中学数学
思想方法训练

余致甫　编著

广东教育出版社

中学数学思想方法训练

余致甫　编著

广东教育出版社

粤新登字03号

中学数学思想方法训练

余致甫

*

广东教育出版社出版发行
广东省新华书店经销
韶关新华印刷厂印刷
（韶关市新华北路14号）
787×1092毫米32开本　27.625印张　1插页　630，000字
1993年2月第1版　1993年2月第1次印刷
印数 1—1,690册
ISBN7—5406—1902—3/G·1884
定价 8.75元

前　言

解数学问题是研究数学的重要环节．从大量种类繁多的数学问题中找出它们的共同特征、解题规律与技巧，提炼出一些行之有效的数学思想方法进行训练，这对学习数学与提高数学教学质量是有效的措施．数学决不是单纯的知识内容的堆砌，而在这些知识内容中，还存在着一条贯彻始终的数学思想方法的线索．如果把数学知识内容看作为一个一个的"散装零件"，那么通过数学思想方法训练，就把这些"散装的零件"装配成一部"机器"．它将在掌握、应用与发展新知识时起积极作用．如果忽视了数学思想方法训练，孤立地学习数学知识，对掌握知识，培养数学能力，发展智力，都起不了多大的作用，且常常会事倍功半．

数学思想方法训练的研究，是当前国内外数学教学工作者研究的重要课题．美国数学教育家乔治·波利亚把数学思想方法训练看作揭示数学发明的本质和阐述数学教学的实质．苏联数学家华西列夫斯基认为：应该把让学生通过解题学会数学思想方法，作为数学教学的重要任务．这对我们改进数学教学是有启发的．

我从1982年开始研究中学数学思想方法训练，利用假期先后在上海、江苏、浙江、江西、山东、四川等地给中学生、中学教师讲课，收到了较好的效果．进行了探索实践活动后，1985年，我把讲稿整理，并在上海师范大学数学系开设了《中学

数学思想方法训练》的选修课。由于体系安排、材料选择，思想方法提炼等都比较新颖，有很大现实指导性，因此颇受欢迎。这次，我把讲稿与选修课的讲义重新整理，并充实一些新鲜的内容，编成《中学数学思想方法训练》一书。希望它对提高中学数学教学质量作出点贡献。

《中学数学思想方法训练》包含了对数学结论的探求与讨论；数学结论的逻辑结构；数学解题方法研究；现代数学从方法上渗透介绍等几部分。它是中学数学教师进修或辅导学生参加数学竞赛的参考书，也可作为高等师范院校数学系初等数学研究提高课的选修教材。高中学生想提高自己的数学水平、解题能力，本书将是一本较理想的课外读物。

本书参考国内外一些数学方法研究课题，结合个人教学实践与体会编写，其中难免有不妥之处，请批评指正。

在撰写本书的过程中，曾参阅了大量有关的书籍和文章，书名与文题恕不一一列出，在此谨向有关作者致谢。

作　者

目　录

第一章　数学结论的探求与讨论

研究数学问题是学习数学的心脏，对数学结论的探求，寻找解决问题的途径与方法则是研究数学问题重要的一环，它既可以获得与巩固数学知识，又可以培养研究数学的能力.

不仅解决一个个孤立的数学问题，而且善于探求与讨论数学结论是学习与研究数学最有效的办法. 本章将介绍迭代与递归；推扩与退缩；广泛与局限；直路与弯路；严谨与直观等重要思想方法，这也就是我们常说的探求法(*Heuristics*).

第一节　迭代与递归

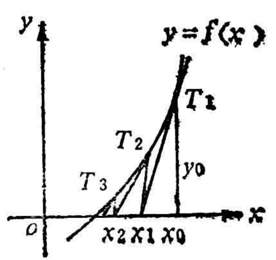
迭代与递归是重要的数学思想方法，它贯串在高等数学、初等数学与现代数学之中，尤其在序列、整标函数、差分方程、解方程中有着广泛的应用.

一、几个例子

1.求方程$f(x)=0$ 的一个近似解.

我们往往用切线来代替曲线，用逼近的方法求出方程的近似解。

如图，取$x=x_0$为初始值，过T_1点的切线方程为：



$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

令$y=0$，$x=x_1$代入得：

$$x_1=x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

同理可得：

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

……

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

这样，得出了递推公式，用迭代方法可以求出所需要的精度的近似根．这个递推公式充分形象地描述了方程近似根无限逼近的基本特征．

例如，求出方程$x^3+x-1=0$在区间$[\frac{1}{2},1]$上的一个近似根．

设$f(x)=x^3+x-1$，则$f'(x)=3x^2+1$,取初始值$x_0=1$，则$f(x_0)=1$，$f'(x_0)=4$，代入上述递推公式可得：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{1}{4}=0.75,$$

$x_1=0.75$ 则$f(x_1)=0.1719$，$f'(x_1)\doteq2.6875$.

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0.75-\frac{0.1719}{2.6875}\doteq0.6860.$$

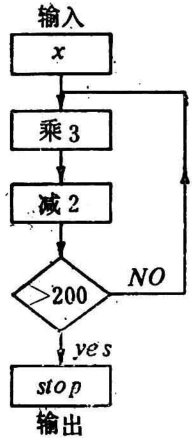
$x_2=0.6860$，则$f(x_2)\doteq0.008829$，$f'(x_2)=2.4118$.

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0.686-\frac{0.008829}{2.4118}\doteq0.6823.$$

……

这样就可以得出所要求精度的近似根．

2. 按下列程序框图来计算，如果$x=5$，那么应该计算几次才停机呢？



这个问题很新颖，初中学生也感兴趣。实质上，它是一个递归与迭代方法的应用。

输入：x，

第一次输出：$3x-2$；

第二次输出：

$$3(3x-2)-2=9x-8;$$

第三次输出：

$$3(9x-8)-2=27x-26;$$

第四次输出：

$$3(27x-26)-2=81x-80.$$

……

每一次参加运算的x值，都是前一次运算的结果，反复迭代便可以从前一个x求出后一个x，这样一个递归关系反映出一个整标函数$f(n)$。用两种方法加以归纳可得：

$f(n)=x\cdot 3^n-(3^n-1)$或者

$f(n)=x\cdot 3^n-2\cdot 3^{n-1}-2\cdot 3^{n-2}-\cdots-2\cdot 3-2$.

显然，$n=1$，$f(1)=3x-2$；

$n=2$，$f(2)=9x-2\cdot 3-2=9x-8$；

$n=3$，$f(3)=27x-2\cdot 3^2-2.3-2=27x-26$；

……

如果$x=5$，那么$f(4)=81x-80=325>200$。只要运算四次就可以停机了.

3. 求$f(x)=\arcsin x$在$x=0$ 处的n阶导数。

容易求得：$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$f''(x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

两式比值得：

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{x}{1-x^2},$$

$\therefore\quad (1-x^2)f''(x)=xf'(x).$

应用$Leibniz$公式两边求n阶导数可得：

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)+C_n^1(1-x^2)'f^{(n+1)}(x)+C_n^2(1-x^2)''f^{(n)}(x)=xf^{(n+1)}(x)+C_n^1x'f^{(n)}(x).$$

化简得：

$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)$
$=xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x).$

令$x=0$代入得：

$f^{(n+2)}(0)-n(n-1)f^{(n)}(0)-nf^{(n)}(0)=0,$

即 $f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).$

根据这个递推关系式，用迭代方法可得n阶导数。

①当$n=2k$时，

$\because f''(0)=0,$

$$\begin{aligned}\therefore f^{(2k+2)}(0)&=(2k)^2f^{(2k)}(0)\\&=(2k)^2(2k-2)^2f^{(2k-2)}(0)=\cdots\\&=(2k)^2(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots4^2\cdot2^2f''(0)\\&=0.\end{aligned}$$

②当$n=2k-1$时，

$\because f'(0)=1,$

$$\begin{aligned}\therefore f^{(2k+1)}(0) &= (2k-1)^2 f^{(2k-1)}(0)\\ &= (2k-1)^2(2k-3)^2 f^{(2k-3)}(0) = \cdots\\ &= (2k-1)^2(2k-3)^2(2k-5)^2\cdots 3^2\cdot 1^2 f'(0)\\ &= [(2k-1)!!]^2.\end{aligned}$$

可见，这样比较复杂的问题，应用递归迭代方法可顺利得到解决。

如果要计算：①$(\arcsin x)^{(6)}$，②$(\arcsin x)^{(5)}$等，那么很容易得出结果是 0 与$[3!!]^2=9$.

4.把一枚硬币连掷 n次，在投掷过程中接连出现两次正面向上的概率等于多少？

这是一个古典概率问题，但要从 n 次连掷中接连出现两次正面概率有不少困难，我们用递推关系找出与 n 有关系的命题。

设以P_n表示在n次投掷中不发生接连两次正面向上概率，显然$P_1=1$，$P_2=\frac{3}{4}$。若$n>2$，有两种情况：

①第一次掷得背面向上，其余$n-1$次投掷中不接连出现两次正面朝上的概率记作P_{n-1}；

②第一次掷得正面向上，第二次必须掷出背面向上，以免接连两次出现正面，而在以后的$n-2$次投掷中不接连两次出现正面的概率是P_{n-2}。因此就有

$$P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}\quad (n>2).$$

这个递归关系两边同乘2^n，可以得出一个更熟悉的式子：

$$2^nP_n=2^{n-1}P_{n-1}+2^{n-2}P_{n-2},$$

设 $A_n=2^nP_n$，则$2^{n-1}P_{n-1}=A_{n-1}$，$2^{n-2}P_{n-2}=A_{n-2}$，

$$\therefore A_n=A_{n-1}+A_{n-2}.$$

这恰是一个$Fibonacci$数列递归关系式，它的通项为$A_n = F_{n+2}$，这一点以后还要讲述的。我们要找的概率$Q_n = 1 - P_n = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$。

迭代与递归在高等数学与初等数学中有着广泛的应用，尤其在解题中有着明显的效果。它从有限个的情况来把握无限个的情况，使得较复杂的问题有了解答途径。

二、试算—归纳—猜想—论证

试算—归纳—猜想—论证是研究与发现数学规律的重要手段，也是探求数学结论的主要方法。

例1　已知$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，而$f_n(x)=\underbrace{f[f\cdots f(x)]}_{n个f}$，$(n\in N)$，求$f_n(x)$的表达式。

解题分析： $f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x_2}}$ 可看作初始条件，$f_n(x)=\underbrace{f[f\cdots f(x)]}_{n个f}$ 可以看作一个递推关系，也可以写成

$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$。

解： 1)试算：$f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$；

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1-f_1^2(x)}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1-f_2^2(x)}}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1-2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1-3x^2}};$$

……

2)归纳：$f(x)$下标随着自然数增加，它的解析式中x^2项前的系数也在变化，系数值与下标值是一致的，其他的元素、记号均不变的。

3)猜想：由上述归纳就可提出猜想：

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1-nx^2}}.$$

猜想是否合理，就要证明。猜想的结论得到证明，这个猜想就是合理的，否则就是不合理的。有限个问题常常可用数学归纳法证明，无限个问题常常可用极限理论来解决。

4)证明：用数学归纳法证明

1°） 当$n=1$时，等式显然成立；

2°） 假设$n=k$成立，即 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-kx^2}}$.

当$n=k+1$时，则

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1-f_k^2(x)}}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-kx^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1-kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1-(k+1)x^2}}$$

也成立。

所以对$n\in N$时，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-nx^2}}$。

我们可以看出，这里f_1是一个前提，而$f_n=f[f_{n-1}]$是一个递推关系，是研究问题的基础，求f_n表达式就是求序列$\{f_n\}$的通项公式。因而这方法有它的典型性与实用性。

例2 已知 $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，求$x^n+\dfrac{1}{x^n}$。

解： 1)试算：

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta;$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4\cos^2\theta-2$$

$$=2(2\cos^2\theta-1)=2\cos2\theta;$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=8\cos^3\theta-6\cos\theta=2\cos3\theta;$$

……

2)归纳：

左边x的指数随自然数增加，右边的θ前系数也相应变化，且指数数值与系数数值相同，于是可以对第n项提出猜想。

3)猜想：

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta.$$

4)证明：用数学归纳法证明。

1°） 当$n=1$时，左边$=x+\dfrac{1}{x}$，右边$=2\cos\theta$，由已知可