

生活中的

数学思维

宋宇 著

数学思维渗透于社会和生活的每个角落，
无时无刻不在影响着我们的行为和思维模式，
每个人都在有意无意地运用数学的思维方式。
现实世界中政治、经济、企业经营、组织管理、
军事、社会生活等诸多领域的复杂问题，
都需要用数学思维来解决。
学好和用好数学思维，活得更有智慧。

光明日报出版社

生活中的

数学思维

宋宇 著

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

生活中的数学思维 / 宋宇著. — 北京: 光明日报出版社, 2011.6

ISBN 978-7-5112-1137-8

I. ①生… II. ①宋… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 066682 号

生活中的数学思维

作 者: 宋 宇

出 版 人: 朱 庆

责任编辑: 温 梦

版式设计: 张 诚

责任校对: 华 胜

责任印制: 曹 诤

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市东城区(原崇文区)珠市口东大街5号, 100062

电 话: 010-67078245 (咨询), 67078945 (发行), 67078235 (邮购)

传 真: 010-67078227, 67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E-mail: gmcbs@gmw.cn

法律顾问: 北京市华沛德律师事务所张永福律师

印 刷: 三河市华东印刷有限公司

装 订: 三河市燕郊冶金路口南马起乏村西

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社联系调换

开 本: 720 × 980mm 1/16

字 数: 210千字

印 张: 15.5

版 次: 2011年6月第1版

印 次: 2011年6月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-5112-1137-8

定 价: 29.80元

版权所有 翻印必究

P R E F A C E

序言

“一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量。”这是科学家拉奥说的一句很著名的话。数学决定着一个国家科技的进步，是关系着一个国家未来发展的核心学科，在这一点上已经达成共识，但人们一般不去注意数学对人类个体的影响。随便问问我们周围的人，或者是路上的行人，什么是最重要的或最有用的学科是什么？不能指望他们的答案会是数学，当然他们也不会去谈论数学对于生活的重要性。

人们对数学的了解大部分是从一本本教科书、一堂堂数学课中逐渐形成的，很多人习惯于把数学看成一套一套的数字。但把数学看成一套一套的数字就限制了数学的含义。因此大多数人的感觉是：数学是数学，生活是生活，在很少的时候二者才发生关系。事实上，一方面生活是数学的源泉，另一方面数学也在对人的生活产生着深刻的影响。

如果我们尝试去关注一下数学的自然本性以及数学式的思维在我们大脑中的应用，我们或许会有些惊讶，原来数学能力就像人的语言能力一样，是人类最基本的智慧之一，数学就像人的语言一样熟悉，它就在我们的内心。我们运用它理解和把握我们所生活的世界，它则以推理和计算的形式左右着我们的思想、判断和行为。几乎世界上所有的学校都把数学作为一门基本科目，这不仅是科技发展的需要，也是每一个人健全自己的心理、发展自己的基本智能的需要。数学对人的思维和精神具有一种潜移默化的导向作用，通过这种作用影响着人的发展，并在很大程度上决定着人和人之间的差异。

本书是一本从全新的角度谈论数学的书，全书围绕着数学与生活，展示了数学在生活中的广泛运用以及数学对人的深远影响，同时也分析了数学学习和研究中的深层心理因素，并为人们学习数学、提高数学思维能力以及在生活中更好地运用数学思维提供了积极的指导和建议。本书的叙述包括以下几个方面：

1. 通过对一些在生活中经常萦绕在人的脑际，并为很多人感兴趣的问题的探讨，使人了解在生活细节中的数学层面。数学是以各种各样的形式渗透

在生活之中的，并以我们所不太注意的方式发挥着它的力量，所以，数学也是我们了解和把握生活的有力武器。

2. 柏拉图有一句名言：“没有数学就没有真正的智慧。”本书揭示了数学训练对人的深刻影响。数学不仅影响着人的思维，还对人的观念和情感等精神因素发生作用，从而培养和塑造着人的个性。

3. 从新的鉴赏角度，展示了数学的魅力所在，数学是充满智慧、令人神往的学科。数学的迷人之处究竟在哪儿？为什么数学会充满趣味和娱乐？如何享受到数学的乐趣？细心的读者能从本书中找到一些答案。

4. 数学讲究逻辑，但是数学的思维并不只是理性思维。数学思维像其他的人类行为一样，是人的一种基本能力。这种能力使每一个人都有可能进行适合自己的发展。

5. 从学业上来说，数学是大多数学生都回避不了的，一些学生甚至会为数学苦恼。我们最熟悉的东西常常是我们最不了解的，本书以独特的视觉对人的数学方面的能力作了深入的探讨，力求揭示数学思维中的一些微妙的心理因素，并给出一些学习数学和提高数学能力的新颖的见解。

6. 本书告诉人们：学习和研究数学应该是一场精彩又富有启发性的旅行，这个旅程不仅能体验到令人沉迷的风景，还能收获到精美的果实。但你首先得沉下心来，了解数学中的奥妙，学会欣赏数学之美。

一些人总是急功近利，他们想直奔自己的各种各样的理想，忽视了如何实现的过程，不去寻找实现这些目标的途径。假如人生是在建筑一座大厦，那么财富和劳动是重要的，而真理和智慧同样重要，数学代表的就是真理和智慧。我们把社会可以看成由这一座座建筑物组成的街道，一个人如果想成为街道两旁的一道建筑风景，好好修炼属于自己的数学是一个好的选择。

有人说，在现代社会，没有相当的数学知识就是文盲。事实上，数学正变得越来越重要，数学专业在许多高校的招生排行榜上的位置也越来越靠前。如果本书的一些看法能给读者带来一些启示，从而有益于读者在数学上的发展，并使生活变得更加精彩，则作者会感到很欣慰。

目录

第1章	发现数学	1
	第一节 数学门外谈数学	2
	第二节 人的智慧、模型和数学	5
	第三节 走近数学看数学	7
	第四节 数学的语言和逻辑	10
	第五节 数学的无穷魅力	14
	第六节 神奇的数学家	16
	第七节 数学来源于生活	21
	第八节 数学是一种生存工具	24
第2章	生活中处处有数学	29
	第一节 生活中的数和形	30
	第二节 厨房里的数学奥秘	34
	第三节 洗衣服的数学问题	38
	第四节 住房装修的数学问题	40
	第五节 体育运动中的数学	45
	第六节 人人都有一个“小算盘”	48
	第七节 计划制订的思考逻辑	52
第3章	游戏、数学和入迷	57
	第一节 儿童玩具中的数学	58
	第二节 扑克游戏中的数学	61
	第三节 麻将和数学	64
	第四节 棋类游戏和数学	66

第五节 电脑游戏中的数学	71
第六节 数学是令人沉迷的游戏	74

第4章 经济生活中的数学思维

第一节 买卖东西的数学	78
第二节 买房买车如何支配资金最划算	80
第三节 日常生活中的收支平衡	84
第四节 不同的人有不同的小算盘	88
第五节 从数学角度看企业家的思维	91
第六节 证券买卖的数学思维	95
第七节 投资需要数学头脑	99
第八节 以数学眼光看生活中的骗局	102

第5章 职业、薪酬和对数学素养的要求

第一节 从微软面试谈起	108
第二节 Google 公司的古怪广告	110
第三节 最为抢手的金领职业	113
第四节 财技和数学	115
第五节 MBA 是要考数学的	119
第六节 数学教学和研究者的职业状态	121
第七节 数学化的生产和服务	123
第八节 知识经济的数学成分	126

第6章 数学能力与智商测验

第一节 数学能力是一种信息处理能力	130
第二节 数学能力的心理基础	133
第三节 数学天赋与进化心理学	136
第四节 智商测验中的数学成分	139
第五节 人生是另一种形式的数学竞赛	143

第六节 数学能力的局限性	146
--------------------	-----

第 7 章	数学活动中的思维	149
第一节	思维和数学思维	150
第二节	数学的直觉思维	152
第三节	证明的思维模式	154
第四节	问题解决的思维模式	157
第五节	现代数学的思维特征	159
第六节	数学思维的动力机制	162
第七节	数学学习障碍	164

第 8 章	数学教育与数学竞赛	167
第一节	孩子们和数学	168
第二节	最廉价的智力投资	171
第三节	日常生活中的数学启蒙	174
第四节	中国的数学教学	176
第五节	美国的数学教育	179
第六节	奥林匹克数学竞赛和数学	181

第 9 章	数学训练如何影响人	185
第一节	历史上最伟大的一本书	186
第二节	数学训练对人的认知结构的影响	188
第三节	数学与观念形成	191
第四节	理性精神和人生选择	194
第五节	数学对交流能力的影响	196
第六节	数学学习与个性形成	198

第10章	学数学用数学的境界	201
	第一节 数学学习的目的	202
	第二节 通过数学磨炼思维	204
	第三节 向数学家进军	206
	第四节 做科学家和工程师	208
	第五节 别出心裁学数学	210
	第六节 让数学在生活中发挥神奇作用	212

第11章	数学思维能力的塑造	215
	第一节 从微观看数学能力	216
	第二节 驾驭数学是一种艺术	218
	第三节 破解数学之乐趣	221
	第四节 创建数学学习环境	224
	第五节 数学思维品质的培养	227
	第六节 提高问题解决能力的模式	229
	第七节 形成数学反思能力	232
	第八节 克服数学学习障碍的对策	234

第 1 章

发现数学

数学既简单又深奥，简单到 $1+1$ 也是数学，3 岁幼儿也能算出来；深奥到一些最尖端、最前沿的数学，全世界也没有几个人能了解得很透彻。数学的内涵随着数学的发展也在不断深化，为了能更精确地了解什么是数学，我们应该拥有一个对数学的立体的感觉，让我们从不同的角度来接触它，一点点感受数学的丰富和深邃。

第一节 数学门外谈数学

数学科学是人类(主要是数学家)所发现的数学规律并按照数学特有的演绎规律组成的科学体系。从数学的形成来看,它是人类数学发现和创造积累的结果,浓缩了所有数学研究的正确结论。对人类而言,数学从发展到现在,就数学知识所达到的广度和深度来说,它就像一个浩渺无际的大海。



大家都知道有一个很著名的“盲人摸象”的故事,这个故事说明:由于每个人自己感知事物的角度不同,对同一个事情,不同的人常常有不同的看法。人们对概念的掌握通常不是通过精确的定义,而是通过对具体事物的感觉和接触而逐渐形成的,就如盲人摸象,如果不是只摸了一个部位,而是从不同的角度摸到了,也就大概知道象是个什么事物了。人们对数学的认识常常是由自己所掌握的数学知识所组成的,由于对数学的理解和学习的深度不同,人们对数学的感觉和认识也不一样。

在现实生活中,人们通常根据数学和自己的关系来对“什么是数学”形成判断。一些人对数学不太了解,也不想了解太多,但是也知道数学是学校教育中的基础课程之一,是一门很重要的必考课程。数学给很多人的印象是,学数学很枯燥,很乏味,很费脑子,要做很多很多令人厌倦的题,令人想逃避,要想学好数学更是一件难事。

人们对数学的了解主要是在学校里的课堂上得到的,大部分人对数学的认识就是数学课,一系列的数学知识和一系列的数学题,但是课堂上的数学由于教育的目的,出于对学生的接受能力的考虑,是经过精心编排的数学。在抽象性上不像数学科学那样高度抽象。数学科学,是严格按照逻辑法则建立起来的逻辑链,

课堂上的数学则是相对松散的。

数学令人害怕吗

大多接触过数学的人看稍微深一点的数学书,就会感觉像是在看天书似的。数学给人的印象是:符号、公式和定理,让人认为去理解数学是一件非常不容易的事情。但是符号只是一种语言,一种表达和交流的工具,数学的语言是精确的,每一个符号、每一句话都有其特定的含义,这一点上不像日常生活中的语言,有些词和句子我们很早就学会了,也在使用它们,但是我们常常不能很好地解释它们,有些诗人和语言大师们运用词和句子的用意更是让人难以捉摸。从这个角度来说,数学是简单的。当然学会使用数学的语言也像学习其他语言一样,需要下一点功夫。当然,数学本身不只是“数字符号”,它有更丰富的内涵,数学更需要人们动脑筋思考。

数学的思考是建立在抽象概念的基础上的,很多人在理解数学时遇到了困难,便为自己找借口说:“数学太抽象了。”其实所谓“抽象”,顾名思义就是“从现象中抽出来”,目的是为了研究的方便,因此抽象并不可怕,数学中最常见的数字和图形,都是从现实世界中我们所能感觉到的现象中抽出来的,它们并没有超出人类经验的范围。无穷大“ ∞ ”和复数虽然人们看不到,但也是可以在现实的基础上想象的。数学是一门高度抽象化的科学,抽象的结果不过是抛弃了一些干扰我们视野的具体形象,从而简化了我们的思考,使我们更方便地研究这个世界。

数学大多数时候是对现实世界的一种思考、描述、刻画、解释、理解,其目的是发现现实世界中所蕴藏的一些包括数量、图形,以及其他可以予以抽象的事物的规律。从这个意义上说,数学与人的生活是息息相关的。对数学门外汉来说,数学是很神秘的。但是解开数学的神秘面纱,你会发现数学原来就在自己的身边,甚至更近,就在自己的大脑之中,在思想的深处。所以别把数学想象得那么困难和枯燥,也不要认为数学排斥常识,数学仅仅是常识的一种很微妙的表达形式。

数学最令人苦恼的地方,莫过于数学问题的丰富和对智力的挑战,或许你对数学非常害怕、非常恐惧,认为学好数学是需要某种智慧和天赋的,自己很笨,

不可能学好数学，但事实上，数学能力的发展有其关键的阶段，如果没有错过这个时间段的话，你完全可以很好地发展自己的数学能力。数学有各种层次的数学，最高层次的数学创造能力是需要天才一般的数学天赋的，也需要一种执著精神。但是每个人都可以根据自己的能力来学到自己需要的那一部分数学。学数学学到微妙处，就能为自己的人生增添一种前进的动力。



有些人喜欢数学，有些人不喜欢数学，这就像有些人喜欢下围棋，而有些人不喜欢。通常，人们对某些事物入门以后才会喜欢。对于喜欢数学的人来说，它是一种有趣的游戏，其中趣味和研究者对其的爱好，正是数学发展的主要动力之一。是否对数学感兴趣也是在学校里的数学成绩优劣的决定因素之一。

很多学生并不喜欢数学，甚至有些反感，在他们的印象中数学只是“计算”和“证明”，学数学只要会做题就行。事实上这种看法是一种偏见，也是传统应试教育的引导所造成的误区。或许正是因为反复地做大量的题，才使人们对数学逐渐形成了一种厌烦情绪，抑制了人们对数学的兴趣。

通过阅读本书后面的部分，你将会感觉到数学有着比做题要丰富得多的内涵。数学的学习方式也不是只有在有限的课堂上的学习形式。数学学习有着更广泛的思维空间和实践空间，是生动有趣的学习活动。在数学的花园里，做一个好奇的学生去用心体会和感悟，就会发现这里是一个拥有很多奇妙果实的世界。我们可以自由探索自己心目中的数学世界，正是这种自由探索才能体会到数学之可爱，也丰富了作为万物之灵的人的人性。

很多人喜欢下棋、打扑克、打麻将等游戏，细究为什么会沉迷于它们，甚至上瘾？原因之一就是游戏过程中有数学的计算和要运用数学的思维。但是学下棋真要下到成为一种爱好，是需要入门的。同样，学数学只要入对了门径，你就会觉得数学是一种非常令人沉迷的学问，通过学数学，你还有可能得到一些游戏中不能得到的乐趣和知识，而这些可能会影响到你一生的发展。因此，数学实在是太可爱了！

第二节 人的智慧、模型和数学

一个学生如果数学成绩好,会被认为很聪明;一个人如果成为数学家,会被认为具有某种智慧。那么这是一种什么性质的智慧呢?数学到底是什么以及这种数学方面的智慧来源于何方?对此我们未必十分清楚,原因之一是我们对这些问题缺乏研究。

按照现代的观点来看,人的大脑就认识和判断的能力来说,是一个信息加工机器。它对来自外界环境的各种信息进行选择、归类和推理等加工,加工的目的在于认识这个世界,以及为更好地适应或改变这个世界作出决策。加工的方式之一,是把自己的观察和思想组织成概念的体系,我们可将这些概念的体系称为模型。这种模型如果发展成熟到某种程度就称之为理论。在生活中,我们有时会感到某些人说话一套一套的,其实是指一套理论,可以观察到大多数人都在某些时候有这种应用或建立理论模型的倾向。大多数人满足于别人所构造的模型,也有些人能创建新的模型或改进旧的模型。人其实是具有学习、构造和应用理论模型的能力、趣味和需要的。

模型的建立在人类思想的发展中起着极其重要的作用,模型的建立使我们得到对外在世界的原始观念,进而使我们得到科学的理论模型。在科学中,模型的正确与否是通过逻辑和实验来检验的。这就使得我们有必要把模型和我们设想该模型所表现的外在世界十分清楚地区别开来。这个原则现在已经在许多科学分支中通用。正是这个原则在科技上的普遍应用,使人类的知识和能力达到了一个全新的生机勃勃的境界。

数学正是人类所构造的一种科学模型。数学模型在概念上是首尾贯穿的,并且具有严密的逻辑性、唯一性。比如,宗教是人类在世界中的位置的模型,哲学也是关于人类和世界的模型,它们也使用逻辑作为推理工具,但不具有唯一性,以至于不同的宗教和不同的哲学之间谁也不能说服谁,但是数学就不同,谁也不

会去反对它，因为反对它，就是向自己的常识和逻辑挑战。

最简单的数学模型就是自然数1、2、3……集合。如果有一些对象，除了它们的数目之外其他性质我们都不予考虑的话，我们就可以用自然数来数它们。在一切语言中，都有自然数出现，只是有的语言中表示数目的名称多些，有的语言中少些。一切民族都使用自然数这种模型。

希腊数学家创造了一种数学模型——欧几里得几何。欧几里得的《几何原本》中描述了这个模型，并且讨论了直线、三角形以及其他几何对象，它们都出现于我们的日常生活中，例如拉直了的绳子和所画的图形。它们已经抽象化，而它们的相互关系总结在一些类型的公理中：“通过任意两个不同的点，能够作且仅能作一条直线。”欧几里得几何模型就是通过这些为人类的直观所认可的公理固定下来的。于是欧几里得几何理论以逻辑为其唯一工具而建立起来。这种理论包含着大量与现实观察从来不矛盾的结果，例如这样的定理：三角形的三个内角之和等于两个直角。数学正是通过诸如欧几里得几何而获得最严格与最纯粹的科学的名声的。

早期数学的产生和发展始终围绕着数和形这两个概念不断地深化和演变。大体上说，凡是研究数和它的关系的部分，划为代数学的范畴；凡是研究形和它的关系的部分，划为几何学的范畴。数和形的研究经常是相互交叉的，解析几何则是把代数方法和几何方法结合起来的一种创造。

数学的发展在早期是相对缓慢的，随着认识的发展和研究的积淀，数学逐渐取得了较大的发展，特别是最近的四个世纪是数学的一个大发展时期，数学的内容更加成熟和丰富，一些新的数学分支也建立起来。推动数学发展的动力一方面是现实的应用，另一方面人类主要是数学家建立在人类天赋基础上的对数学对象的领悟力和非凡的创造力。在数学的模型世界里，数学的对象显然是抽象概念。在数学家看来，对数学对象进行逻辑组织并进行公理化，似乎是唯一令人放心的合理的建立数学体系的方法，并且逻辑是最后判断正误的标准。数学发展到了20世纪，随着数学的系统化，模型的分析受到重视，逐渐发展出称为集合、群、环、线性空间、拓扑空间之类的数学模型。构成它们的是数学对象，而不是那些呈现在日常生活中的东西。在这个意义下，它们是第二代模型，集合论就是这种模型的一个例子。

数学的发展存在两种可能：一种是离开现实，只是纯粹推理；另一种是和现实生活联系起来。反映到数学发展中，就存在两种可能，一是不管现实如何，只是研究数学，就形成了纯粹数学；另外一种就是把数学和现实联系起来，就是应用数学。

现代的数学科学其实就是人类历史上所创造的各种数学模型的总和，它在语言的表达上是精确的，在逻辑演绎上有严格的要求，在应用方面是人类生存智慧的至高境界：以抽象概括能力和逻辑能力为基础创造一种模型作为工具，用以理解世界以及建立其他模型，终极的目的是实现人类的各种理想。

第三节 走近数学看数学

数学既然是一种理论模型，那么这种理论模型有什么特点？它对于人类意味着什么？它有什么用处？这是我们所关心的问题。数学可以认为是智力的自由运用和最高运用，数学使人的思维发展到了一个全新的境界，因为数学，人类的理性思维才达到了它光辉的顶点。

数学的价值和方法

柏拉图说：“数学是一切知识中的最高形式。”数学是一个知识体系，这个知识体系是精妙的，是一种令人惊叹的理论创造。它使人类的眼光和思索延伸到了无限远的空间。数学自身的特点使数学在人类文化史中赢得了众多的溢美之词。有些学者甚至对数学有一种奇特的坚定的信念，毕达哥拉斯认为“数支配着宇宙”，“上帝创造了整数，其他一切都是人造的”。黑格尔则说：“数学是上帝描述自然的符号。”

数学理论模型的一个重要价值是它的正确性。爱因斯坦说：“数学之所以比其他一切科学受到尊重，一个理由是因为它的命题是绝对可靠和无可争辩的，而其他的科学经常处于被新发现的事实推翻的危险……数学之所以有崇

高的声誉，另一个理由就是数学使得自然科学实现定理化，给予自然科学某种程度的可靠性。”数学的研究内容是抽象的，研究的结论建立在严格的推理基础上。

恩格斯认为：“数学是研究现实生活中数量关系和空间形式的科学。”这句话很通俗，较为接近地反映了数学的研究内容，但是现在看来这句话不全面。比如，数学中集合的思想，集合既不是数量，也不是几何，它也是数学的研究内容。法国著名的数学学派布尔巴基学派则认为：“数学是研究抽象结构的理论。”这话在数学专业人士看来，可能更易接受一些，但是却不那么通俗了。

人类从现实世界中抽象出一些属于事物共同属性的侧面来，形成和创造一些概念，凭心灵的直觉得到一些人人都得认可的公理知识，并在此基础上用符合逻辑的数学方法，得出一些完全正确的数学真理。数学的正确正是来自于其方法的力量，正是这种方法在结束人类知识的繁杂琐碎和众说纷纭，走向了秩序和有效率的轨道，为科学的发展作出了强有力的贡献。

数学的研究对象不是具体事物的规律，它不能成为规律的发现者，数学也不研究和缔造关于人生和社会的理论，但是可以毫不夸张地说，一切规律和假说要想得到一切自由的人类心灵的认可，取得绝对正确的地位，都要借助于数学的方法来说明自己，然后等待人类理性的裁判。如果没有数学所使用的方法的认可，则所谓规律和理论最终可能是虚假的，最多也只能是幼稚和有待完善的。所以现在的社会科学家，经常在尝试引用数学的工具，运用数学的方法来说明自己的理论。

所以，数学的价值还在于它的方法，它推理出来的东西是千真万确的。相比较而言，在人类的精神世界里，哲学太玄妙，宗教太神秘，文学太琐碎，艺术太虚幻，信仰太缥缈，只有数学是真实存在。

数学是人类智慧的至高境界

美国数学学会主席魏尔德说：“数学是一种会不断进化的文化。”数学也可以看做一种文化，现在的数学也是一种过去所有时代的数学文化的积淀，所代表的既是人类个体的智慧，又是人类社会群体的智慧。