大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

经管类

微积分（下册）

CALCULUS

主　编　王立冬　周文书

副主编　齐淑华　王金芝

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

大学高等数学类规划教材

丛书主编　王立冬

经管类

微积分（下册）

CALCULUS

主　编　王立冬　周文书

副主编　齐淑华　王金芝

主　审　刘　满

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分．下册／王立冬，周文书主编．—大连：大连理工大学出版社，2012.2

ISBN 978-7-5611-6748-9

Ⅰ．①微… Ⅱ．①王… ②周… Ⅲ．①微积分—高等学校—教材 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 019747 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023

电话：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466

E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：170mm×240mm　印张：12.75　字数：236 千字

2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑：王　伟　责任校对：锦　墨

封面设计：齐冰洁

ISBN 978-7-5611-6748-9　定　价：32.00 元

“大学高等数学类规划教材”题词

高等数学诸分支知识及技巧，是通往现代科技诸领域的钥匙和通用语言.

徐利治

2009年8月于大连

序

21世纪已出现了高等教育向大众化教育转化的趋势.我国高等教育也开始呈现出了多层次与多样性的特点.这些特点正是反映了现代科技与文化教育发展形势的客观要求.

上述发展形势的启示下,具有多科性的大连民族学院的数学教师们,近年来一直致力于数学教材的建设,已相继编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门基础课讲义,这三门课曾分别被评选为省级精品课与校级精品课.

在上述讲义的基础上,进行改进和修订后产生的这套"大学高等数学类规划教材"丛书,可以作为普通高校理工科与经济及管理学科各专业的通用教材或教学参考书.

这套教材并不以"英才教育"为特殊目标,其根本旨趣是要力求反映高校大众化数学教育的基本要求,并希望教材中能渗透人文素质教育的精神.因此简要说来,这套教材希冀和呈现的主要特点,约有下列三点.

一、尽可能从实践经验与直观背景出发,提出数学问题,以便于学生了解数学知识的源流与背景.

二、教材内容的安排与表述方式上,力求深入浅出、易教易学、简明实用.注重讲清基本概念,适度淡化理论证明,并适当反映数学所蕴含的素质教育与美育教育.

三、例习题的选取与安排力求体现理论联系实践的原则,多数例题选自实践、应用与生活.

凡是具有生命力的教材，总是处于不断适应客观要求和不断更新改进的过程中，这套教材丛书自然也不例外. 我为本书作序，诚挚希望本教程使用者与读者的任何指正或改进建议，将能直接函告丛书主编或教材编著者为幸.

徐利治

2009 年 8 月于大连

前 言

微积分是高等院校为非数学专业本科生开设的一门重要基础课程。根据不同专业的需要，该课程的内容和深度有所不同。从内容和深度上看，理工类专业要求较高，其次是经管类专业，然后是其他文科类专业，但数学教育本质上是一种素质教育，学习数学的目的，不仅在于学到一些数学概念、公式和结论，更重要的是了解数学的思想方法和精神实质。在这些方面，理工类、经管类和其他文科类专业学生的要求应该是一样的。

本书是依据高等学校本科微积分课程教学基本要求专为经管类本科生编写的，在编写过程中我们努力体现下述特色：

(1)遵循经管类专业教育的教学规律，考虑经管类教育的特色，强调了“必需”、“够用”，加强学生素质的培养。

(2)贯彻“掌握概念，强化应用”的教学原则。掌握概念落实到使学生能用数学思想考虑问题；强化应用落实到使学生能用所学的数学方法解决实际问题。

(3)在教学内容上注意对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、将复杂问题归纳为简单规律和步骤的能力的培养。

(4)力求将数学思维方法与数学学习相结合，使学生能够认识、理解和运用数学思想方法，提高数学学习效果，增强思维品质。

(5)例题典型多样，难度上层次分明，注意解题方法的总结。

(6)为了配合双语教学，给出了一些重要词汇的英文翻译。

参加本书编写工作的有张友、王书臣、付军、冯丽、夏元琦、楚振艳、董莹、刘恒、刘延涛、刘强、丁淑妍、刘力军、牛大田、李阳、周晓阳、葛仁东、孟佳娜、孙雪莲等。

由于编者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2012 年 1 月

目 录

第 6 章 空间解析几何与向量代数
Analytic Geometry in Space and Vectors

17 世纪上半叶,法国数学家笛卡尔和费马创立了解析几何. 解析几何的基本思想是用代数的方法研究几何问题,我们在中学所学的平面解析几何中对此已有所领悟. 为了进一步学习多元微积分,本章先介绍空间直角坐标系,并引进向量的概念和运算,然后,在此基础上以向量为工具讨论空间中的平面、直线、曲面、曲线以及一类较特殊的曲面——二次曲面.

6.1 空间直角坐标系及空间中两点间的距离

6.1.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中,建立平面直角坐标系,使平面上的点与二元有序数组 (x,y) 一一对应起来了. 类似地,可以建立空间直角坐标系,使空间中的点与三元有序数组 (x,y,z) 建立一一对应关系,这样,就可以用代数的方法研究几何问题了.

过空间一定点 O,作三条相互垂直的数轴,依次称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),并统称为坐标轴. 各轴正向之间的顺序通常按下述法则确定:以右手握住 z 轴,当右手 4 个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴正向,这一法则称为**右手法则**(图 6-1). 与之相反的还有左手法则,一般习惯上都选用右手法则. 这样就建立了**空间直角坐标系**. 按右手法则建立的坐标系称为右手系,O 称为坐标原点,3 条坐标轴中的每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面,依次为 xOy 坐标平面、yOz 坐标平面、zOx 坐标平面. 3 个坐标平面把空间

分成 8 个部分，每个部分称为一个卦限(图 6-2)，共 8 个卦限. 其中，$x>0, y>0, z>0$ 部分为第Ⅰ卦限，第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 平面的上方并按逆时针方向来确定；$x>0$，$y>0$，$z<0$ 部分为第Ⅴ卦限，第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 平面的下方，仍然按逆时针方向来确定.

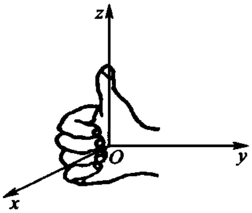

图 6-1

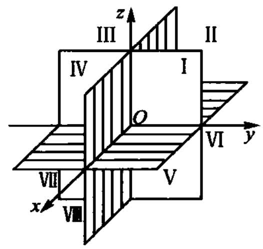

图 6-2

设 M 为空间中的任意一点，过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面，与三条坐标轴分别相交于 P、Q、R 三点，这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z. 这样点 M 就唯一确定了一个三元有序数组 (x,y,z). 反之，若给定了一个三元有序数组 (x,y,z)，就可以分别在 x 轴、y 轴、z 轴上找到坐标为 x、y、z 的三个点 P、Q、R，过三个点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面就确定了唯一的交点 M. 至此，空间中的点 M 与三元有序数组 (x,y,z) 就建立了一一对应关系(图 6-3). 有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，并依次称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

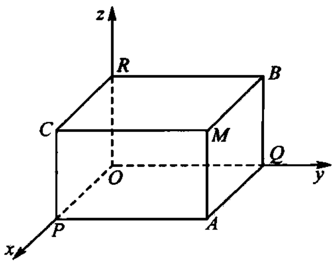

图 6-3

坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$. x 轴上的点的纵坐标和竖坐标均为 0，因而可表示为 $(x,0,0)$. y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 平面上的点的坐标可表示为 $(x,y,0)$；yOz 平面上的点的坐标可表示为 $(0,y,z)$；zOx 平面上的点的坐标可表示为 $(x,0,z)$.

设点 $M(x,y,z)$ 为空间直角坐标系中的一点，则点 M 关于 xOy 坐标平面的对称点为 $M_1(x,y,-z)$，关于 z 轴的对称点为 $M_2(-x,-y,z)$，关于原点的对称点为 $M_3(-x,-y,-z)$.

6.1.2 空间中两点间的距离公式

设空间直角坐标系中有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，下面来求它们之间的距离 $|M_1M_2|$.

过这两个点各作三个分别垂直于坐标轴的平面，这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6-4). 因为

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1Q|^2+|QM_2|^2\\ &= |M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2\\ &= |M'_1P'|^2+|P'M'_2|^2+|QM_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

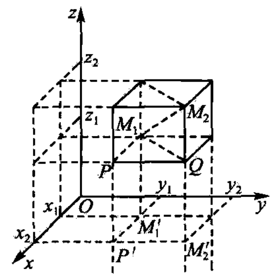

图 6-4

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{6-1-1}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{6-1-2}$$

【例 1】 在 x 轴上求一点，使它到点 $M(0,1,3)$ 的距离是到点 $N(0,-1,1)$ 的距离的 2 倍.

解 设所求点为 P，因其在 x 轴上，故设其坐标为 $(x,0,0)$，则

$$|PM| = \sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2+(0-3)^2} = \sqrt{x^2+10}$$

$$|PN| = \sqrt{(x-0)^2+(0+1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{x^2+2}$$

因为

$$|PM| = 2|PN|$$

所以

$$\sqrt{x^2+10} = 2\sqrt{x^2+2}$$

解得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故所求点为 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},0,0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0,0\right)$.

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点各在哪个卦限？

$A(3,-1,5)$；$B(0,0,-1)$；$C\left(-\frac{1}{2},-1,5\right)$；$D(-4,-3,-2)$.

2. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置.

$A(1,1,0)$；　$B(0,0,-1)$；　$C(0,1,3)$；　$D(0,-3,0)$.

3. 求点 $(-1,1,3)$ 关于 x 轴、y 轴、z 轴、xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面以及原点 $(0,0,0)$ 的对称点.

4. 求点 $M(1,-1,2)$ 到各坐标轴的距离.

5. 在 z 轴上求一点，使其到点 $M(-4,1,7)$ 的距离与到点 $N(3,5,-2)$ 的距离相等.

6. 证明以 $A(4,3,1)$、$B(7,1,2)$、$C(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

6.2 向量及其运算

6.2.1 向量的概念

我们接触的量一般可分为两类：一类诸如距离、质量、体积、温度、长度等，它们只有大小而没有方向，称为数量（标量）；另一类如位移、力、速度、电场强度等既有大小又有方向，称为**向量**(Vector).

空间中的向量通常用标有方向的线段来表示，这种线段称为有向线段. 在选定长度单位后，这条有向线段的长度表示向量的大小，方向表示向量的方向. 如图 6-5 所示，以 A 为起点，B 为终点的向量记为$\boldsymbol{AB}$，为简便起见，常用小写的粗体字母来表示，如 $\boldsymbol{a}$（也记为 $\vec{a}$）可表示$\boldsymbol{AB}$.

图 6-5

向量的大小称为向量的模(Norm)，记为 $|\boldsymbol{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$，模等

于 1 的向量称为**单位向量**(Unit Vector). 模等于 0 的向量称为**零向量**(Zero Vector),记为 **0**. 零向量没有规定方向,可以看做是任意方向的.

两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同且模相等,则称这两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 由此定义,不论 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 起点是否一致,只要大小相等,方向相同,即为相等的向量,也就是说,一个向量和它经过平行移动(方向不变,起点和终点位置改变)所得的向量都是相等的.

记两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 θ 为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\theta=0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\theta=\pi$;当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时,其意义就是将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行移动,使其起点重合后两个向量之间的夹角(图 6-6).

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,则称这两个向量平行,记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 因为零向量的方向是任意的,所以可以认为零向量平行于任何向量.

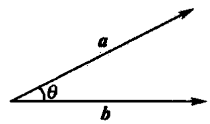

图 6-6

若将两个平行向量的起点放在同一点,那么它们的终点和公共起点在同一条直线上,所以,两个向量平行也称为两个向量共线.

6.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不平行,则以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边,且以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的共同起点为起点的平行四边形的对角线所表示的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 6-7),记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两个向量之和的方法称为向量相加的**平行四边形法则**.

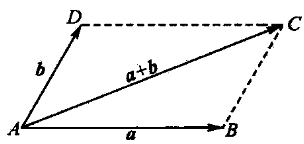

图 6-7

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,则规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$:当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两个向量的长度之和;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中较长的向量方向相同,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两个向量的长度之差.

从图 6-7 中可以得到向量加法的**三角形法则**:

定义 2 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$,连结 AC(图 6-8),则向量 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.