众创精品

普通高等教育规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU GUIHUA JIAOCAI

[高等数学] 下

GAODENG SHUXUE

◆主编 周文龙 裴东林

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

普通高等教育规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU GUIHUA JIAOCAI

高等数学

GAODENG SHUXUE

下

主　编　周文龙 裴东林
副主编　赵大一　张士军　李中恢

北京邮电大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下)/周文龙，裴东林主编. —北京：北京邮电大学出版社，2009.12

ISBN 978－7－5635－2198－2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①周… ②裴… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 223882 号

书　　名	高等数学(下)
主　　编	周文龙　裴东林
责任编辑	李　欣
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号　邮编　100876
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	北京市彩虹印刷有限责任公司
开　　本	787 mm × 1092 mm　1/16
印　　张	11.75
字　　数	300 千字
版　　次	2009 年 12 月第 1 版　2009 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978－7－5635－2198－2
定　　价	26.00 元

如有印刷问题请与北京邮电大学出版社联系　电话：(010)82551166　(010)62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn　Http：//www.buptpress.com

前言

为了顺应高等院校教育普及化迅速发展的趋势，配合高等院校的教学改革和教材建设，坚持“因材施教”的教学原则，注重理论联系实际，全面促进高等院校教材建设，进一步提高我国高校教材的质量，我们特组织一些一线教师编写了本教材，教材以“应用、实用、适用”为基本原则，淡化理论、注重实践、内容体系更趋合理，尽量体现新知识、新技术、新方法和新材料，注重技术与应用的结合，以利于学生综合素质的形成和科学思维方法与创新能力的培养。本书分为上下册，上册主要包括一元函数及其极限与连续、导数与微分、微分学的应用、不定积分、定积分及其应用等内容，下册主要包括向量代数与空间解析几何初步、多元函数与微分学、二元函数及多元函数积分学、无穷级数和常微分方程等内容。

高等数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学，它是借助极限理论，解决微分和积分问题，从而研究变化现象的，变化现象大小与动因有关，而动因或者只有一个，或者不止一个，前者我们用一元函数表示，后者我们用多元函数表示，于是就涉及到它们的相关运算，因此，高等数学不仅可以作为一种工具，而且可作为一种思维模式；不仅可以理解为一种知识、一门科学，而且可以理解为一种素养、一种文化。再者，高等数学课程是高等院校学生必修的重要理论基础课程之一，它是一门非常重要的基础课，它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远，不仅为学习后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维、逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题解决问题的能力，较强的自主学习的能力，创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用。

高等数学教育在培养高素质科技人才中具有其独特的、不可替代的作用，为适应新形势、新目标下对数学的要求，更好地为后续课程提供必要的基础理论和知识准备，进一步为培养学生的创新意识和创新能力服务，从中体现“强化基础，突出实践，重在素质”。本套教材在编写上具有以下特点：

1. 把概念和定理的引出、建立与证明尽可能处理成一个“发现”的过程。这种处理方法将有利于学生创新意识和能力的培养。使学生熟练掌握高等数

学的基本知识和基本运算技巧，为主干课程及延伸课程的学习提供必需的数学基础知识，为学生分析和解决实际问题提供必要而有效的数学方法。

2. “数学源于物理”不很准确，却也是事实，本书不但强调它们在数学上的作用，同时也阐述了它们在物理或几何上的解释。这样做能使非数学专业的理工科学生认识到数学作为一种自然科学语言时所具有的精确描述能力，从而激发学习数学的兴趣。

3. 本书在阐述上，力求通俗地解释概念、简洁地概括方法，使学生易于掌握，从而逐步培养学生具有一定的抽象概括问题的能力，一定的逻辑推理能力，比较熟练的运算能力，综合分析并解决实际问题的能力，严谨处理问题的能力等。

本书在编写过程中，参考了大量同类图书，有些典型例题和示例，是各位老师教学经验的成果，在本书中我们用来参考，在这里我们不一一联系老师致谢，而采用编委中体现其姓名，以示敬意。

由于编者水平有限，成书仓促，请有关专家、学者及使用本书的老师、同学和读者批评指正。同时在本书编写过程中我们进行了探索与尝试，难免会存在问题与不足，诚恳地欢迎广大师生提出意见和建议，帮助我们不断改进。

编　　者

目录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

第 7 章　多元函数与微分学

第 8 章　二重积分

目录

第 9 章 无穷级数

第 10 章 常微分方程

第 6 章 向量代数与空间解析几何

第一节 空间直角坐标系与向量的线性运算

一、空间直角坐标系

为了沟通空间的点与数、图形与方程的联系，我们先引进空间直角坐标系.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），这三条数轴都以 O 为原点且有相同的长度单位，它们的正方向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 90 度后指向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 6 - 1）. 这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 直角坐标系，点 O 称为该坐标系的原点.

设 M 是空间的一点，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 P、Q、R 三点，点 P、Q、R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影点，设这三个投影点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x，y 和 z. 于是空间一点 M 唯一确定了一个有序数组 x,y,z. 反过来，对给定的有序数组 x,y,z 可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P、在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q、在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x,y,z 确定的唯一的点（图 6 - 2）. 这样，空间的点与有序数组 x,y,z 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 x,y,z 称为点 M 的坐标，依次称 x，y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，并可把点 M 记为 $M(x,y,z)$.

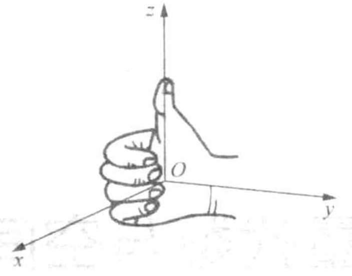

图 6－1

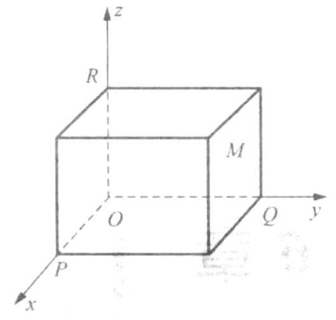

图 6－2

三条坐标轴中每两条可以确定一个平面，称为坐标面，由 x 轴和 y 轴确定的坐标面简称为 xOy 面，类似地还有 yOz 面与 xOz 面．这三个坐标面把空间分成 8 个部分，每一个部分称作一个卦限．如图 6－3 所示，8 个卦限分别用罗马字母 Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ 表示．第一、二、三、四卦限均在 xOy 面的上方按逆时针方向排定，其中在 xOy 面上方并在 yOz 面前方、xOz 面右方的是第一卦限；第五、六、七、八卦限均在 xOy 面的下方，也按逆时针方向排定．它们依次分别在第一至第四卦限的下方．

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，为了表达 P_1 与 P_2 之间的距离，我们过 P_1 与 P_2 各作三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，这 6 个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体（图 6－4）．从图中易见该长方体的各棱的长度分别为

$$|x_2 - x_1|,\ |y_2 - y_1|,\ |z_2 - z_1|$$

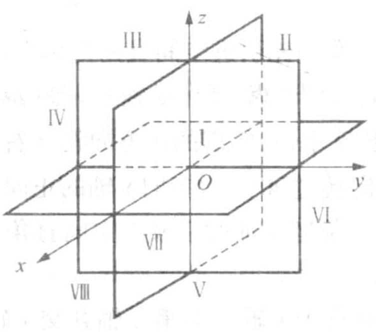

图 6－3

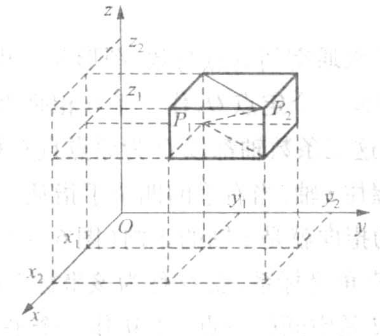

图 6－4

于是得对角线 P_1P_2 的长度，亦即空间两点 P_1、P_2 的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

【例 1】 证明：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形．

证： 根据距离公式得

$$|M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_3M_1| = \sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{6}$$

有 $|M_2M_3| = |M_3M_1|$，故 $\Delta M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

【例2】 所有与原点的距离为常数 r 的点的坐标 x,y,z 应满足什么方程？把这些点组成的集合表示出来.

解： 设 $M(x,y,z)$ 是满足假设条件的任意一点，原点 $O(0,0,0)$，按题意 $|OM| = r$，即得

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$$

或

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

记所有与原点距离为 r 的点组成的集合为 B，则

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$$

它是中心在原点、半径为 r 的球面.

二、向量的坐标与向量线性运算的坐标表示

1. 向量的概念

客观世界中有许多量，比如物体的体积，质量，两点间的距离，某一过程所需要的时间等等. 这种量只有大小、多少之分，因此只需用数字就可以刻画，并且处理这些量的规则与实数的运算规则相当，这种量被称为纯量. 然而，客观世界还存在这样一种量，例如位移，速度，加速度，力，力矩等等，这种量不仅有大小之分，还有方向之异，单纯用一个数字不足以描述它们. 处理这类量的规则也不再符合实数的运算规则，而遵循另外一些共同的规律. 人们把这类既有大小又有方向的量称为向量.

向量通常用黑体字母或上方加箭头的字母来表示，如 $\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{s}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等等. 由于向量的两个要素是大小和方向，而具有这两个要素的最简单的几何图形是有向线段，故在数学中常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量也记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图6－5）. 在以后的讨论中，我们对向量和表示它的有向线段不加区分，例如把有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 说成向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，或把向量 $\boldsymbol{s}$ 看成有向线段.

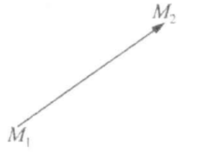

图6－5

需要指出，数学上讨论的向量仅有大小和方向这两方面的属性，并不涉及向量的起点，因此如果两个向量 $\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{v}$ 的大小相等，方向一致，就称 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 相等. 并记作 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}$. 这就是说，如果两个有向线段的大小和方向是相同的，则无论它们的起点是否相同，我们就认为它们表示同一个向量. 这样理解的向量叫做自由向量.

由于自由向量可在空间自由平移，因此可这样规定两个非零向量 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角：将 $\boldsymbol{s}$ 或

$\boldsymbol{v}$ 平移，使它们的起点重合后，它们所在的射线之间的夹角 θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) 称为 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角（图 6－6）. 并记作 $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{v})$ 或 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})$.

向量的大小叫做向量的模，向量 $\boldsymbol{v}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模依次记作

$$|\boldsymbol{v}|,\ |\overrightarrow{M_1M_2}|.$$

模等于 1 的向量叫做单位向量，模等于零的向量叫做零向量，记作 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看成是任意的.

两个非零向量如果它们方向相同或者相反，就称这两个向量平行，向量 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 平行，记作 $\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{v}$. 由于零向量的方向可以看做是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行. 当两平行向量的起点在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，因此，两向量平行又称两向量共线.

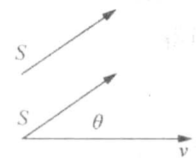

图 6－6

类似地还有向量共面的概念. 设有 $k(k \geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在同一平面上，就称这 k 个向量共面.

2. 向量的加法

从物理和力学中知道，两个力、两个速度均能合成，得到合力与合速度. 并且合力与合速度都符合平行四边形法则，由此实际背景出发，我们定义向量的加法如下：

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线是 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 6－7）.

以上规则叫做向量相加的平行四边形法则. 但此法则对两个平行向量的加法没有做说明，而以下的法则. 不仅蕴含了平行四边形法则，还适用于平行向量的加法：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连结 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 6－8）. 这一法则称为向量相加的三角形法则.

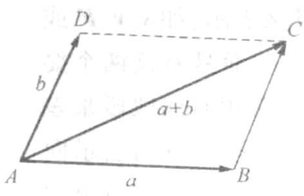

图 6－7

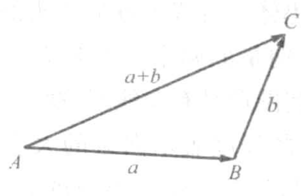

图 6－8

向量的加法符合下列运算律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

上述两运算性质可根据向量加法的三角形法则推出.

由于向量加法符合交换律与结合律，因此 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ ($n \geqslant 3$) 相加可以写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并按向量相加的三角形法则可得 n 个向量相加的法则如下：使前一

向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图6－9. 有

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

【例3】 证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证： 设四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 E，如图 6－10 所示，由于

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}$$

故
$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$$

即
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

这说明 AD 与 BC 平行且相等，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

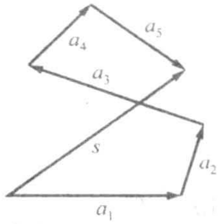

图 6－9

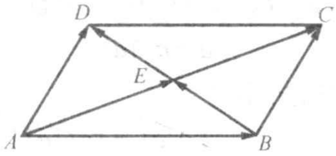

图 6－10

3. 向量与数的乘法(数乘)

对任意的实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，我们定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积(简称数乘)是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0$.

向量与数的乘积符合下列运算律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

　　　　　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

对于向量 $\boldsymbol{a}$，称向量 $(-1)\cdot\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 即 $(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

显然，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，而方向相反. 进而可确定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-1)\cdot\boldsymbol{a}$$

即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的负向量的和(图 6－11(a)).

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}=0$$

显然，在图 6－11(a) 中将向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(向右)平移，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 是由 $\boldsymbol{a}$ 的终点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点所引的向量(图 6－11(b))

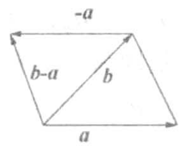

图 6-11(a)

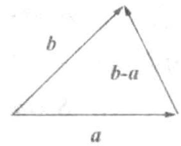

图 6-11(b)

在图 6-12 所示的以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中，两条对角线向量分别表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，因三角形两边之和大于第三边之长，两边之差小于第三边之长，再考虑 a 与 b 平行的情况，于是对任意的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有不等式

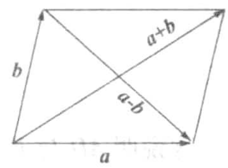

图 6-12

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|| \leqslant |\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，取 $\lambda = 1/|\boldsymbol{a}|$，则向量

$$\lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$$

的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且它的模

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|| = |\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{a}| = 1.$$

故 $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$.

即有 $\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$，于是 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

这说明任何非零向量都可以表示成它的模与同向单位向量的数乘.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a} \neq 0$，则向量 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$.

定理证明从略.

现设 Ox 为数轴，其原点为 O，把与 Ox 轴的正向同向的单位向量记作 $\boldsymbol{i}$，P 为数轴上任意一点，其坐标为 x，根据数轴上一点坐标的定义知

图 6-13

$$x = \pm |\overrightarrow{OP}|,$$

于是不难得知 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$（图 6-13），从而得下列推论：

推论 1 设 P 为数轴 Ox 上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$.

4. 向量的坐标与向量线性运算的坐标表示

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，分别以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 记 x 轴、y 轴、z 轴上与该轴正向同向的单位向量（称为 $Oxyz$ 坐标系下的标准单位向量），任给向量 $\boldsymbol{a}$，总可以通过平移使其起点位于原点 O，从而有对应点 M，满足 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}$，记点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影点依次为 P、Q、R（图 6-14）. 则按照向量的加法法则知

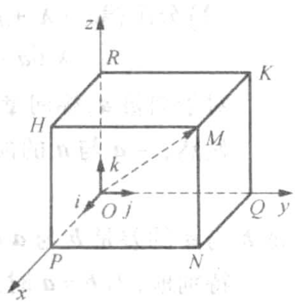

图 6-14

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \qquad (1)$$

设 P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 a_1,a_2,a_3，则由上述推论 1 及(1)式得知

$$\overrightarrow{OP}=a_1\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=a_2\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=a_3\boldsymbol{k}$$

因此

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k} \tag{2}$$

(2)式表明空间任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可表示成标准单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的线性组合，(2)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的标准分解式. $a_1\boldsymbol{i}$, $a_2\boldsymbol{j}$, $a_3\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴方向的分向量.

显然，给定了向量 $\boldsymbol{a}$，就确定了 点 M 及 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，进而确定了有序数组 a_1,a_2,a_3；反之，给定了有序数组 a_1,a_2,a_3，则有(2)式也就确定了向量 $\boldsymbol{a}$，于是，向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 a_1,a_2,a_3 之间有一一对应关系：$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\leftrightarrow a_1,a_2,a_3$. 据此我们把有序数组 a_1,a_2,a_3 称为向量 $\boldsymbol{a}$(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标，记作

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3) \tag{3}$$

(3)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

空间任何一点 $P(x,y,z)$ 都对应一个向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$, 称为 P 点(关于原点)的向径。由向量坐标的定义知 $r=(x,y,z)$，即一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 P，又表示 $\overrightarrow{OP}$, 要注意从上下文中加以区别.

如果给定了向量的坐标表示式，则可方便地进行向量的加法、减法以及向量与数的乘法.

设
$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),$$
即
$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$
利用向量加法的交换律与结合律，以及向量与数的乘法的结合律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda a_2)\boldsymbol{j}+(\lambda a_3)\boldsymbol{k},$$
即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3).$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘运算，只要对向量的各个坐标进行相应的数量运算就行了.

根据定理 1，当向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其坐标表示式为

$$(b_1,b_2,b_3)=\lambda(a_1,a_2,a_3)$$

这也就相当于 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的坐标成比例：

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3} \tag{4}$$

注： 当 a_1,a_2,a_3 中某个坐标为 0 时，相应的 b_1,b_2,b_3 中对应的坐标也为 0。同时，(4)式中去掉分母为 0 的一项.

【例 4】 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式，其中 M_1,M_2 的坐标分别是 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2).

解： 由于 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$，

而　$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

故　$\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，

从而得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1). \tag{5}$$

【例5】 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$

解： 如图 6－15 所示，设点 M 的坐标为 (x,y,z)，则根据题目要求以及(5)式

得　$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$，

于是得

$x-x_1=\lambda(x_2-x),y-y_1=\lambda(y_2-y),z-z_1=\lambda(z_2-z)$，

从而得到 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$，

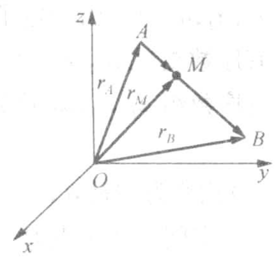

图 6－15

故点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点（也称定比分点），当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

三、向量的模、方向角和投影

1. 向量的模

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，作向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，如图 6－16 所示，则点 M 的坐标为 (a_1,a_2,a_3)，根据空间两点间的距离公式就得

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{6}$$

【例6】 已知两点 $A(1,0,3)$）和 $B(2,4,7)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解： 由于 $\boldsymbol{e}=\overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|$，而由(5)、(6)两式可得

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,4-0,7-3)=(1,4,4)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+4^2+4^2}=\sqrt{33}$$

于是　$\boldsymbol{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{33}},\dfrac{4}{\sqrt{33}},\dfrac{4}{\sqrt{33}}\right)$

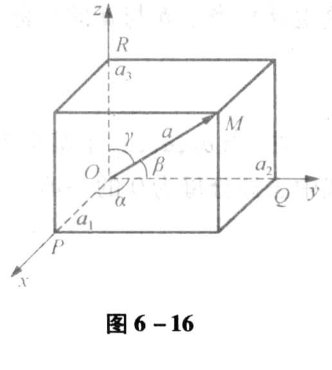

图 6－16

2. 方向角与方向余弦

如图6－16所示，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向所成的夹角，即与标准单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 所成的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 $(0 \leqslant \alpha,\beta,\gamma \leqslant \pi)$. 方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 方向角或方向余弦完全确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

设向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，根据方向余弦的意义容易推得向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦有如下计算公式：

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{7}$$

方向余弦满足关系式：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{8}$$

根据(8)式，以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，即有

$$\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

又由(6)、(7)两式可知，当向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式(3)给出后，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模和方向角就确定了；反之，当向量 $\boldsymbol{a}$ 的模和方向角已知时，由(7)式就可以求出它的坐标表示式(3)：

$$a_1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ a_2=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ a_3=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma \tag{9}$$

3. 向量的投影

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{ON}$，$\boldsymbol{b}\neq 0$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间的夹角 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\varphi$，过 M 点作平面垂直于 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线并交该直线于点 M'（图6－17），则称有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 易知

$$\overrightarrow{OM'}=(|\overrightarrow{OM}|\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_b=(|\boldsymbol{a}|\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_b$$

称上式中的 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，并记作 $Prj_b\boldsymbol{a}$.

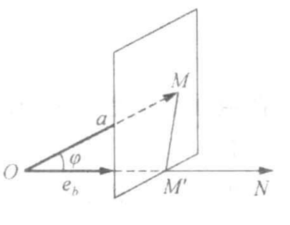

图6－17

如果向量 $\boldsymbol{b}$ 位于数轴 Ou 上（Ou 的正向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同）则称此投影为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 Ou 轴上的投影，并记作 $Prj_u\boldsymbol{a}$.

按此定义并与(9)式比较，可知向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影所组成的有序数组：

$$a_1=Prj_x\boldsymbol{a},\ a_2=Prj_y\boldsymbol{a},\ a_3=Prj_z\boldsymbol{a}.$$

【例7】 (1) 设 $A(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$，$B(1,\frac{\sqrt{2}}{2},3)$ 是空间两点，向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，计算向量 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向角；

(2) 设一运动物体的速度 v 的大小为5，方向指向 xOy 面的上方，并与 x 轴、y 轴的正向的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，试写出 v 的坐标表示式.

解： （1）由于 $\boldsymbol{a}=(1,\frac{\sqrt{2}}{2},3)-(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},1)=(1,\sqrt{2},2)$，由(6)、(7)两式可得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+2+4}=\sqrt{7},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7},\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

即方向角为 $$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{7}}{7},\beta=\arccos\frac{\sqrt{14}}{7},\gamma=\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

（2）已知 $|\boldsymbol{v}|=5$，$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，由关系式(8)可得 $\cos^2\gamma=\frac{1}{4}$.

由于 $\boldsymbol{v}$ 指向 xOy 面的上方，故 $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$，从而 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

于是由(9)式得

$$v_1=5\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2},v_2=5\times\cos\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2},v_3=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

即 $$\boldsymbol{v}=(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2}).$$

习题6－1

1. 在空间直角坐标系中，各卦限中的点有什么特征？指出下列各点所在卦限.
   $A(1,-2,3)$　$B(3,-2,-4)$　$C(-1,-2,-3)$　$D(-3,2,-1)$
2. 在坐标面上和坐标轴上的点各有什么特征？指出下列各点的位置.
   $P(0,2,5)$　$Q(5,2,0)$　$R(8,0,0)$　$S(0,2,0)$
3. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标轴；(2)各坐标面；(3)坐标原点的对称点的坐标.
4. 设 A、B、C 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.
5. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边的一半.
6. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 作各坐标面和坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标，进而求出点 P_0 到各坐标面和坐标轴的距离.
7. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 坐标面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特征？
8. 已知点 $A(2,1,4)$、$B(4,3,10)$，写出以线段 AB 为直径的球面方程.
9. 设长方体的各棱与坐标轴平行，已知长方体的两个顶点的坐标，试写出其余六个顶点的坐标：
   (1) $(1,1,2),(3,4,5)$；　(2) $(4,3,0),(1,6,-4)$.
10. 证明：三点 $A(1,0,-1)$、$B(3,4,5)$、$C(0,-2,-4)$ 共线.