与连续

第一章　要点

一、基本要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解分段函数，会求分段函数的定义域、函数值.

3. 了解复合函数的概念，会分析复合函数的复合过程，熟悉基本初等函数及其图形.

4. 能熟练列出简单经济问题中的函数关系.

5. 了解极限概念的基本思想，深刻理解极限的 $\varepsilon—N$、$\varepsilon—M$、$\varepsilon—\delta$ 定义，了解其几何意义.

6. 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系，会对无穷小量进行阶的比较.

7. 掌握极限的四则运算法则，能熟练地运用法则求极限.

8. 知道夹逼定理和单调有界极限存在准则，能熟练运用两个重要极限求函数的极限.

9. 理解函数在一点连续的两个等价定义，会用连续的定义判断函数(包括分段函数)在一点是否连续.

10. 了解初等函数的连续性，会利用初等函数的连续性求极限(包括分段函数). 知道在闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).

二、内容提要

(一)函数

函数是微积分研究的主要对象,在函数的定义中,定义域、对应法则是函数概念的两大要素.

求解函数问题时要注意概念的两大要素,所有问题的讨论都应在定义域范围内进行,要掌握函数单调性、奇偶性、有界性、对称性等几何性质的概念和判别,要熟练掌握基本初等函数的定义域、值域、性质和图形特性,掌握分段函数的处理方法.

(二)极限的概念、性质和运算

1.概念

在理解极限概念时,应强调极限描述的是当自变量按某种规律变化时,函数值与定常数 A 的距离可以任意小的变化趋势,与函数能否取到 A 无关.同时注意无穷小、无穷大的概念.

2.性质

1°.函数、极限与无穷小的关系:$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$(其中 A 为常数,$\lim\alpha(x)=0$).

2°.唯一性:若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$,则 $A=B$.

3°.保号性:如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或 $A<0$),则在 x_0 的某邻域内($x\neq x_0$),$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

若在 x_0 的某邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

3.极限的运算

极限的运算,首先要分析极限的类型特征,一般:

1°.若 $f(x)$是初等函数,且 x_0 在定义域内,则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2°. 若极限式中含有界变量，应考虑利用无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量的性质.

3°. 若极限为不定式，一般要先化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再设法消去零因子或无穷大因子，再用极限运算法则求值.

4°. 若为“$\frac{0}{0}$”或“1^{∞}”型不定式，考虑能否用两个重要极限求值.

5°. 对分段函数在分段点处的极限，应通过左、右极限讨论极限值.

(三)函数的连续性

函数连续性问题，主要是在熟练掌握极限运算的基础上运用函数连续的定义. 要注意运用左右极限判断分段函数在分段点的连续性，要了解闭区间上连续函数的性质，尤其是最大值最小值定理.

求复合函数的极限时，如果 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处极限存在，又 $y=f(u)$ 在对应的 $u_0(=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$ 处连续，则极限符号与函数符号可交换位置，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

三、典型例题

例 1　求 $y=\sqrt{\lg\frac{3x-x^2}{2}}$ 的定义域.

解：由 $\begin{cases}\lg\frac{3x-x^2}{2}\geqslant 0\\ \frac{3x-x^2}{2}>0\end{cases}$　即 $\begin{cases}\frac{3x-x^2}{2}\geqslant 1\\ \frac{3x-x^2}{2}>0\end{cases}$

解得 $1\leqslant x\leqslant 2$，因此，定义域为[1,2].

例 2　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{\sin 2x}{x})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$

解：(1) 当 $x\to\infty$ 时 $\frac{1}{x}\to 0$，于是 $x\sin\frac{1}{x}=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\to 1$，又 $|\sin 2x|\leqslant 1$，于是 $\frac{\sin 2x}{x}\to 0$，所以

$$原式=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=1+0=1$$

(2) 为"$\infty-\infty$"型不定式，有理化分子，得

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

(3) 令 $\operatorname{tg}x=t$，则 $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{t}$，当 $x\to 0$ 时 $t\to 0$.

$$原式=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

注：在求极限的方法中，用变量代换是一种常用的方法.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{1-x} & x<1\\ a & x=1\\ ax+b & x>1\end{cases}$

讨论 a，b 取何值时，f(x) 在 x=1 处 (1) 有极限；(2) 连续.

解：(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\ln[1+(x-1)]^{\frac{1}{1-x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b$$

所以,当 $a+b=-1$ 时,$f(x)$在 $x=1$ 处有极限.

(2)当 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$,即 $a+b=-1=a$ 时,$f(x)$在 $x=1$ 处连续,解得 $a=-1,b=0$.

习题一 解答

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$　　(2) $y=\ln\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

(3) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$　　(4) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$

(5) $y=\frac{1}{\mathrm{tg}x}$　　(6) $y=\frac{\arccos\frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$

解：函数 $y=f(x)$ 的定义域记为 $D(f)$，一般用区间表示或集合表示.

(1) 要使 $\sqrt{x^2-4x+3}$ 有意义，须 $x^2-4x+3\geqslant 0$，

即　　$(x-1)(x-3)\geqslant 0$.

由此推出　$x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 1$.

故函数的定义域 $D(f)=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

(2) 要使 $\ln\frac{1}{1-x}$ 有意义，须 $\frac{1}{1-x}>0$，即 $1-x>0$；

要使 $\sqrt{x+2}$ 有意义，须 $x+2\geqslant 0$.

由此推出　$-2\leqslant x<1$.

故函数的定义域 $D(f)=[-2,1)$.

(3) 要使 $\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$ 有意义，须 $\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$，

即　　$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1, x^2-5x+4\leqslant 0$.

由此推出　$1\leqslant x\leqslant 4$.

故函数的定义域 $D(f)=[1,4]$.

(4)要使 $\arcsin\frac{x-1}{2}$ 有意义，须 $-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant1$，即 $-1\leqslant x\leqslant3$. 故函数的定义域 $D(f)=[-1,3]$.

(5)要使 $\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ 有意义，须 $\operatorname{tg}x\neq0$，

即 $\quad x\neq k\pi$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$(其中 k 为整数).

故函数的定义域 $D(f)=\{x\mid x\neq k\pi$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in N\}$.

(6)要使 $\dfrac{\arccos\frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$ 有意义，

须 $\quad -1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant1,x^2-x-6>0$，

即 $\quad -3\leqslant x\leqslant4,x<-2$ 或 $x>3$.

故函数的定义域 $D(f)=[-3,-2)\cup(3,4]$.

2. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 是不是相同的函数？为什么？

解：不相同. 因为定义域不同，$y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而 $y=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

3. 确定下列函数的定义域，并求 $f(-\frac{1}{2}),f(1),f(1.2)$ 的值.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x\leqslant1\\ x^2-1 & 1<x\leqslant2\end{cases}$$

解：分段函数的定义域是各分支定义域的并集，则

$D(f)=[-1,2]\qquad f(-\frac{1}{2})=\sqrt{1-(-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$f(1)=\sqrt{1-1^2}=0\qquad f(1.2)=(1.2)^2-1=0.44$

4. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(0),f(1),f(-x),f(\frac{1}{x})$.

解：$f(0)=2$

$f(1)=1^2-3\times1+2=0$

$f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2$

$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2-3\frac{1}{x}+2=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2$

5. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段形式表示，作出函数图形.

解：当 $2x-1\geqslant0$，即 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$|2x-1|=2x-1$；

当 $2x-1<0$，即 $x<\frac{1}{2}$ 时，$|2x-1|=1-2x$.

所以 $$y=5-|2x-1|=\begin{cases}4+2x & x<\frac{1}{2}\\ 6-2X & x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

其图形如图 1 所示.

6. 某商店购进 1000 米布，每米售价 21.5 元，销售 800 米后滞销，降价 15% 后继续销售，试将商店销售收入 R 表示为销售量 Q 的函数.

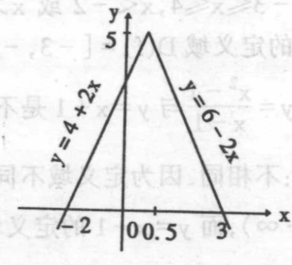

图 1

解：当 $0\leqslant Q\leqslant800$ 时，

$R=21.5Q$；

当 $800<Q\leqslant1000$ 时

$R=21.5\times800+(Q-800)\times21.5\times(1-15\%)$

$=2580+18.275Q$.

故 $$R=\begin{cases}21.5Q & 0\leqslant Q\leqslant800\\ 2580+18.275Q & 800<Q\leqslant1000\end{cases}$$

7. 已知 $y=\sqrt{1+u^2}$，$u=\sin v$，$v=\lg x$，将 y 表示为 x 的函数.

解：将 v、u 依次代入，得 $y=\sqrt{1+[\sin(\lg x)]^2}$.

8. 将下列函数分解为简单函数的复合形式.

(1) $y=\cos\sqrt{1-x}$　　(2) $y=\ln tg2x$

(3) $y=\sqrt[3]{1-2x}$　　(4) $y=[\arccos(-x^3)]^2$

(5) $y=e^{\sin 3x}$　　(6) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

解:(1) $y=\cos\sqrt{1-x}$ 由函数 $y=\cos u, u=\sqrt{v}, v=1-x$ 复合而成,其中 u、v 为中间变量.

(2) $y=\ln tg2x$ 由函数 $y=\ln u, u=tgv, v=2x$ 复合而成,其中 u、v 为中间变量.

(3) $y=\sqrt[3]{1-2x}$ 由函数 $y=\sqrt[3]{u}, u=1-2x$ 复合而成,其中 u 为中变量.

(4) $y=[\arccos(-x^3)]^2$ 由函数 $y=u^2, u=\arccos v, v=-x^3$ 复合而成,其中 u、v 为中间变量.

(5) $y=e^{\sin 3x}$ 由函数 $y=e^u, u=\sin v, v=3x$ 复合而成,其中 u、v 为中间变量.

(6) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 由函数 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\sqrt{x}$ 复合而成,其中 u、v 为中间变量.

9. 某工厂生产某产品,每日最多生产 100 单位。它的日固定成本为 130 元,每生产一个单位产品的可变成本为 6 元,求该厂日总成本函数及平均单位成本函数。

解:设产品数量为 Q 单位,日总成本为 C(Q),则

日总成本函数

$$C(Q)=130+6Q \qquad Q\in[0,100]$$

日平均单位成本函数

$$\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{130}{Q}+6 \qquad Q\in[0,100]$$

10. 设需求函数由 $P+Q=1$ 给出,

(1) 试求总收益函数 R;

(2)若出售$\frac{1}{3}$单位商品，试求其总收益.

解：由 $P+Q=1$ 知 $P=1-Q$

(1)总收益函数　　$R=P\cdot Q=(1-Q)Q=Q-Q^2$

(2)当 $Q=\frac{1}{3}$时，　$R=\frac{1}{3}-(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$

11.设某企业对产品制订了如下的销售策略，顾客购买 20 公斤以下(包括 20 公斤)部分，每公斤 10 元；购买量小于等于 200 公斤时，其中超过 20 公斤的部分，每公斤 7 元；购买量超过 200 公斤的部分，每公斤 5 元，试写出销售量为 x 公斤时的收益函数 $R(x)$.

$$\text{解}:R(x)=\begin{cases}10x & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 10\times 20+(x-20)\times 7 & 20<x\leqslant 200\\ 10\times 20+180\times 7+(x-200)\times 5 & x>200\end{cases}$$

$$\text{即}\quad R(x)=\begin{cases}10x & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 60+7x & 20<x\leqslant 200\\ 460+5x & x>200\end{cases}$$

12.某商场每年销售商品 4000 件，每件商品的进价为 500 元，每次采购费为 1000 元，每件商品的年存储费为 80 元，假定产品均匀销售，且一批商品售完后，另一批恰好到货，求总费用函数.

解：设商品分 x 次采购，总费用为 $P(x)$，则

$$P(x)=500\times 4000+1000x+\frac{4000}{2x}\times 80$$

$$=2\times 10^6+1000x+\frac{16\times 10^4}{x}$$

13.写出下列数列的前五项.

(1)$x_n=1-\frac{1}{2^n}$　　　　(2)$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$

(3)$x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$　　(4)$x_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

解：(1)$x_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$x_2=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$，$x_3=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$，$x_4=$

$1-\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$, $x^5=1-\frac{1}{2^5}=\frac{31}{32}$.

(2) $x_1=(1+1)^1=2$, $x_2=(1+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$, $x_3=(1+\frac{1}{3})^3=\frac{64}{81}$, $x_4=(1+\frac{1}{4})^4=\frac{625}{256}$, $x_5=(1+\frac{1}{5})^5=\frac{7776}{3125}$.

(3) $x_1=\sin\pi=0$, $x_2=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_4=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}$, $x_5=\frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{5}$.

(4) $x_1=m$, $x_2=\frac{m(m-1)}{2}$, $x_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$, $x_4=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$, $x_5=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{120}$.

14.观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势,指出哪些有极限,极限值是多少?哪些没有极限?

(1) $100,99,90,89,3,\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$.

(2) $-\frac{1}{3},\frac{3}{5},-\frac{1}{7},\frac{7}{9},-\frac{1}{11},\cdots$.

(3) $1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{4},\frac{1}{5},\frac{7}{6},\cdots$.

(4) $0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{8},\cdots$.

(5) $\left\{\frac{(-1)^n}{10}\right\}$.

(6) $\left\{2+\frac{1}{n^2}\right\}$.

解:(1)有极限,极限值为0.

(2)没有极限.

(3)没有极限.

(4)有极限,极限值为0.

(5)振荡无极限.

(6)有极限,极限值为 2.

15.用数列极限的定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$　　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

证:(1)对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ 就可以了,因此,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$,当 $n>N$ 时,$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

(2)对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$ 就可以了,因此,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$,当 $n>N$ 时,$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

16.利用极限定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$　　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x}=2$

(3)$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$　　　(4)$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

证:(1)因为 $|f(x)-8|=|3x-1-8|=3|x-3|$,任意给定 $\varepsilon>0$,要使 $|f(x)-8|<\varepsilon$,只要使 $3|x-3|<\varepsilon$,即 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$.任意给定 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$,当 $0<|x-3|<8$ 时,不等式 $|f(x)-8|=|3x-1-8|<\varepsilon$ 恒成立,故 $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$.

(2)因为 $|f(x)-2|=\left|\frac{2x+3}{x}-2\right|=\frac{3}{|x|}$,任意给定 $\varepsilon>0$,要使 $|f(x)-2|<\varepsilon$,只要使 $\frac{3}{|x|}<\varepsilon$,即 $|x|>\frac{3}{\varepsilon}$.任意给定 $\varepsilon>0$,总存在 $M=\frac{3}{\varepsilon}$,当 $|x|>M$ 时,不等式 $|f(x)-2|=\left|\frac{2x+3}{x}-2\right|<\varepsilon$ 恒成