



◎兼容各版本教材 适合所有考生◎

总主编 / 薛金星

中学教材全解[®]

ZHONGXUE JIAOCAI
QUANJIE

高考总复习全解·数学

传授学习方法 点拨复习策略
总结解题规律 指点应试技巧
瞄准考纲题型 讲练考点知识



全心全意 解疑解难

陕西出版集团 陕西人民教育出版社

◎兼容各版本教材 适合所有考生◎

中学教材全解

高考总复习全解·数学

传授学习方法 点拨复习策略
总结解题规律 指点应试技巧
瞄准考纲题型 讲解考点知识

藏书

NLIC

薛金星

本册主编 马 壮

副主编 赵培昌

编 委 李宏伟

梅

军

洪奎

张代明

尹存庆

刘 立 赵延俊

杨奎俊 王晓丽

卢国锋 程祥学

于建飞 田宝芬

张美阳 盛美英

田耀斌 王世亮

王春阳 李少华

刘太旺 胡 平



NLIC2970663073

陕西出版集团 陕西人民教育出版社



诚邀全国名师加盟

金星国际教育集团专注于少儿、小学、中学和大学教育类图书的研发策划与出版发行工作,现诚邀天下名师加盟“全国名师俱乐部”:每县拟选老师1人,俱乐部会员将成为本公司长期签约作者,享受优惠稿酬,并获长期购书优惠、赠书和及时提供各类教学科研信息等优惠服务。联系地址:山东省潍坊市安顺路4399号金星大厦邮政信箱:山东省潍坊市019755号信箱 邮编:261021

恳请各位名师对我们研发、出版的图书提出各类修订建议,并提供相应的文字材料。我们将根据建议采用情况及时支付给您丰厚报酬。

诚邀各位名师在教学过程中发现的好题、好方法、好教案、好学案等教学与考试研究成果,一旦采用,即付稿酬。

诚邀各位名师对我们的产品质量及营销建言献策。我们将根据贡献大小,分别给予不同形式的奖励。同时,我们也真诚欢迎广大一线师生来信、来函、来电、上网与我们交流沟通,为确保信息畅通,我们特设以下几个交流平台,供您选用:

图书邮购热线:(010)61743009 61767818

图书邮购地址:北京市天通苑邮局 6503 信箱 邮购部(收) 邮政编码:102218

第一教育书店:<http://www.firstedubook.com>

<http://www.第一教育书店.中国>

第一教育书店一淘宝店:<http://shop58402493.taobao.com>

电子邮箱:book@jxedue.net

质量监督热线:(0536)2223237 王老师

集团网站:<http://www.jxedue.net>

<http://www.金星教育.中国>

金星教育考试网:<http://www.jxjks.com>

图书在版编目(CIP)数据

教材全解·高考总复习全解·数学 / 薛金星主编
—11版. —西安:陕西人民教育出版社, 2010.3
ISBN 978-7-5419-9146-2

I. ①教... II. ①薛... III. ①数学课—高中—升学参
考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 042843 号

中学教材全解·高考总复习全解·数学

陕西出版集团
陕西人民教育出版社

(陕西省西安市丈八五路 58 号)

各地书店经销 北京泽宇印刷有限公司

720×1000 毫米 16 开本 33.5 印张 960 千字

2010 年 3 月第 11 版 2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5419-9146-2

定价:55.80 元



全心全意 助您复习

——《中学教材全解·高考总复习全解》特色亮点

《中学教材全解·高考总复习全解》丛书是由金星国际教育集团特邀一线特高级教师、教研员、教育考试专家编写的。它不分版本、不分地区、不跟教材，适合所有考生复习使用。其编写原则是：以全国考纲为依据，按考点分专题讲解相关知识，点拨解题方法，总结学习规律，指导高考复习。其特点如下：

考点讲解全面透彻 考点是高考复习的重点，本丛书依据考纲，科学划分大小考点，每个考点都配设典型例题进行详细透彻的讲解，例题后面总结解题规律和方法，有的还配有变式练习，巩固该考点知识和解题能力。

考题归纳类型完备 考题是高考的呈现形式，全面明确考题类型，才能全方位复习，提高各种解题能力。本丛书依据各科高考方案，全面归纳考题类型，结合例题进行讲解，帮助学生提高该类题型的解题能力。

规律方法技巧全面 掌握一种方法，比解100道题更重要，因此，要重视解题规律和方法技巧的总结。本丛书以考点为线索，以考题为例证，巩固知识，总结规律，点拨方法技巧，培养解题能力，增强应试备考的实效性。打开该书目录，您就能看到“方法·技巧·策略”，就能找到与考点有关的各种学习方法、复习策略、解题方法和应试技巧。

备考资料丰富翔实 本丛书根据高考对知识和能力的要求，围绕每一个考点以“附录”的形式配备了大量的复习备考资料。这些附录资料，有的是各科专家教师的多年经验积累，有的是从报纸杂志上精选的好方法，有的是借鉴其他教辅图书的好资料。

学法考法实用对路 采用恰当方法复习知识、熟练技能，寻觅科学对策调整心态、应对考试，是提高高考成绩的根本途径。本丛书结合学科实际，提供各种有效的复习策略和方法，并根据历年高考的经验教训，强调临场注意事项，传授考场应试技巧，帮助考生调整应试心态，以最佳状态参加高考。

总之，这是一套“系统复习考点知识，恰当点拨解题方法，全面总结学习规律，有效提升应试能力”的高考备考工具书。它集学习方法、复习策略、解题规律、应试技巧于一身，力求实现“一册在手，知识规律全有；一旦拥有，高考复习无忧”。

目 录

CONTENTS

第一篇 高考命题点全解篇

第一单元 常用逻辑用语 (1)

第1讲 集合与集合的运算 (1)

要点知识:1.集合的有关概念及表示方法(1)/2.集合与集合之间的关系(2)/3.集合的交、并、补集的运算(2)

规律·技巧·策略

1.处理集合问题的常用方法(4)/2.Venn图的应用(6)

第2讲 常用逻辑用语 (7)

要点知识:1.逻辑联结词(7)/2.命题的否定(8)/3.四种命题(8)/4.充分条件与必要条件(8)

规律·技巧·策略

1.判定命题的真假(9)/2.命题的否定与否命题(9)/3.四种命题之间的关系(10)/4.充要条件的判定(10)

第二单元 导数 (14)

第1讲 函数的概念 (14)

要点知识:1.函数的概念(14)/2.函数的三要素(14)/3.函数的表示方法(14)/4.映射的概念(14)/5.象与原象(14)/6.两个函数能成为同一函数的条件(14)/7.区间和无穷大(14)/8.分段函数、复合函数(15)

规律·技巧·策略

1.函数的表示方法(16)/2.求函数值域的方法(17)/3.求函数解析式的方法(18)

第2讲 函数的性质 (21)

要点知识:1.奇偶性(22)/2.周期性(22)/3.单调性(22)

规律·技巧·策略

1.函数单调性的判定(23)/2.函数的奇偶性(24)/3.函数的周期性(25)/4.求二次函数最值的几种形式(27)

第3讲 指数函数、对数函数及幂函数

(29)

要点知识:1.指数(30)/2.对数(30)/3.指数函数(30)/4.对数函数(30)

规律·技巧·策略

1.指数函数的图象及性质(32)/2.对数函数的图象及性质(33)

第4讲 函数的图象 (36)

要点知识:1.利用描点法作图(36)/2.函数图象的几种变换(36)/3.函数图象的对称(37)/4.函数的周期性(37)/5.图象对称性的证明(37)

规律·技巧·策略

1.函数图象的变换(37)/2.数形结合问题(39)/3.函数图象题的求解策略(39)

第5讲 函数与方程 (41)

要点知识:1.一元二次函数的定义(41)/2.二次函数的三种表示形式(41)/3.二次函数的图象和性质(41)/4.函数的零点(41)/5.二次函数的零点(41)/6.二分法(41)

规律·技巧·策略

1.函数、方程、不等式的关系(42)/2.根的分布(42)/3.方程在给定闭区间上是否有实数解的判断方法(43)/4.函数零点个数的确定方法(43)/5.函数的零点的判定及求解(44)/6.用二分法求函数的零点(44)/7.函数零点的判定(44)

第6讲 导数、微积分及其应用 (48)

要点知识:1.导数(48)/2.积分(49)

规律·技巧·策略

1.利用导数求函数的单调区间(51)/2.利用导数求函数的极值(51)/3.利用导数求函数的最值(52)/4.利用导数证明不等式问题(52)/5.利用导数解决有关单调性问题(52)/6.利用微积分基本定理求定积分(54)/7.导数的交汇性(55)

第三单元 不等式 (57)

第1讲 不等式的性质 (57)

要点知识:1.不等式的有关概念(57)/2.实数的特征与实数比较大小(57)

规律·技巧·策略

抽象函数不等式的解法(60)

第2讲 不等式的解法 (62)

要点知识:1.一元一次不等式的解法(62)/2.一元二次不等式的解法(62)/3.分式不等式的解法(62)/4.无理不等式的解法(63)/5.简单的一元高次不等式的解法(63)/6.绝对值不等式的解法(63)/7.指数不等式和代数不等式的解法(63)/8.含参数的不等式的解法(63)

规律·技巧·策略

1.一元一次不等式的解法(64)/2.一元二次不等式的解法(64)/3.含参数的一元二次不等式的解法(65)/4.分式不等式的解法(66)/5.无理不等式的解法(67)/6.高次不等式的解法(67)/7.含有绝对值的不等式的解法(68)/8.一元二次不等式恒成立问题(68)

第3讲 基本不等式 (70)

要点知识:1.两个重要不等式(70)/2.几个重要的不等式(70)/3.两个重要结论(70)/4.其他重要不等式及结论(70)/5.不等式证明常用方法(71)

规律·技巧·策略

1.利用基本不等式求最值(72)/2.利用基本不等式证明有关不等式(72)/3.比较法在证明不等式中的应用(73)/4.综合法在证明不等式中的应用(73)/5.分析法在证明不等式中的应用(74)/6.用反证法证明不等式(74)/7.用放缩法证明不等式(75)/8.利用函数的性质证明不等式(75)/9.柯西不等式的应用(76)/10.用基本不等式证明无理不等式和分式不等式(76)

第4讲 简单的线性规划 (77)

要点知识:1.二元一次不等式表示的平面区域(78)/2.简单的线性规划(78)/3.线性规划的实际应用(78)

规律·技巧·策略

1.最优解有两种确定方法(78)/2.利用图解法解决线性规划问题的一般步骤(78)/3.利用线性规划求最大值、最小值(79)

第5讲 不等式的综合应用 (82)

要点知识:1.不等式应用题的特点(83)/2.解答不等式的实际应用问题,一般可分为四步(83)

规律·技巧·策略

1.利用不等式求函数的值域(83)/2.含参不等式的两种解法(88)

第四单元 三角函数 (90)

第1讲 三角函数的概念、同角三角函数的关系和诱导公式 (90)

要点知识:1.角的概念的推广(90)/2.弧度(90)/3.三角函数的定义(91)/4.同角三角函数的基本关系式(91)/5.诱导公式(91)

规律·技巧·策略

1.角所在象限的判定(92)/2.三角函数值的符号的判定(94)/3.三角函数线的应用(94)/4.利用同角三角函数关系式进行化简与求值(95)/5.诱导公式的应用问题(96)/6.证明三角恒等式(96)

第2讲 三角函数的图象和性质 (99)

要点知识:1.用“五点法”作正、余弦函数的图象(99)/2.函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 图象与函数 $y=\sin x$ 图象的关系(99)/3.对称问题(100)/4.三角函数的性质(100)

规律·技巧·策略

1.“五点法”作三角函数图象(103)/2.函数图角的变换(104)/3.由函数图象求解析式(105)/4.三角函数的奇偶性(107)/5.图象平移(109)/6.图象定位(110)

第3讲 三角恒等变换 (111)

要点知识:1.两角和与差的三角函数公式(112)/2.二倍角公式(112)/3.注意“1”的妙用(112)/4.三角恒等式的证明方法(112)

规律·技巧·策略

1.三角函数式的求值问题(113)/2.三角函数的给值求值问题(114)/3.三角函数的给值求角问题(115)/4.三角函数式的化简问题(116)/5.三角变换要善于“三看”(117)

第4讲 解三角形 (120)

要点知识:1.正弦定理(120)/2.余弦定理(120)/3.三角形常用面积公式(120)

规律·技巧·策略

1.正弦定理的简单应用(122)/2.余弦定理的简单应用(123)/3.判断三角形解的情况(123)/4.三角形形状的判定(123)/5.三角形的面积问题(124)/6.正、余弦定理的综合应用(124)/7.解斜三角形之距离问题(125)/8.解斜三角形之角度问题(126)/9.解三角形之高度问题(126)

第五单元 数列 (128)

第1讲 数列的概念 (128)

要点知识:1.数列的定义(128)/2.数列的分类(128)/3.数列与数的关系(128)/4.数列的通项公式(128)/5.数列的递推公式(128)/6.数列的简单表示法(128)

► 规律·技巧·策略

1. 由数列前几项求数列的通项公式(129)/
2. 已知递推关系求通项(129)/3. 已知 S_n 求 a_n (130)/4. 归纳猜想求数列的通项(130)/
5. 利用数学归纳法求数列通项(131)/6. 判定数列的单调性(131)/7. 用不动点法求数列的通项(131)

第2讲 等差数列 (133)

- 要点知识:1. 等差数列的定义(134)/2. 等差数列的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$ (134)/
3. 等差数列的性质(134)

► 规律·技巧·策略

1. 等差数列的判定与证明(134)/2. 等差数列的基本运算(135)/3. 等差数列的前 n 项和(136)/4. 等差数列前 n 项和的最值问题(137)

第3讲 等比数列 (139)

- 要点知识:1. 等比数列的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$ (139)/2. 等比数列的前 n 项和公式(139)/3. 等比数列的单调性(139)/4. 等比数列的简单性质(140)

► 规律·技巧·策略

1. 等比数列的判断与证明(140)/2. 新定义数列(144)

第4讲 数列求和及综合应用 (145)

- 要点知识:1. 数列求和的常用方法(146)/
2. 数列的应用(146)

► 规律·技巧·策略

1. 公式法求和(147)/2. 分组求和法(147)/
3. 倒序相加法(147)/4. 裂项相消法求和(148)/5. 错位相减法(149)

第六单元 平面向量 (155)

第1讲 向量的线性运算 (155)

- 要点知识:1. 向量的概念(155)/2. 向量的表示(155)/3. 向量的加(减)法(155)/4. 数乘向量(155)/5. 共线向量基本定理(156)

► 规律·技巧·策略

1. 与向量线性运算有关的问题(157)/2. 共线向量定理的应用(157)/3. 共线问题(158)

第2讲 平面向量的分解与向量的坐标运算 (159)

- 要点知识:1. 平面向量基本定理(159)/2. 向量的正交分解(159)/3. 平面向量的坐标表示(159)/4. 平面向量的坐标运算(159)/5. 共线向量定理的坐标表示(159)/6. 向量的夹角(159)

► 规律·技巧·策略

1. 向量的坐标运算(160)/2. 平行(共线)向量的坐标运算(160)/3. 向量的垂直(161)

第3讲 两个向量的数量积 (162)

- 要点知识:1. 数量积的定义(163)/2. 数量积的几何意义(163)/3. 数量积的运算律(163)/
4. 数量积的坐标表示(163)/5. 向量数量积的性质(163)

► 规律·技巧·策略

1. 平面向量数量积的坐标运算(163)/2. 有关向量的数量积的运算(163)/3. 向量的夹角问题(164)/4. 向量模的问题(164)/5. 向量的垂直和平行(165)

第4讲 平面向量的应用 (166)

- 要点知识:1. 向量在几何中的应用(166)/
2. 向量在物理中的应用(167)

► 规律·技巧·策略

1. 用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”(167)/2. 向量在解析几何中的应用(167)/3. 向量在物理中的应用(167)/4. 平面向量与三角函数的综合应用(169)/5. 向量在线性规划中的应用(169)/6. 平面向量中的创新题型解析(170)

第七单元 立体几何 (173)

第1讲 空间几何体的结构特征及三视图和直观图 (173)

- 要点知识:1. 柱、锥、台、球的结构特征(173)/
2. 三视图与直观图(174)

► 规律·技巧·策略

1. 几何体的截面及作用(174)/2. 关于球的有关运算(175)/3. 三视图的应用(175)/
4. 截面问题(177)

第2讲 柱、锥、台、球的表面积与体积 (179)

- 要点知识:1. 多面体的表面积(179)/2. 几何体的体积公式(179)/3. 棱锥中平行于底面的截面的性质(180)/4. 几何体的展开图(180)/
5. 常用的几个思想方法(180)

► 规律·技巧·策略

1. 几何体的表面积问题(180)/2. 几何体的体积问题(181)/3. 组合体的表面积及体积问题(182)/4. 分割求和法(184)/5. 补形法(184)/6. 等积法(185)

第3讲 平面的基本性质与推论 (186)

- 要点知识:1. 公理1(186)/2. 公理2(187)/
3. 公理3(187)/4. 公理4(187)/5. 空间两直线的位置关系(187)

规律·技巧·策略

1. 平面的三个基本性质的符号语言及常见用途(187)/2. 多线共点问题(187)/3. 点线共面问题(188)/4. 折与展——平面和空间的相互转化(189)

第4讲 空间中的平行关系 (192)

要点知识: 空间中的平行(192)

规律·技巧·策略

1. 直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的转化关系(192)/2. 证明线面平行的方法(193)/3. 证明两个平面平行的方法(193)/4. 直线与平面平行(193)/5. 两个平面的平行问题(194)/6. 空间几何体的截面问题(195)

第5讲 空间中的垂直关系 (197)

要点知识: 1. 线面垂直(197)/2. 面面垂直(197)/3. 直线与平面所成的角(197)/4. 二面角(197)/5. 三垂线定理(197)/6. 最小角定理(197)

规律·技巧·策略

1. 平面和平面的垂直(199)/2. 垂直关系的综合问题(199)/3. 折叠问题(200)

第6讲 空间向量及其运算 (201)

要点知识: 1. 空间向量及其有关概念(201)/2. 空间向量的运算及运算律(202)/3. 空间向量基本定理(202)/4. 空间直角坐标系(202)/5. 向量的直角坐标运算(202)/6. 夹角和距离公式(202)

规律·技巧·策略

1. 向量的共线、共面问题(203)/2. 空间向量的坐标运算(204)/3. 平面的法向量(204)/4. 空间向量的应用——垂直关系(205)/5. 空间向量的应用——平行关系(205)

第7讲 空间角 (207)

要点知识: 1. 异面直线所成的角(208)/2. 直线和平面所成的角(208)/3. 平面和平面所成的角(208)

规律·技巧·策略

1. 求异面直线所成的角(209)/2. 线面角的求法(210)/3. 二面角的求法(211)

第8讲 空间距离 (214)

要点知识: 1. 异面直线的距离(214)/2. 点到平面的距离(214)/3. 用向量方法求点到面的距离(214)

规律·技巧·策略

1. 直线与平面的距离(215)/3. 面面距离(215)/4. 折叠与展开(217)

第八单元 解析几何 (219)

第1讲 直线的方程 (219)

要点知识: 1. 直线的倾斜角、斜率(219)/2. 直线方程(220)/3. 直线系方程(220)/4. 两直线的夹角(220)

规律·技巧·策略

1. 倾斜角问题(221)/2. 斜率问题(221)/3. 过一点的直线方程(221)/4. 直线与线段有交点问题(222)/5. 截距问题(222)

第2讲 两直线的位置关系 (224)

要点知识: 1. 两条直线的平行(225)/2. 两条直线的垂直(225)/3. 两条直线的交点(225)/4. 几种距离(226)/5. 对称问题(226)

规律·技巧·策略

1. 两直线平行问题(227)/2. 两直线的垂直问题(227)/3. 两直线位置关系的判定(228)/4. 距离问题(228)/5. 中点问题(229)/6. 直线关于点对称(229)/7. 直线关于直线对称(229)/8. 对称性问题(231)

第3讲 圆的方程 (232)

要点知识: 1. 圆的标准方程(232)/2. 圆的一般方程(232)/3. 点与圆的位置关系(233)/4. 确定圆的方程的方法(233)/5. 圆的参数方程(233)

规律·技巧·策略

1. 确定圆的方程的条件(233)/2. 确定圆的方程的方法和步骤(233)/3. 形如 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的方程表示圆的充要条件(233)/4. 圆的参数方程(235)/5. 利用圆的参数方程解决某些问题的方法(236)

第4讲 直线与圆、圆与圆的位置关系 (237)

要点知识: 1. 直线与圆的位置关系(237)/2. 圆与圆的位置关系(238)

规律·技巧·策略

1. 直线与圆的位置关系的判定(238)/2. 圆的切线(239)/3. 弦长问题(239)/4. 中点弦问题(240)/5. 圆与圆的位置关系(240)/6. 对称问题(240)/7. 两圆的公切线(241)

第5讲 椭圆 (243)

要点知识: 1. 椭圆的定义(243)/2. 椭圆的标准方程(243)/3. 椭圆的性质(244)/4. 点与椭圆的位置关系(244)

► 规律·技巧·策略

1. 椭圆的标准方程(244)/2. 椭圆的性质(245)/
3. 与焦半径有关的问题(246)/4. 离心率计算
问题(246)/5. 椭圆中的最值问题(247)

第6讲 双曲线 (249)

要点知识:1. 双曲线的定义(249)/2. 双曲线的
标准方程(249)/3. 双曲线的性质(250)/4. 点
与双曲线的位置关系(250)/5. 双曲线的参数方
程(250)/6. 双曲线的几何性质的应用(250)

► 规律·技巧·策略

1. 第一定义及应用(250)/2. 第二定义及应用
(251)/3. 求双曲线的标准方程(251) 4. 与焦点
有关的三角形问题(252)/5. 待定系数法(255)

第7讲 抛物线 (255)

要点知识:1. 抛物线的定义(256)/2. 抛物线的
标准方程(256)/3. 抛物线的几何性质(256)/
4. 抛物线的参数方程(257)/5. 抛物线中过焦点
的弦(257)/6. 与抛物线有关的结论(257)

► 规律·技巧·策略

1. 求抛物线的标准方程(258)/2. 焦点弦的
有关计算(259)/3. 定点问题(260)/4. 抛
物线的焦点弦问题(262)

第8讲 直线与圆锥曲线 (263)

要点知识:1. 直线与圆锥曲线的位置关系
(263)/2. 圆锥曲线的弦长问题(264)

► 规律·技巧·策略

1. 直线与椭圆的位置关系(264)/2. 直线与双
曲线的位置关系(265)/3. 直线与抛物线的位
置关系(265)/4. 圆锥曲线中的定点、定值问
题(266)/5. 取值范围问题(266)/6. 对称问
题(267)/7. 圆锥曲线上的点到直线的距离问
题(267)/8. 圆锥曲线中的定值和最值问题(268)

第9讲 曲线与方程 (269)

要点知识:1. 曲线与方程的概念(269)/2. 求
曲线的方程(270)/3. 求轨迹方程的常用方法
(270)/4. 由方程研究曲线的性质(271)

► 规律·技巧·策略

1. 判断曲线与方程的关系(271)/2. 求曲线
的方程(271)/3. 求轨迹方程的方法(274)

第九单元 计数原理与二项式定理 ... (276)

第1讲 基本计数原理 (276)

要点知识:1. 分类加法计数原理(276)/2. 分
步乘法计数原理(277)/3. 分类加法计数原理
与分步乘法计数原理的关系(277)

► 规律·技巧·策略

1. 分类计数原理的应用(278)/2. 分步计数
原理的应用(278)/3. 两个原理的综合应用
(278)/4. 染色问题(279)/5. 数形结合法与
两个计数原理(279)

第2讲 排列与组合 (280)

要点知识:1. 排列(281)/2. 排列数(281)/
3. 排列的应用(281)/4. 组合(281)/5. 组合数
与组合数公式(282)

► 规律·技巧·策略

1. 解答组合应用题的基本思路(282)/2. 常见
的解题策略(282)/3. 排列与组合的判定
(282)/4. 排列组合中的数学思想及常用方
法(286)

第3讲 二项式定理 (288)

要点知识:1. 二项式定理(288)/2. 二项展开式
的通项公式(288)/3. 二项式系数的性质(289)

► 规律·技巧·策略

1. 二项式的展开(289)/2. 求指定项(290)/
3. 赋值法(291)/4. 整除和近似解问题(291)/
5. 多项式的展开式问题(292)/6. 二项式定
理的灵活运用(293)

第十单元 概率与统计 (294)

第1讲 随机事件及其概率 (294)

要点知识:1. 随机事件(294)/2. 基本事件空
间(294)/3. 频率与概率(295)/4. 事件的关系
与运算(295)/5. 概率的基本性质(295)

► 规律·技巧·策略

1. 事件与基本事件空间(296)/2. 互斥事件、对
立事件及其概率(296)/3. 频率与概率(297)

第2讲 古典概型与几何概型 (299)

要点知识:1. 古典概型(299)/2. 几何概型(300)

► 规律·技巧·策略

1. 古典概型的概念辨析(300)/2. 求古典概
型的概率(301)/3. 与长度有关的几何概型
(301)/4. 与角度有关的几何概型(301)/
5. 与面积(或体积)有关的几何概型(301)/
6. 概率的一般加法公式(302)/7. 求解古典
概型的有关方法(302)

第3讲 条件概率与事件的独立性 (304)

要点知识:1. 条件概率(304)/2. 相互独立事
件同时发生的概率(304)/3. 独立重复试验与
二项分布(304)

规律·技巧·策略

1. 条件概率(305)/2. 事件的相互独立性(305)/3. 独立重复试验与二项分布(306)

第4讲 离散型随机变量及其分布列…… (309)

要点知识:1. 离散型随机变量(309)/2. 离散型随机变量的分布列(309)

规律·技巧·策略

1. 超几何分布(311)/2. 二项分布(311)

第5讲 离散型随机变量的期望与方差…… (313)

要点知识:1. 离散型随机变量的均值(313)/2. 离散型随机变量的方差(314)

规律·技巧·策略

1. 由分布列求期望、方差(315)/2. 求随机变量的期望(315)/3. 由特殊分布求期望与方差(316)/4. 利用期望与方差的性质求期望与方差(316)/5. 完善三个步骤,做好解答题(317)

第6讲 正态分布…… (318)

要点知识:1. 正态曲线(318)/2. 正态分布(318)/3. 正态曲线的性质(319)/4. 3σ 原则(319)

规律·技巧·策略

1. 正态曲线的性质(319)/2. 正态分布密度函数及其性质(320)/3. 正态分布的应用(320)

第7讲 随机抽样…… (321)

要点知识:1. 随机抽样(321)/2. 简单随机抽样(321)/3. 系统抽样(321)/4. 分层抽样(321)/5. 三种抽样方法的比较(322)/6. 数据的收集(322)

规律·技巧·策略

1. 简单随机抽样(322)/2. 系统抽样(322)/3. 分层抽样(323)/4. 三种抽样方法的比较(323)

第8讲 用样本估计总体…… (324)

要点知识:1. 频率分布表和频率分布直方图(324)/2. 总体密度曲线(325)/3. 众数、中位数、平均数(325)/4. 茎叶图(325)/5. 方差与标准差(326)

规律·技巧·策略

1. 根据样本数据绘制统计图表(326)/2. 用样本分布估计总体分布(327)/3. 茎叶图(327)/4. 样本平均数、标准差对总体平均数、标准差的估计(328)

第9讲 统计案例…… (331)

要点知识:1. 独立性检验(331)/2. 回归分析(331)

规律·技巧·策略

1. 独立性检验(333)/2. 相关系数与相关性检验(334)

第十一单元 推理与证明…… (336)

第1讲 推理与证明…… (336)

要点知识:1. 合情推理的基本概念(336)/2. 演绎推理的基本概念(336)/3. 直接证明的有关概念(336)/4. 间接证明的有关概念(336)/5. 数学归纳法(336)

规律·技巧·策略

1. 归纳推理及其应用(337)/2. 类比推理及其应用(337)/3. 演绎推理(338)/4. 利用综合法证明有关问题(338)/5. 反证法及其应用(339)/6. 低维与高维类比(343)/7. 曲与直类比(344)/8. 联想特征类比(344)

第十二单元 算法与复数…… (345)

第1讲 算法初步…… (345)

要点知识:1. 程序框图(345)/2. 基本算法语句(以人教实验B版为例)(346)

规律·技巧·策略

1. 算法的设计(347)/2. 更相减损术与辗转相除法(351)/3. 秦九韶算法的应用(352)/4. 工序流程图(352)

第2讲 数系的扩充和复数的引入…… (354)

要点知识:1. 复数的概念(355)/2. 复数相等(355)/3. 共轭复数(355)/4. 复数 $z = a + bi$ 的模(355)/5. 复数的四则运算(355) 6. 复数加减法的几何意义(355)

规律·技巧·策略

1. 复数的模的运算性质(355)/2. 复数常用的运算技巧(355)/3. 复数概念的运用(356)/4. 复数的巧解妙算(357)

第二篇 专题知识全解篇

专题一 集合与常用逻辑用语…… (359)

综合知识:1. 集合与不等式的交汇(359)/2. 集合与解析几何的交汇(359)/3. 集合与函数的交汇(360)/4. 借助集合中元素的特性考查抽象概括能力(360)/5. 利用信息迁移考查创新意识 and 实践能力(360)/6. 有关充要条件的综合问题(360)/7. 有关逻辑联结词的综合问题(360)

► 规律·技巧·策略

1. 元素与集合的关系(362)/2. 集合与集合间的关系(363)/3. 集合的运算(363)/4. 判断命题的真假(363)

专题二 函数、导数及其应用 (366)

综合知识:1. 函数解析式、定义域、值域间的交汇(366)/2. 函数的奇偶性、对称性、最值等问题的交汇(366)/3. 定义域、单调性、导数知识的交汇(367)/4. 函数奇偶性、周期性、零点等知识的交汇(367)/5. 函数解析式、图象间的关系问题(367)/6. 抽象函数单调性与奇偶性的交汇(368)/7. 函数与数列、不等式的交汇(368)/8. 函数的综合问题(368)/9. 以几何为背景,考查函数性质及导数应用(368)

► 规律·技巧·策略

1. 奇偶性的灵活运用(372)/2. 周期性的运用(373)/3. 有关二次函数、指数函数、对数函数的问题(373)/4. 互为反函数的问题(373)/5. 与函数有关的恒成立问题(375)/6. 导数的应用(376)

专题三 不等式及其应用 (378)

综合知识:1. 换元法在解不等式中的应用(378)/2. 不等式与集合的交汇(378)/3. 不等式与函数的交汇(379)/4. 不等式与方程的交汇(379)/5. 不等式与数列问题的交汇(379)/6. 不等式与三角函数的交汇(379)/7. 不等式与解析几何的交汇(379)/8. 有关含有绝对值不等式的综合问题(379)

► 规律·技巧·策略

1. 有关解不等式的综合问题(382)/2. 利用不等式性质比较大小问题(382)/3. 有关基本不等式的综合问题(382)/4. 有关线性规划的综合问题(382)/5. 有关含有绝对值的不等式问题(383)/6. 指数、对数不等式问题(383)/7. 函数与不等式的综合问题(383)/8. 数列、不等式的综合问题(384)

专题四 三角函数 (386)

综合知识:1. 三角函数基本公式的综合应用(387)/2. 关于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象(387)/3. 三角函数的性质(388)/4. 判断三角形的构成(388)/5. 解三角形(388)/6. 三角函数与不等式的交汇(389)/7. 三角函数与函数知识的交汇(389)/8. 三角函数与向量知识的综合应用(390)/9. 三角函数与解析几何的交汇(390)

► 规律·技巧·策略

1. 已知三角函数求值(391)/2. 三角函数图象及其变换(392)/3. 三角函数图象与解析式(393)/4. 三角函数图象的对称性(394)/5. 三角函数与解三角形(395)/6. 向量与解三角形(396)/7. 由图象确定“ φ ”值的方法探究(397)

专题五 数列 (399)

综合知识:1. 数列各知识点间的交汇(399)/2. 数列与其他知识点的交汇(400)

► 规律·技巧·策略

1. 等差、等比数列的综合问题(406)/2. 数列与函数、方程的综合应用(406)/3. 数列与不等式的综合应用(407)/4. 数列与解析几何的综合应用(408)/5. 数列的实际应用(409)/6. 求数表所具有的规律(即通项公式)(410)/7. 求数表中指定的某些项(410)/8. 求数表中指定项的和(410)/9. 构造数表探求通项(411)

专题六 平面向量 (411)

综合知识:1. 平面向量的基本概念和运算(411)/2. 向量的坐标运算(412)/3. 向量运算的几何意义(412)/4. 向量与三角函数的结合(412)/5. 向量与解三角形的结合(412)/6. 向量与解三角不等式的结合(413)/7. 平面向量与解析几何的结合(413)

► 规律·技巧·策略

1. 平面向量的线性运算(415)/2. 平面向量的数量积(415)/3. 平面向量的坐标运算(415)/4. 平面向量的数量积的坐标表示(416)/5. 平面向量与解析几何的综合(416)/6. 平面向量与三角函数的综合(416)/7. 三角形“心”的向量表示(417)

专题七 立体几何 (418)

综合知识:1. 三视图(418)/2. 面积与体积(418)/3. 点、线、面的位置关系(419)/4. 空间角和距离的传统求法(419)

► 规律·技巧·策略

1. 几何体的表面积和体积(423)/2. 三视图(423)/3. 球(424)/4. 利用空间向量证明空间位置关系(426)/5. 利用空间向量求空间角(427)/6. 空间轨迹问题的求解策略(429)

专题八 直线与圆 (431)

综合知识:1. 直线与三角函数的交汇(431)/2. 圆与向量的交汇(432)/3. 圆与数列的交汇(432)

规律·技巧·策略

1. 直线与坐标轴所成三角形问题(434)/
2. 存在性问题(435)/
3. 轨迹问题(436)/
4. 对称问题(437)/
5. 直线过定点问题(438)/
6. 圆的综合应用(439)

专题九 圆锥曲线 (439)

综合知识:1. 圆锥曲线与函数的交汇(440)/
2. 圆锥曲线与向量的交汇(440)/3. 圆锥曲线与三角函数的交汇(441)/4. 圆锥曲线与不等式的交汇(441)/5. 圆锥曲线内部知识的交汇(441)

规律·技巧·策略

1. 曲线两种定义的灵活运用(446)/
2. 设而不求的整体化处理(446)/
3. 代点相消法(446)/
4. 巧用根与系数的关系(447)/
5. 运用平面几何性质(447)/
6. 运用曲线方程(447)/
7. 巧用对称,化繁为简(447)/
8. 建立适当的坐标系(447)/
9. 常数代换,化成齐次方程(448)

专题十 排列、组合、二项式定理 ... (448)

综合知识:1. 组合数与函数交汇(448)/2. 计数原理与数列交汇(449)

规律·技巧·策略

1. 合理分类 准确分步(449)/
2. 特殊优先 一般在后(449)/
3. 直接排除 灵活选择(449)/
4. 集团捆绑 间隔插空(450)/
5. 复杂问题 构造模型(450)/
6. 与组合有关的证明(451)

专题十一 概率、分布列、统计 (452)

综合知识:1. 概率与线性规划的交汇(452)/
2. 概率与数列的交汇(453)

规律·技巧·策略

1. 求随机变量的分布与数学期望(456)/
2. 抽样方法(457)/
3. 条件概率(457)/
4. 线性回归问题(458)/
5. 统计中的题型与求解策略(458)

第三篇 数学思想方法篇

- | | | |
|-----|--------------|-------|
| 第1节 | 函数与方程思想..... | (460) |
| 第2节 | 数形结合思想..... | (464) |
| 第3节 | 分类讨论思想..... | (467) |
| 第4节 | 转化与化归思想..... | (471) |
| 第5节 | 数学基本方法..... | (475) |

第四篇 数学能力全解篇

- | | | |
|-----|-------------|-------|
| 第1节 | 运算求解能力..... | (479) |
| 第2节 | 推理论证能力..... | (482) |
| 第3节 | 空间想象能力..... | (486) |
| 第4节 | 应用意识..... | (488) |

第五篇 考纲内容解读篇

- | | | |
|----|-----------|-------|
| 一、 | 考试要求..... | (492) |
| 二、 | 能力体现..... | (492) |

第六篇 命题趋势透析篇

- | | | |
|----|-------------------------|-------|
| 一、 | 新课程高考数学卷的整体印象..... | (493) |
| 二、 | 新课程高考数学卷折射出的新课标的变化..... | (493) |
| 三、 | 新课程高考数学复习建议..... | (495) |

第七篇 复习策略指导篇

- | | | |
|----|-------------|-------|
| 一、 | 复习备考方案..... | (498) |
| 二、 | 复习备考策略..... | (498) |

第八篇 应试方法技巧篇

- | | | |
|----|-------------------|-------|
| 一、 | 知识、方法方面的应试技巧..... | (500) |
| 二、 | 生活、心理方面的应试技巧..... | (505) |

第一篇 高考命题点全解篇

第一单元 常用逻辑用语

第1讲 集合与集合的运算

考纲权威解读

KAOGANGQUANWEIJIEDU

考
纲
解
读

1. 集合的概念与表示

(1)了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系；
(2)能用列举法、描述法和 Venn 图法表示集合及集合间的关系。

2. 集合间的基本关系

(1)理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集、真子集；(2)了解全集与空集的含义。

3. 集合的基本运算

(1)理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个集合的并集与交集；(2)理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集

考
向
指
南

1. 本讲以集合及其运算为载体考查函数、不等式、三角函数、方程、数列、曲线及轨迹等有关知识。

2. 重点考查集合的交、并、补等运算，同时也考查集合的特性及集合与元素之间的关系，特别要注意 Venn 图、数轴在求交、并、补集中的直观作用。

3. 本讲在高考中常以选择题、填空题的形式出现，有时也会出现与其他章节知识综合的解答题

知识网络清单

ZHISHIWANGLUOQINGDAN

集
合

集
合
的
概
念

元素的性质：确定性，无序性，互异性

集合的表示方法：列举法，描述法，图示法

空集的性质 $\left\{ \begin{array}{l} \text{空集是任何集合的子集} \\ \text{空集是任何非空集合的真子集} \end{array} \right.$

集合的分类：无限集，有限集

特殊集合的表示 $\left\{ \begin{array}{l} \text{复数集 } \mathbf{C} \\ \text{实数集 } \mathbf{R} \\ \text{整数集 } \mathbf{Z} \\ \text{有理数集 } \mathbf{Q} \\ \text{自然数集 } \mathbf{N} \\ \text{正整数集 } \mathbf{N}^+ \text{ 或 } \mathbf{N}_+ \end{array} \right.$

集
合

集
合
与
元
素
、
集
合
的
关
系

集合与元素的关系 $\left\{ \begin{array}{l} \text{如果 } a \text{ 是集合 } A \text{ 的元素, 可表示} \\ \text{为 } a \in A \\ \text{如果 } a \text{ 不是集合 } A \text{ 的元素, 可表示} \\ \text{为 } a \notin A \end{array} \right.$

集合与集合的关系 $\left\{ \begin{array}{l} \text{若集合 } A \text{ 是集合 } B \text{ 的子集, 则可表} \\ \text{示为 } A \subseteq B \\ \text{若集合 } A \text{ 是集合 } B \text{ 的真子集,} \\ \text{则可表示为 } A \subsetneq B \end{array} \right.$

集合相等 $\left\{ \begin{array}{l} \text{定义: 如果两个集合中的元素完全相同,} \\ \text{则两集合相等} \\ \text{表示方法: 集合 } A \text{ 与集合 } B \text{ 相等,} \\ \text{可表示为 } A = B \\ \text{如果集合 } A \text{ 与集合 } B \text{ 满足 } A \subseteq B \text{ 且} \\ B \subseteq A, \text{ 则 } A \text{ 与 } B \text{ 相等} \end{array} \right.$

运算关系 $\left\{ \begin{array}{l} \text{集合 } A \text{ 和集合 } B \text{ 的交集可表示为 } A \cap B \\ \text{集合 } A \text{ 和集合 } B \text{ 的并集可表示为 } A \cup B \\ \text{若 } U \text{ 为全集, 集合 } A \text{ 的补集可表示为 } \complement_U A \end{array} \right.$

重、难考点突破

ZHONG、NANKAODIANTUPO

要点知识解读

一、集合的有关概念及表示方法

1. 集合的概念

把一些能够确定的不同的对象看成一个整体, 就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合。

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象之外, 还可以是其他任何对象。

2. 集合中元素的性质

集合中的元素具有确定性、互异性和无序性。

(1)任何一个对象都能确定它是不是某一集合的元素, 这是集合的最基本特征。

(2)集合中的任何两个元素都是不同的对象, 即在同一集合里不能重复出现相同元素。

(3)在同一集合里, 通常不考虑元素之间的顺序。

表示元素和集合之间的关系, 有属于“ \in ”和不属于“ \notin ”两种情形。

3. 集合的表示

表示集合有三种方法, 分别是列举法、描述法和 Venn 图法。一般地, 表示有限集合常用列举法; 表示无限集合常用描述法; 描述抽象集合常用

Venn 图法. 正确认识一个集合的关键是理解集合中的元素特征.

二、集合与集合之间的关系

1. 表示集合与集合之间的关系

(1) 包含关系:

子集: 如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 显然 $A \subseteq A, \emptyset \subseteq A$.

(2) 相等关系: 如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素, 反过来, 集合 B 中的每一个元素也都是集合 A 中的元素, 那么就设集合 A 等于集合 B , 记作 $A = B$.

对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$.

(3) 真子集关系: 对于两个集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$. 显然有下面的结论:

① 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$;

② 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

(4) 不包含关系: 用“ $\not\subseteq$ ”表示.

2. 空集

不含任何元素的集合叫做空集, 记作 \emptyset .

空集是任何一个集合的子集, 是任何一个非空集合的真子集.

3. 有限集的子集、真子集的个数

关于有限集的子集个数有下列结论: 若有限集 A 中有 n 个元素, 则 A 的子集个数为 2^n , 即 $C_0^n + C_1^n + \dots + C_n^n = 2^n$, 非空子集的个数为 $(2^n - 1)$; 真子集的个数为 $(2^n - 1)$; 非空真子集的个数为 $(2^n - 2)$.

三、集合的交、并、补集的运算

1. 交集

(1) 定义: 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B, A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(2) 性质: $A \cap A = A; A \cap B = B \cap A$ (交换律); $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B$;

若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$.

2. 并集

(1) 定义: 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B, A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(2) 性质: $A \cup A = A; A \cup B = B \cup A$ (交换律); $A \cup \emptyset = A; A \subseteq (A \cup B); B \subseteq (A \cup B)$;

若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.

3. 补集

(1) 定义: 在研究某一集合问题的过程中, 所有集合都是一个给定集合的子集, 这个给定的集

合就称为全集, 记作 U . 设 $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在集合 U 中的补集, 记作 $\complement_U A$, 即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ (如图 1-1-1-1).

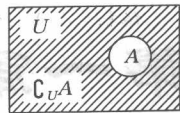


图 1-1-1-1

(2) 性质: $A \cup (\complement_U A) = U; A \cap (\complement_U A) = \emptyset$;

$\complement_U (\complement_U A) = A; \complement_U \emptyset = U; \complement_U U = \emptyset$.

4. 集合运算中常用的结论

(1) $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$,

$\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;

(2) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A; A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.



学法策略指导

XUEFA CELUE ZHIDAO

1. 在处理有关集合的问题时, 应先看集合中代表元素的特性. 首先确定集合中的元素是点集还是数集, 然后明确集合中的元素所满足的条件, 理解并正确掌握集合的相关术语及符号是解决集合问题的关键.

2. 在集合的运算中, 一般应把参与运算的各个集合先化为最简形式, 然后再进行运算.

3. 应当考虑空集的几种情况, 在 $A \subseteq B, A \subsetneq B, A \cap B = A$ 中, 都应当考虑到 $A = \emptyset$ 时的情况.

4. 对一些较为抽象的集合问题可利用 Venn 图求解.

5. 要注意表示集合的语言、文字、符号、图形的沟通与转化, 同时加强与其他章节的渗透, 在复习中要控制难度.



题型分类精讲

TXINGFENLEIJINGJIANG

题型一 元素与集合的关系

集合中的元素具有确定性、互异性和无序性. 特别是用互异性剔除不具备条件的解是解题过程中不可缺少的步骤.

例 1 设全集为 $\mathbf{R}, A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}, B = \{x | |x - 5| < a\}$ (a 是常数), 且 $11 \in B$, 则 ()

A. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \mathbf{R}$ B. $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$

C. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$ D. $A \cup B = \mathbf{R}$

解析 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 6\}$. $\therefore 11 \in B, \therefore$ 可知 B 不是空集, $\therefore a > 0, B = \{x | 5 - a < x < 5 + a\}$. \therefore 由 $|11 - 5| < a$ 知 $a > 6$, 因此, 有 $5 - a < -1, 5 + a > 6$. 于是 $A \cup B = \mathbf{R}$. **答案: D**

点拨 对于含字母的不等式问题, 首先应确定字母的范围, 若不能确定其范围的, 应根据情况对字母进行分类讨论.

例 2 集合 $A = \{0, 2, a\}, B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

解析 $\because A = \{0, 2, a\}, B = \{1, a^2\}, A \cup B =$

$$\{0, 1, 2, 4, 16\}, \therefore \begin{cases} a^2 = 16, \\ a = 4, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a^2 = 4, \\ a = 16 \end{cases} \text{ (舍去)}.$$

$\therefore a = 4$, 故选 D. 答案: D

点拨

本题综合考查了集合元素的互异性以及集合的并集运算, 并用观察法得到相对应的元素, 从而求得答案.

题型二 集合与集合之间的关系

认清集合的元素, 紧扣集合的定义, 主要有两类问题: 一是元素和集合之间的关系问题; 二是集合与集合之间的关系问题. 关键在于化简给定的集合, 确定集合中的元素, 正确认识集合中元素的属性. 然后根据集合的有关概念, 特别是集合中元素的三要素, 对于用描述法给出的集合 $\{x | x \in p(x)\}$, 要紧抓住竖线前面的代表元素 x 和它所具有的性质 p ; 重视发挥图示法, 特别是数轴表示法的作用, 通过数形结合直观地解决问题.

例 3 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

$N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则()

- A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$
C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

解析 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

$$= \left\{x \mid x = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$$

$$= \left\{x \mid x = \frac{k+2}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

$\because 2k+1$ 为奇数, 而 $k+2$ 为整数, $\therefore M \subsetneq N$, 故选 B. 答案: B

点拨

本题解法从分式的结构出发, 运用整数的性质方便地求解, 注意 k 是任意整数, 则 $k+m$ ($m \in \mathbf{Z}$) 也是任意整数.

例 4 设 $A = \{x | 2 \leq x \leq 6\}, B = \{x | 2a \leq x \leq a+3\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $[1, 3]$ B. $(3, +\infty)$
C. $[1, +\infty)$ D. $(1, 3)$

解析 (1) 当 $B \neq \emptyset$ 时, 有 $\begin{cases} 2a \geq 2, \\ a+3 \leq 6, \\ 2a \leq a+3, \end{cases}$

$$\therefore 1 \leq a \leq 3.$$

(2) 当 $B = \emptyset$ 时, 有 $2a > a+3$, $\therefore a > 3$.

综合(1)(2)得 $a \geq 1$. 答案: C

点拨

空集是一个特殊的集合, 是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集, 当题设中隐含有空集参与的集合关系时, 其特殊性不能忽视.

题型三 集合间的运算

例 5 设集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + (a^2 - 5) = 0\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \{2\}$, 求实数 a 的值;
(2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围;
(3) 若 $U = \mathbf{R}, A \cap (\complement_U B) = A$, 求实数 a 的取值范围.

分析 对于含参数的集合的运算, 首先解出不含参数的集合, 而后根据已知条件求参数.

解: 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = 2$, 故 $A = \{1, 2\}$.

(1) $\because A \cap B = \{2\}$, $\therefore 2 \in B$, 代入方程 $x^2 + 2(a+1)x + (a^2 - 5) = 0$ 得 $a^2 + 4a + 3 = 0$, $\therefore a = -1$ 或 $a = -3$.

当 $a = -1$ 时, $B = \{x | x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$, 满足条件;

当 $a = -3$ 时, $B = \{x | x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\}$, 满足条件.

综上, a 的值为 -1 或 -3 .

(2) 对于集合 $B, \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 5) = 8(a+3)$.

$\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A$.

- ① 当 $\Delta < 0$, 即 $a < -3$ 时, $B = \emptyset$, 满足条件;
② 当 $\Delta = 0$, 即 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$, 满足条件;
③ 当 $\Delta > 0$, 即 $a > -3$ 时, $B = A = \{1, 2\}$ 才能满足条件, 由根与系数的关系得

$$\begin{cases} 1+2 = -2(a+1), \\ 1 \times 2 = a^2 - 5, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = -\frac{5}{2}, \\ a^2 = 7, \end{cases} \text{ 矛盾.}$$

综上, a 的取值范围是 $a \leq -3$.

(3) $\because A \cap (\complement_U B) = A, \therefore A \subseteq \complement_U B$,

$\therefore A \cap B = \emptyset$.

- ① 若 $B = \emptyset$, 则 $\Delta < 0 \Rightarrow a < -3$ 适合;
② 若 $B \neq \emptyset$, 则当 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$, 这时 $A \cap B = \{2\}$, 不合题意; 当 $a > -3$, 此时需 $1 \notin B$ 且 $2 \notin B$;

将 2 代入 B 的方程得 $a = -1$ 或 $a = -3$;

将 1 代入 B 的方程得 $a^2 + 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \pm \sqrt{3}$;

$\therefore a \neq -1$ 且 $a \neq -3$ 且 $a \neq -1 \pm \sqrt{3}$.

综上, a 的取值范围是 $a < -3$ 或 $-3 < a < -1 - \sqrt{3}$ 或 $-1 - \sqrt{3} < a < -1$ 或 $-1 < a < -1 + \sqrt{3}$ 或 $a > -1 + \sqrt{3}$.

题型四 抽象集合问题

例 6 设全集为 U, A, B 是 U 的子集, 定义集合 A 与 B 的运算: $A \ast B = \{x | x \in (A \cup B), \text{ 且 } x \notin (A \cap B)\}$, 则 $(A \ast B) \ast A =$ ()

A. A

B. B

C. $(\complement_U A) \cap B$ D. $A \cap (\complement_U B)$

解析 画出 Venn 图, 如图

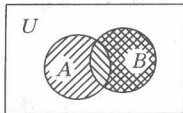


图 1-1-1-2

1-1-1-2 所示. 由图可知选 B.

答案: B

点拨

借助图形, 使抽象问题直观化, 这是我们解决抽象问题的一种有效办法.

题型五 集合与不等式的联系

此类问题主要分两类: 一是不含参数问题, 一般可直接求解; 二是含参数问题, 往往进行等价转换, 然后根据数形结合进行分类讨论.

例 7 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

分析 因为 $A \cup B = A$, 即 $B \subseteq A$, 又 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, 考虑到“空集是任何集合的子集”这一性质, 因此需对 $B = \emptyset$ 与 $B \neq \emptyset$ 两种情况分别讨论确定 m 的取值范围.

解: $\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A$.

又 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$,

(1) 若 $B = \emptyset$, 则 $m + 1 > 2m - 1$, 即 $m < 2$, 此时总有 $A \cup B = A$, 故 $m < 2$.

(2) 若 $B \neq \emptyset$, 则 $m + 1 \leq 2m - 1$, 即 $m \geq 2$,

由 $B \subseteq A$, 得 $\begin{cases} -2 \leq m + 1, \\ 2m - 1 \leq 5, \end{cases}$ 解得 $-3 \leq m \leq 3$,

$\therefore 2 \leq m \leq 3$.

综合(1)(2)可知, m 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

点拨

注意条件的等价转化, 如 $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B, A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

题型六 集合与方程的联系

此类问题主要有两类: 一是不含参数的方程直接求解集; 二是含参数的方程, 用分类讨论求解.

例 8 已知三个集合: $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x | 2^{x^2 + 2x - 8} = 1\}$. 若 $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset$, 求实数 a 的值的集合.

分析 三个集合都表示方程的解集, 由于集合 B、C 中的两个方程都不含参数, 所以可以从化简 B、C 入手, 再应用条件 $A \cap B \neq \emptyset$ 和 $A \cap C = \emptyset$, 确定集合 A 中方程的性质.

解: $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\} = \{2, 3\}$,

$C = \{x | 2^{x^2 + 2x - 8} = 1\} = \{-4, 2\}$.

$\because A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset, \therefore 3 \in A, 2 \notin A$, 即 3 是方程 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ 的解, 2 不是该方程的解, 从而有 $\begin{cases} 3^2 - 3a + a^2 - 19 = 0, \\ 2^2 - 2a + a^2 - 19 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a = -2$, 此时 $A = \{3, -5\}$.

故实数 a 的值的集合为 $\{-2\}$.

点评

将元素属于集合的集合语言转化为实数为方程的根是解题的关键.

附录 1

处理集合问题的常用方法

集合是高中数学的重要基础知识, 它贯穿于整个中学数学教学之中, 并且作为一种数学语言和工具在其他数学问题中有广泛的运用. 在高考中, 它也是年年必考的内容之一. 集合问题一般有两种类型, 一是涉及集合本身的问题; 二是以集合为载体, 综合其他数学知识构成的综合题. 本文探讨集合问题的一般性解法, 供教学中参考.

一、利用集合概念

例 1 设 $A = \{(x, y) | |x + 1| + (y - 2)^2 = 0\}$, $B = \{-1, 2\}$, 则必有 ()

A. $A \supseteq B$ B. $A \subseteq B$ C. $A = B$ D. $A \cap B = \emptyset$

解析 学生易错选 C. 错因是未正确理解集合概念, 误以为 $A = \{-1, 2\}$, 其实 $A = \{(x, y) | |x + 1| + (y - 2)^2 = 0\} = \{(-1, 2)\}$, A 是点集, 而 B 是数集, 故正确答案应选 D. **答案:** D

例 2 集合 $M = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $N = \{x | y = \sqrt{3 - x^2}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

A. $\{(-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 1)\}$ B. $[0, \sqrt{3}]$ C. $[-1, \sqrt{3}]$ D. \emptyset

解析 集合 M 中的元素是 y, 它表示函数 $y = x^2 - 1$ 的值域; 集合 N 中的元素是 x, 它表示函数 $y = \sqrt{3 - x^2}$ 的定义域. 由 $M = \{y | y \geq -1\}$, $N = \{x | -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$, 知 $M \cap N = \{t | -1 \leq t \leq \sqrt{3}\}$, 因此选 C. **答案:** C

点评

此题易误认为是求两条曲线的交点, 搞清楚集合中元素的特征, 正确理解集合概念是解题的关键.

二、利用集合性质

例 3 已知集合 $M = \{a, a + d, a + 2d\}$, $N = \{a, aq, aq^2\}$, 其中 $a \neq 0$, 若 $M = N$, 求 q 的值.

解: $\because M = N$,

\therefore 对应元素相等, 且有两种情形:

$$\begin{cases} a+d=aq, & \textcircled{1} \\ a+2d=aq^2, & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{或者} \begin{cases} a+d=aq^2, & \textcircled{3} \\ a+2d=aq. & \textcircled{4} \end{cases}$$

由①②解得 $q=1$, 则 $a=aq=aq^2$, 与集合中元素的互异性矛盾, 故舍去.

由③④解得 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$ (舍去).

$$\therefore q=-\frac{1}{2}.$$

点评 利用集合元素的无序性, 得到两个方程组, 求出 q 的值后要检验, 排除与集合元素的互异性或题设条件相矛盾的情况.

三、利用集合运算的概念

集合的交、并、补运算是高考对集合内容考查的重点. 利用集合交、并、补的定义解题, 关键是对交、并、补集概念的正确理解.

例 4 设 $A=\{x \mid |x| \leq 1\}$, $B=\{x \mid x^2+4x+3 < 0\}$, 求集合 C , 使其同时满足下列三个条件: ① $C \subseteq [(A \cup B) \cap \mathbf{Z}]$ (\mathbf{Z} 是整数集); ② C 有两个元素; ③ $C \cap B \neq \emptyset$.

解: 由条件①②知集合 C 中有且仅有两个元素, 且为整数, 因为 $B=\{x \mid x^2+4x+3 < 0\}=\{x \mid -3 < x < -1\}$, 由条件③知 $-2 \in C$. 因为 $A=\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, 所以 $A \cup B=\{x \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{x \mid -3 < x < -1\}=\{x \mid -3 < x \leq 1\}$, 从而可知 $C=\{-2, -1\}$ 或 $\{-2, 0\}$ 或 $\{-2, 1\}$.

四、利用空集的特性

空集是一个特殊的集合, 它是任何集合的子集, 利用空集的这一特性, 可使一些题设中隐含空集条件的问题得以正确解决.

例 5 已知 $A=\{x \mid x^2+(p+2)x+1=0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+=\emptyset$, 求 p 的取值范围.

分析 正确理解条件 $A \cap \mathbf{R}^+=\emptyset$ 是解题的关键, $A \cap \mathbf{R}^+=\emptyset$ 包含两层意思: 其一, A 中元素不是正数; 其二, A 是空集.

解: $\because A \cap \mathbf{R}^+=\emptyset$,

\therefore 集合 A 有以下两种情况:

(1) $A \neq \emptyset$, 即方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有两个非正数解, 其充要条件是 $\begin{cases} p+2 > 0, \\ (p+2)^2-4 \geq 0. \end{cases}$

解得 $p \geq 0$.

(2) $A = \emptyset$, 即方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 无实数解, 所以判别式 $\Delta=(p+2)^2-4 < 0$, 解得 $-4 < p < 0$.

综上, 可得实数 p 的取值范围是 $p > -4$.

五、数形结合

当集合中的元素具有明显的几何意义时, 则可充分利用“形”的直观性, 通过数与形的相互转化使问题获解.

例 6 已知集合 $A=\{x \mid \lg(x-a+1) < \lg 2\}$, $B=\{x \mid (x-a)(x-2) > 0\}$. 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求实数 a 的取值范围.

分析 此题若用代数方法通过解不等式求 a 的范围, 需分情况进行讨论, 若数形结合, 则可使问题获得简捷解法.

$$\begin{aligned} \text{解: } A &= \{x \mid \lg(x-a+1) < \lg 2\} \\ &= \{x \mid a-1 < x < a+1\}. \end{aligned}$$

设 $f(x)=(x-a)(x-2)$, 作出它的草图, 由图 1-1-1-3 可知 $A \cup B = \mathbf{R}$ 的充要条件是

$$\begin{cases} f(a-1) > 0, \\ f(a+1) > 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} 3-a > 0, \\ a-1 > 0, \end{cases} \therefore 1 < a < 3.$$

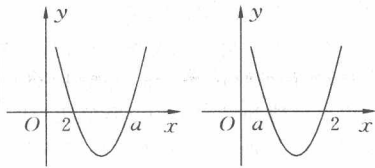


图 1-1-1-3

六、合理转化

集合问题一般都是用符号语言表述的, 因而较抽象, 解题过程中常需把集合语言转化成熟悉的非集合表述的问题, 这样有利于运用熟知的方法解决问题.

例 7 设全集 $I=\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $A=\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$, $B=\{(x, y) \mid y=x+1\}$. 求 $(\complement_I A) \cap B$.

解: 将集合 A 转化为直线 $y=x+1$ 上去掉点 $(2, 3)$ 的全体点集, 从而集合 $\complement_I A=\{(2, 3)\}$, 集合 B 转化为直线 $y=x+1$ 上的全体点集, 于是 $(\complement_I A) \cap B=\{(2, 3)\}$.

七、分类讨论

对一些含参数的集合问题, 常需要进行分类讨论求解.

例 8 设 $A=\{x \mid -2 \leq x \leq a\}$, $B=\{y \mid y=2x+3, x \in A\}$, $C=\{z \mid z=x^2, x \in A\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

分析 当 $-2 \leq x \leq a$ 时, $z=x^2$ 的范围与实数 a 取值的正负号, $|a|$ 与 2 的大小均有关系, 因此必须对 a 分情况进行讨论, 从而得到集合 C , 再根据 $C \subseteq B$, 求出 a 的取值范围.

解: 因为 $A=\{x \mid -2 \leq x \leq a\}$,