高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013

考研数学基础复习全书

（数学三适用）

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

凭书后增值服务卡
享超值服务

➔ 公共课在线测试题

➔ 名师答疑服务

➔ 在线课程试听

➔ 优惠订手机报及课程

➔ 最新权威图书资讯

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

考研数学基础复习全书

（数学三适用）

2013

全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

KAOYAN SHUXUE
JICHU FUXI QUANSHU (SHUXUE SAN SHIYONG)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

考研数学基础复习全书/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编．--北京：高等教育出版社，2012.3

数学三适用

ISBN 978-7-04-035024-1

Ⅰ．①考… Ⅱ．①全… Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第032994号

策划编辑 王宏凯　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王 洋　　版式设计 马敬茹

责任校对 刘 莉　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社有限公司	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市骏杰印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21	版　　次	2012年3月第1版
字　　数	750千字	印　　次	2012年3月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	38.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号 35024-00

出版前言

高等教育出版社出版的2013版考研大纲、大纲解析、名师导学、全国考研辅导班系列权威用书，以考研学生的特点和需求为出发点，融合了教学、命题、考研辅导等领域的专家、学者和优秀教师的多年经验和研究成果，内容完全切合考研大纲的考点，阐述准确、精练、重点突出，而且各系列书在编写时吸取了历年考生的意见和建议，对考生来说是一套非常权威、实用的考试参考书。

《2013考研数学基础复习全书(数学一、数学二适用)》、《2013考研数学基础复习全书(数学三适用)》根据教育部考试中心制定的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究考研命题的特点及动态，并结合作者多年数学教学和辅导的经验编写。编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书由三部分组成，包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计。各章节包括以下三部分：

(一) 考试内容与考试要求——使考生能明确大纲要求考生掌握的考试范围和考试要求，列出反映考试内容且要求考生掌握的概念、性质、理论与计算方法。

(二) 考试内容解析——本部分参考《数学考试大纲》、当前国内最权威的大学教材和历年考题，对大纲所要求的知识点进行了全面、准确地阐述，以加深考生对基本概念和原理等重点内容的理解和正确应用。

(三) 常考题型及其解法与技巧——通过对经典例题的分析，教会考生掌握各类题型的特点、解题思路和解题技巧。通过大量例题，使考生学练结合，更好地巩固所学知识，提高实战能力。

本书由清华大学何坚勇、山东大学潘鑫、大连理工大学杨剑等老师主编并审定，在此对他们严谨的治学态度和付出的智慧与努力表示感谢！

为了给考生提供更多的增值服务，凡购正版高教版大纲解析系列用书的考生都可以登录“中国教育考试在线”www. eduexam. com. cn 享受增值服务。

高等教育出版社

目　录

第一部分　微　积　分

第二部分 线性代数

第三部分 概率论与数理统计

导读与说明

《数学考试大纲》是每位立志考研的考生在复习数学前所需了解的一份十分重要的资料. 对于大纲内容的把握准确与否,往往决定了考生的复习方向、复习重点与时间分配,甚至决定了考场上的得分高低. 我们编写《考研数学基础复习全书》一书的目的,就是帮助广大考生准确了解考研数学的考试内容、把握考试要求、明确复习方向、熟悉反映考试内容与要求的各类考试题型、掌握各类常考题型的解题思路、方法与技巧.

作者们都在大学教了几十年的数学,因此对该领域的知识点、难点、考点以及学生的认识规律了然于胸. 我们又有十多年的考研辅导经验,熟知考研学生最缺乏又最迫切需要掌握的是对考研题型的分析、把握能力. 我们参加了十多年的考研数学判卷工作,对近二十余年的考题作了深入分析研究,因此,深谙命题的规律与陷阱以及考生最易犯的错误.

本书分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分. 每部分的各章分为考试内容与要求、考试内容解析、常考题型及其解法与技巧等三部分.

一、考试内容与要求

1. 考试内容——列出考试大纲所要求考生掌握本章内容的考试范围. 我们可以郑重地告知广大考生:从 1987 年全国考研数学统考以来,没有一个考题超出了大纲的考试内容. 因此考生在复习前首先要了解所考的专业要求数学试卷所属分类(数学一、数学二或数学三)以及该试卷种类所要求的考试内容——考试范围. 凡是考试大纲中列出的内容决不能放弃(尽管可以有重点与非重点之分),凡是考试大纲中没有要求的内容可以放心地不用复习.

2. 考试要求——对考试内容作了进一步的细化,列出反映考试内容且要求考生掌握的概念、性质、理论与计算方法.

需要注意的是,对于不同的“概念、性质、理论、计算方法”在考试要求中(甚至对不同的卷种)有着不同的提法. 对于“概念(包括部分性质)、理论”有两种不同的要求:一种是“理解”;一种是“了解”. 如果使用的限制词为“理解”,则说明要求考生对这部分概念或理论要求比较高:要求对基本概念理解清晰不含混,且能前后概念贯通;对(反映基本理论的)定理、性质等内容要求理解透彻,使用条件与结论清楚,且能综合前后知识灵活应用. 如果使用的限制词为“了解”,则其要求相对就低一些. 同样对于“计算方法(包括部分性质的使用)”也有两种不同的要求:一种为“掌握”;一种为“会用或会求”. 如果使用的词是“掌握”,说明要求考生不仅能正确使用该计算方法不出错,而且能熟练、灵活运用该方法,包括掌握某些方法中的技巧点;如果使用的是“会用、会求”,则对此类计算要求相对低些. 因此考生应针对不同的要求把握复习的重点与恰当地分配时间.

二、考试内容解析

这部分内容主要是对《数学考试大纲》所包含的知识点进行全面的阐述,尤其是对常考题型中所反映出的考点、重点、难点进行深入的讲解. 我们在部分内容的讲述中加入了“评注”,归纳和分析了历届考生在考卷中所反映出的对知识点的缺失、理解不到位之处或常犯的基本概念和基本技能方面的错误,同时给出了相应的正确理解及注意事项. 对有些较难理解或掌握之处还配有适当的例题,以加深考生对基本概念的正确理解、对基本理论的深入掌握和对计算方法的熟练应用.

三、常考题型及其解法与技巧

这部分是本书的精华所在.

首先,我们将历年上千个考题进行了梳理分类,归纳成 100 种题型(其中微积分 50 种,线性代数 29 种,概率论与数理统计 21 种),使考生对茫茫题海先有一个总体宏观上的清晰把握. 考生对每一种题型中各个考题进行深入细致地学习研究,可以把握该种题型的命题规律与题型特点,掌握该题型的解题思路,学习解答该题型的解题技巧. 考生对每章中所包含的各种题型的学习,可逐步把握本章的知识点与考点,最终达到对本章的各个知识点能够融会贯通的境地.

其次,我们对每一个考题都给出详细的解答,对某些较难的或有典型意义的考题,在作详细解答之前,首先给出解题的“思路分析”,不仅能使考生了解本题所要考查的知识点、学到这个题的具体求解方法,而且能学到如何来分析这个题的求解过程,使考生不仅“知其然”,而且能“知其所以然”.在详细解答之后,部分选题给出了“评注”.“评注”主要是对这类题型的解题方法作一个归纳、总结、提炼:或上升到一般规律,或指出其难点所在,或指出其技巧点所在等等.考生掌握了一般规律,就不仅仅掌握了当前题的求解方法,还可以了解这类题型的解题规律,进而了解这类题的命题规律及今后可能的出题方向;掌握了数学题的解题技巧,往往可以事半功倍.经常有这样的情形:一个考研题用常规的解法可能需要 12 ~ 14 分钟,但若掌握了某些技巧点,也许只要六七分钟,甚至三四分钟,能在考场上节约出几分钟,对考生来说该是多么珍贵啊! 而技巧的背后实质上是对概念进一步的深入理解.我们相信技巧点的掌握对考生今后在考场上应试必将发挥巨大的作用.在一些题的最后给出了“典型错误”,列出了在历年试卷中常见且又是考生易犯的典型错误,以警示考生避免今后犯类似错误.

我们深信考生按照“了解内容,把握要求,熟悉题型,掌握思路、方法与技巧”的宗旨深入学习本书,对今后考研数学取得高分必将有极大的帮助.

本书一方面总结了作者们多年的考研数学辅导经验,同时也参考了以往的数学考试大纲解析及其他考研数学复习参考书,在此就不再一一提及,谨对上述所有的相关作者表示衷心的感谢!

第一部分 微 积 分

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限与右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

考试内容解析

一、函数

(一) 函数的概念

定义 1.1 设在某个过程中,有两个变量 x 和 y,对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某一个确定的规则总有相应的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$.

(二) 函数的性质

1. 奇偶性

设 $y=f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称,如果对于 I 内任意一点 x 恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 I 内的偶函数;如果恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为 I 内的奇函数.

评注:(1) 在直角坐标系中,偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于原点对称;
(2) 可导奇函数的导函数是偶函数;
(3) 可导偶函数的导函数是奇函数;
(4) 连续奇函数的原函数是偶函数;
(5) 连续偶函数的原函数不一定是奇函数.

2. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 M,当 $x\in X$ 时,恒有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有上界;设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 m,当 $x\in X$ 时,恒有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在 X 上有下界;设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在常数 $M>0$,当 $x\in X$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

评注:(1) 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 存在极限,则存在该点的一个去心邻域 U,在该邻域内 $f(x)$ 有界;
(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 任一个邻域内无界,反之不成立;
(3) 闭区间上的连续函数必定为有界函数. 如果 $f(x)$ 为 $(a,+\infty)$ 内的连续函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 都存在,则 $f(x)$ 为 $(a,+\infty)$ 内的有界函数;
(4) 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界;
(5) 如果存在数列 $\{x_n\}$ $(x_n\in I)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$,则 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

3. 周期性

设 $f(x)$ 定义在 I 上,若存在 $T>0$,对任意的 $x\in I$,必有 $x\pm T\in I$,并且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数. 使得关系式 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T,称为 $f(x)$ 的最小周期,简称为函数 $f(x)$ 的周期.

评注:(1) 可导周期函数的导函数是周期函数;
(2) 连续周期函数的原函数不一定是周期函数.

4. 单调性

设 $f(x)$ 定义在区间 I 内,如果对于该区间内的任意两点 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加(减少).

评注:判定函数 $f(x)$ 单调性的方法为:① 简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定;② 复杂的初等函数或可导的抽象函数,用微分学的单调性判定定理来判定.

(三) 反函数、复合函数、初等函数、分段函数、隐函数

1. 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R. 若任意 $y\in R$,有唯一确定的 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,则记为 $x=f^{-1}(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数.

评注:(1) 有时,也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在 D 上单调,值域为 R,则在 R 上 $y=f(x)$ 存在单调的反函数.

2. 复合函数

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 $\widetilde{D}$,值域为 $\widetilde{R}$. 若 $D\cap\widetilde{R}\neq\varnothing$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数,它的定义域为 $\{x\mid x\in\widetilde{D}$ 且 $\varphi(x)\in D\}$.

3. 初等函数

定义 1.4 由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的,并能用一个数学表达式表示的函数,称为初等函数.

评注:六类基本初等函数为:

$y=C$(常数);$y=x^{\alpha}$;$y=a^{x}(a>0,a\neq1)$;$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$;

$y=\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$;$y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$.

4. 分段函数

定义 1.5 在定义域内的不同范围用不同表达式表示的函数叫分段函数.

评注:常见的分段函数有:

(1) 绝对值函数 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

(2) 符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$

(3) 取整函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

5. 隐函数

定义 1.6 如果在方程 $F(x,y)=0$ 中,当 x 取某区间内的任一值时,相应地总有满足这一方程的唯一的 y 值存在,那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

二、极限

(一) 概念

定义 1.7 若对于任意给定的正数 ε,总存在自然数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

例 1.0.1 数列 $\{x_n\}$ 收敛于实数 a 等价于(　　).

(A) 对任给 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内有数列的无穷多项

(B) 对任给 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内有数列的有穷多项

(C) 对任给 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外有数列的无穷多项

(D) 对任给 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外有数列的有穷多项

分析:本题考查对数列极限的定义的理解.

解:例如数列 $1,-1,1,-1,\cdots$ 没有极限. 但若令 $a=1$,则对任给 $0<\varepsilon<1$,在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ 内(外)总有数列的无穷多项,由此知(A)、(C)不正确;又如,令 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$,其极限值为 0,但对任给 $0<\varepsilon<1$,在区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内有无穷多项,所以(B)不正确;由排除法可知(D)正确.

事实上有这样一个正确的命题"若对任意给定的 $\varepsilon>0$,数列 $\{u_n\}$ 中仅有有限项不满足 $|u_n-a|<\varepsilon$,则数列必定以 a 为极限",故应选(D).

典型错误:选择(A),其原因没能够搞清楚"等价"即为充分必要条件.

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时都有定义,若对于任意给定的正数 ε,总存在正数 X,当 $|x|>X$ 时,恒有

$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

定义 1.9　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义,若对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

评注:(1) 在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中,$x\to x_0$ 指 x 从 x_0 左右两侧趋于 x_0. 如果 x 从 x_0 左侧趋于 x_0(记作 $x\to x_0^-$),函数 $f(x)$ 与常数 A 无限接近,则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. 同样,如果 x 从 x_0 右侧趋于 x_0(记作 $x\to x_0^+$),函数 $f(x)$ 与常数 A 无限接近,则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;

(2) 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 存在极限的充要条件是其左右极限都存在且相等;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$,反之一般不成立;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$.

(二) 极限的性质

1. 保号性

定理 1.1　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则存在 x_0 的一个去心邻域,在该邻域内恒有 $f(x)>0$.

定理 1.2　若存在 x_0 的一个去心邻域,在该邻域内 $f(x)>0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant 0$.

2. 唯一性

定理 1.3　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$.

3. 局部有界性

定理 1.4　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则存在 $\delta>0$,使 $f(x)$ 在 $U=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 内有界.

(三) 极限存在准则

1. 夹逼准则

设在 x_0 的某个去心邻域(或 $|x|>M>0$)内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2. 单调有界准则

单调有界数列必有极限.

评注:(1) 单调增加数列,如有上界,则该数列必有极限;

(2) 单调减少数列,如有下界,则该数列必有极限;

(3) 单调不减数列,如有上界,则该数列必有极限;

(4) 单调不增数列,如有下界,则该数列必有极限.

(四) 重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$,　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{x}=k$($k$ 为常数)

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\mathrm{e}^k$,　$\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^k$($k$ 为常数)

(五) 极限的运算法则

1. 极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\overset{\text{存在}}{=\!=\!=}A$,　$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\overset{\text{存在}}{=\!=\!=}B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

2. 在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 一些特殊情况下的运算结论

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=+\infty$；

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=-\infty$；

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$g(x)$在$x_0$的某个去心邻域内有界，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=0$；

(4) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$g(x)$在$x_0$的某个去心邻域内有界，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\infty$；

(5) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\xlongequal{\text{存在}}A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

评注：(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\xlongequal{\text{存在}}A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$不存在；又若$A\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$不存在；

(2) 当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在时，在该极限过程中$f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限均不能确定.

三、无穷小与无穷大

(一) 无穷小的定义

定义 1.10　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数$f(x)$是$x\to x_0$时的无穷小.

(二) 无穷小的性质

性质 1　有限多个无穷小的和、差、积仍然是无穷小；

性质 2　有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

例 1.0.2　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$.

分析：本题似乎无法下手，我们先将$\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$恒等变形后，再利用无穷小的性质来求.

解：由于

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi&=\sin[(\sqrt{n^2+1}\,\pi-n\pi)+n\pi]\\&=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi-n\pi)\\&=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},\end{aligned}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，所以$\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$是$n\to\infty$时的无穷小，又$(-1)^n$有界，于是$(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$是$n\to\infty$时的无穷小，故

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)=0.$$

(三) 无穷小与极限的关系

定理 1.5　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件为$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

例 1.0.3　证明：若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则必有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

证明：因为　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$，由极限和无穷小的关系得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=m+\alpha(x)\text{，其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$$

于是

$$f(x)=[m+\alpha(x)]g(x),$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}[m\cdot g(x)+\alpha(x)\cdot g(x)]=0.$$

(四) 无穷小比较

定义 1.11　设$\alpha(x)$，$\beta(x)$是同一自变量变化过程中的无穷小，且$\beta(x)\neq 0$，而$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也是此变化过程中的

极限：

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq0$ 为常数$)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小；

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

（五）等价无穷小的替换定理

定理 1.6 设 $\alpha(x),\beta(x),\tilde{\alpha}(x),\tilde{\beta}(x)$ 都是同一自变量变化过程中的无穷小，且 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x),\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$，则

$$\lim\frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)}=\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\beta(x)g(x)}=\lim\frac{\alpha(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}=\lim\frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}.$$

评注：(1) 求极限时，整个式子的乘、除因子可用其等价无穷小来代换，加、减时不能用等价无穷小代换，部分式子的乘、除因子也不能用等价无穷小代换；

(2) 几个常用的等价无穷小代换

设 $x\to x_0$ 时，$u=u(x)\to0$，则当 $x\to x_0$ 时，

$$\sin u\sim u,\quad \arcsin u\sim u,\quad \tan u\sim u,\quad \arctan u\sim u,1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2,$$

$$\ln(1+u)\sim u,\quad a^u-1\sim u\ln a,e^u-1\sim u,\quad (1+u)^\alpha-1\sim\alpha u.$$

（六）无穷小的阶

定义 1.12 设 α,β 都是同一自变量变化过程中的无穷小，若存在 $k>0$ 使得$\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=c$（非零的常数），则称在同一自变量变化过程中 α 是 β 的 k 阶无穷小.

例 1.0.4 $1+x^2-e^{x^2}$ 当 $x\to0$ 时是 x 的________阶无穷小（填数字）.

分析：确定 $1+x^2-e^{x^2}$ 当 $x\to0$ 时是 x 的多少阶无穷小，即确定常数 n 使得极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^n}$为非零常数.

解：因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2xe^{x^2}}{nx^{n-1}}=2\lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{nx^{n-2}}=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{nx^{n-2}},$$

要使上极限值是非零常数，充要条件是 $n-2=2$，即 $n=4$，所以是 4 阶无穷小.

（七）无穷大的定义

定义 1.13 任给 $M>0$，存在小正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

注意：如果存在一个数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=c$（常数），则 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

例 1.0.5 判断 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=x\sin x$ 是否为无穷大?

解：取 $x_n=2n\pi$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，而 $f(x_n)=2n\pi\sin(2n\pi)=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，于是 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=x\sin x$ 不是无穷大.

（八）无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

四、连续

(一) 函数的连续性

1. 连续的定义

定义 1.14　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 1.15　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

评注：判断函数在某个具体点是否连续，特别是判断分段函数在分段点是否连续，一般用第二个定义来完成.

2. 左、右连续的定义

定义 1.16　设 $f(x)$ 在点 x_0 的左(右)侧某邻域(包括点 x_0)有定义，并且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+)}} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左(右)连续.

命题：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续同时又右连续.

评注：(1) 分段函数分段点的连续性的讨论常要考虑左、右连续；
(2) 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续；
(3) 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(二) 连续函数的运算性质

1. 连续函数的四则运算性质

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 也连续；

2. 复合函数的连续性

若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续；

3. 反函数的连续性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调的连续函数，其值域为 (m,n)，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 (m,n) 上也是连续的.

评注：一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

(三) 间断点及其分类

1. 间断点的定义

定义 1.17　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的任何邻域内总有异于 x_0 而属于函数 $f(x)$ 定义域内的点，且函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点.

评注：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内或单侧去心邻域内有定义，且函数 $f(x)$ 在点 x_0 不满足下列三个条件之一：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义；　(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；　(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

则 x_0 就是函数 $f(x)$ 的一个间断点.

2. 间断点的分类

第一类间断点：左、右极限都存在的间断点；左、右极限都存在且相等的间断点又称为可去间断点；左、右极限都存在且不相等的间断点又称为跳跃间断点.

第二类间断点：左、右极限至少有一个不存在的间断点；当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时 $f(x)\to\infty$，又称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

(四) 闭区间上连续函数的性质

1. 最值定理

如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间上至少存在两点 x_1,x_2 满足：任意的 $x\in[a,b]$，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$.

2. 介值定理

如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，m,M是函数在该区间上的最小与最大值，则对任意的$\mu\in[m,M]$，在$[a,b]$上至少存在一点ξ，满足$f(\xi)=\mu$.

3. 零点定理

如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且满足$f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$.

评注：(1) 如果$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且满足$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to b^-}f(x)<0$，则在开区间$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使得$f(\xi)=0$（此结论也叫广义零点定理）；

(2) 如$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$|f(x)|$在$[a,b]$上连续；

(3) 如$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，则$\max\{f(x),g(x)\}$，$\min\{f(x),g(x)\}$在$[a,b]$上连续.

常考题型及其解法与技巧

题型一 求函数表达式

例 1.1.1 设$f(x)=\begin{cases}x,x\leqslant 0,\\x+x^2,x>0,\end{cases}$则$f[f(x)]=$________.

分析：本题考查分段函数的复合函数，一般采用分析法来解决，即抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，求出复合函数的表达式，这种方法称为分析法. 适应于分段函数参与的复合函数求表达式.

解：$f[f(x)]=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant 0,\\f(x)+f^2(x),f(x)>0,\end{cases}$而$f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 0$，$f(x)>0\Leftrightarrow x>0$，所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}f(x),x\leqslant 0,\\f(x)+f^2(x),x>0\end{cases}=\begin{cases}x,x\leqslant 0,\\x+2x^2+2x^3+x^4,x>0.\end{cases}$$

例 1.1.2 设$y=f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1,\\x^2,1\leqslant x\leqslant 4,\\2^x,4<x<+\infty,\end{cases}$求$f^{-1}(x)$.

分析：分段函数求反函数，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

解：由$y=x,-\infty<x<1$可得$x=y,-\infty<y<1$；

由$y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4$可得$x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$；

由$y=2^x,4<x<+\infty$可得$x=\log_2 y,16<y<+\infty$.

于是$y=f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1,\\x^2,1\leqslant x\leqslant 4,\\2^x,4<x<+\infty\end{cases}$的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\\sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\\log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

评注：求函数表达式有时需涉及导数、积分、级数、微分方程等知识，对于这些题型将在后面的章节中讨论.

题型二 函数性质的理解

例 1.2.1 当$x\to 0$时，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　).

(A) 无穷小量　　(B) 无穷大量　　(C) 有界量非无穷小量　　(D) 无界但非无穷大