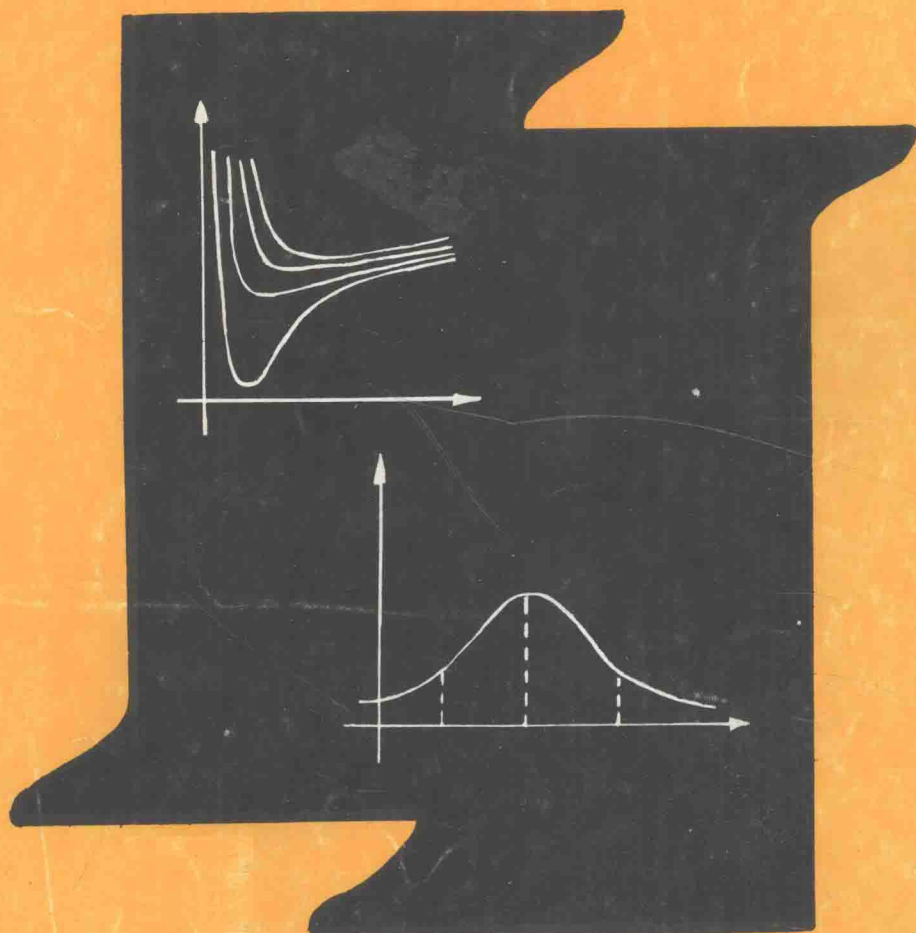


高等院校试用教材

应用数学

刘思峰 孙书安 主 编



河南科学技术出版社

高等院校试用教材

应 用 数 学

刘思峰 孙书安 主编

河南科学技术出版社

一九九三年七月

豫新登字 02 号

内 容 提 要

应用数学是高等院校的重要基础课。本书包括线性代数与概率统计两大部分。线性代数部分主要内容有：行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，二次型及线性空间、线性变换等；概率统计部分的主要内容有：随机事件与概率，随机变量及其分布，多维随机变量，随机变量的数字特征，参数估计，假设检验，方差分析，回归分析等。各章后配有习题，书末附有参考答案与提示，供读者学习时参考。

本书可作为高等院校农、林、医、经济管理，财会等专业的应用数学教材，也可作为农业、工矿企业科技人员、管理人员的学习参考书。

应 用 数 学

刘思峰 孙书安 主编

责任编辑 张 鹏

河南科学技术出版社出版发行

解放军测绘学院教学实习印刷厂印刷

787×1092 毫米 16 开本 18 印张 451 千字

1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—3,000 册

ISBN7-5349-1234-2/T·256

定 价：12.60 元

前 言

随着我国社会主义经济建设和经济体制改革的深入发展,数学方法的研究和应用日益受到广大科技人员和实际工作者的重视,定量分析方法已成为科研人员的重要工具,这就对数学教学提出了更高的要求。为适应我国教育改革和四化建设的需要,我们和其他兄弟院校共同组织编写了这套教材。

这套教材共分两册:《高等数学》和《应用数学》。本教材与同类教材相比,具有以下三个特点:

一、全套教材包括了微积分、线性代数、概率论与数理统计的基本内容。全书结构严谨,重点突出,内容深入浅出,通俗易懂。在基本概念和方法的阐述上,着重于思路分析,注意培养学生的思维能力,可读性强。

二、本套教材既顾及教学大纲的要求,又考虑了高等教育教学改革的需要。教材突出实用性,注意增加了经济建设中的实例及管理技术方法。无论是基本概念还是基本运算都考虑了学用结合,摒弃了一些不必要的繁杂的推导过程。

三、为加深对基本概念的理解,掌握计算方法,提高计算能力,本书各章节后面都配有足够的习题,难易适当。书后附有答案,供教学时参考使用。

讲授《高等数学》通常需要 90—100 学时,《应用数学》通常需要 110—120 学时。书中某些章节加了“*”号,选用教材时可根据教学需要及学时适当安排或略去不讲。

本书可作为高等院校农、林、医、经济管理、财会等专业的教材,也可作为农业、工矿企业科技人员、管理人员的参考书。

本书由河南农业大学、河南医科大学、郑州轻工业学院、河北农业技术师范学院、河南建筑职工大学、河南省计划统计学校等院校联合编写。

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,欢迎使用本教材的同志批评指正。

编 者

1993 年 3 月

《应用数学》编委会

主 编 刘思峰 孙书安

主 审 赵 理 丁学智

(以下以姓氏笔画为序)

副主编 马湘玲 刘九芬 郑国清

信愉平 候云先 党耀国

曹殿立

编 委 马玉肖 王莲花 叶耀军

冯密罗 李锁柱 陈铁生

林 文

绘 图 娄爱真

目 录

上编 线性代数

第一章 行列式	(1)
§ 1.1 行列式的概念	(1)
一、二阶行列式及三阶行列式	(1)
二、 n 阶行列式	(2)
§ 1.2 行列式的性质及计算方法	(4)
一、行列式性质	(4)
二、 n 阶行列式的展开式	(9)
§ 1.3 线性方程组与克莱姆规则	(9)
一、克莱姆规则	(9)
二、 n 个未知量的齐次线性方程组的解	(12)
习题一	(12)
第二章 矩阵	(14)
§ 2.1 矩阵的概念	(14)
§ 2.2 矩阵的运算	(15)
一、矩阵的加法	(15)
二、数乘矩阵	(15)
三、矩阵的乘法	(16)
四、方阵的行列式	(18)
五、矩阵的转置	(18)
§ 2.3 逆矩阵	(19)
§ 2.4 几种特殊矩阵	(22)
一、对角矩阵	(22)
二、数量矩阵	(23)
三、梯形矩阵与三角形矩阵	(23)
四、对称矩阵与反对称矩阵	(24)
五、正交矩阵	(24)
§ 2.5 分块矩阵	(25)
一、分块矩阵的运算法则	(25)
二、分块对角形方阵	(27)
§ 2.6 初等变换与初等矩阵	(28)

一、初等变换与初等矩阵	(28)
二、求逆矩阵的初等变换法	(31)
§ 2.7 矩阵的秩	(33)
一、矩阵秩的概念	(33)
二、等价矩阵	(37)
习题二	(38)
第三章 n 维向量	(42)
§ 3.1 n 维向量的概念	(42)
一、数域	(42)
二、 n 维向量	(42)
§ 3.2 向量组的线性相关性	(44)
一、线性相关性的概念	(44)
二、向量组的线性相关性	(45)
三、向量组线性相关性的判定	(47)
§ 3.3 向量组的秩和极大线性无关组	(48)
一、等价向量组	(49)
二、向量组的秩与极大线性无关组	(51)
三、矩阵的列秩与行秩	(53)
习题三	(53)
第四章 线性方程组	(55)
§ 4.1 线性方程组的相容性	(55)
§ 4.2 消元法	(57)
一、同解定理	(57)
二、消元法解线性方程组	(58)
§ 4.3 线性方程组解的结构	(62)
一、齐次线性方程组解的结构	(62)
二、非齐次线性方程组解的结构	(64)
习题四	(66)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(68)
§ 5.1 向量的内积	(68)
§ 5.2 标准正交向量组	(69)
§ 5.3 矩阵的特征值与特征向量	(71)
§ 5.4 相似矩阵	(74)
习题五	(76)
第六章 二次型	(78)
§ 6.1 线性变换的基本概念	(78)
§ 6.2 二次型及其标准形	(79)
§ 6.3 用满秩变换化二次型为标准形	(80)
§ 6.4 用正交变换化二次型为标准形	(84)

§ 6.5 正定二次型·····	(87)
习题六·····	(88)
第七章 线性空间 ·····	(90)
§ 7.1 线性空间的概念·····	(90)
§ 7.2 线性空间的基与向量的坐标·····	(92)
§ 7.3 基变换与坐标变换·····	(94)
§ 7.4 线性子空间·····	(97)
习题七·····	(97)
第八章 线性变换 ·····	(99)
§ 8.1 线性变换的概念·····	(99)
§ 8.2 线性变换的运算·····	(100)
§ 8.3 线性变换的矩阵·····	(102)
§ 8.4 线性变换的值域与核·····	(106)
§ 8.5 不变子空间·····	(107)
习题八·····	(108)

下编 概率论与数理统计

第九章 随机事件与概率 ·····	(109)
§ 9.1 随机事件·····	(109)
一、随机现象·····	(109)
二、随机试验与样本空间·····	(109)
三、随机事件·····	(110)
四、事件的运算·····	(110)
§ 9.2 随机事件的概率·····	(112)
一、古典概率·····	(112)
二、统计概率·····	(113)
三、几何概率·····	(113)
四、概率的数学定义与性质·····	(114)
§ 9.3 条件概率与乘法公式·····	(115)
一、条件概率·····	(115)
二、乘法公式·····	(117)
§ 9.4 事件的独立性·····	(118)
§ 9.5 贝努里概型·····	(120)
§ 9.6 全概率公式与贝叶斯公式·····	(122)
习题九·····	(123)
第十章 随机变量 ·····	(127)
§ 10.1 随机变量及其分布函数·····	(127)

一、随机变量·····	(127)
二、随机变量的分布函数·····	(127)
§ 10.2 离散型随机变量·····	(129)
一、离散型随机变量的性质·····	(129)
二、几种典型的离散型随机变量·····	(129)
§ 10.3 连续型随机变量·····	(131)
§ 10.4 正态分布·····	(135)
§ 10.5 随机变量函数的分布·····	(137)
习题十·····	(139)
第十一章 多维随机变量 ·····	(141)
§ 11.1 联合分布与边缘分布·····	(141)
一、联合分布函数与边缘分布函数·····	(141)
二、联合分布列与边缘分布列·····	(142)
三、联合密度与边缘密度·····	(143)
§ 11.2 随机变量的独立性·····	(146)
§ 11.3 n 维随机变量·····	(147)
一、分布函数与密度函数·····	(147)
二、独立性·····	(147)
三、 n 维正态分布·····	(147)
§ 11.4 多维随机变量的函数·····	(148)
一、二维随机变量的函数分布·····	(148)
二、几种常用分布·····	(149)
习题十一·····	(152)
第十二章 随机变量的数字特征 ·····	(155)
§ 12.1 数学期望·····	(155)
一、离散型·····	(155)
二、连续型·····	(156)
三、 n 维随机变量的数学期望·····	(157)
四、数学期望的性质·····	(157)
§ 12.2 方差·····	(159)
一、随机变量的方差·····	(159)
二、方差性质·····	(161)
三、矩·····	(162)
§ 12.3 协方差和相关系数·····	(163)
§ 12.4 协方差矩阵与相关矩阵·····	(165)
习题十二·····	(167)
第十三章 极限定理 ·····	(170)
§ 13.1 切比谢夫不等式·····	(170)
§ 13.2 大数定律·····	(171)

§ 13.3 中心极限定理	(173)
习题十三	(175)
第十四章 样本和抽样分布	(176)
§ 14.1 基本概念	(176)
一、总体、个体和简单随机子样	(176)
二、统计量与经验分布	(177)
§ 14.2 常用统计量的分布	(179)
习题十四	(181)
第十五章 参数估计	(182)
§ 15.1 点估计	(182)
一、矩法	(182)
二、极大似然法	(183)
§ 15.2 估计量的评选标准	(185)
一、无偏性	(185)
二、有效性	(187)
三、一致性	(187)
§ 15.3 区间估计	(188)
一、置信区间	(188)
二、总体均值的区间估计	(189)
三、二个正态总体均值差的区间估计	(190)
四、单个正态总体方差的区间估计	(191)
五、两个正态总体方差比的区间估计	(192)
习题十五	(193)
第十六章 假设检验	(195)
§ 16.1 假设检验概述	(195)
§ 16.2 一个正态母体的参数检验	(197)
§ 16.3 两个正态母体的参数检验	(200)
§ 16.4 非参数检验	(204)
习题十六	(207)
第十七章 方差分析	(209)
§ 17.1 单因素试验的方差分析	(209)
一、问题的提出	(209)
二、方差分析的基本原理	(209)
§ 17.2 双因素试验的方差分析	(218)
一、无交互作用情形的方差分析	(218)
二、有交互作用情形的方差分析	(223)
习题十七	(228)
第十八章 回归分析	(230)
§ 18.1 引言	(230)

§ 18.2 一元线性回归分析·····	(231)
一、线性模型·····	(231)
二、最小二乘估计·····	(232)
三、回归方程的显著性检验·····	(234)
§ 18.3 利用回归方程进行预测和控制·····	(238)
§ 18.4 化非线性回归为线性回归·····	(240)
§ 18.5 多元线性回归介绍·····	(243)
一、数学模型·····	(243)
二、最小二乘估计·····	(243)
三、显著性检验·····	(245)
习题十八·····	(247)
习题答案与提示·····	(249)
附表 1 标准正态分布表·····	(262)
附表 2 普阿松分布表·····	(264)
附表 3 t 分布的双侧临界值表·····	(266)
附表 4 χ^2 分布上侧临界值表·····	(267)
附表 5 F 分布临界值表·····	(269)
附表 6 相关系数显著性检验表·····	(278)

上编 线性代数

第一章 行列式

行列式是数学研究中的一个重要工具,在许多科学技术领域里具有广泛的应用.本章主要介绍行列式的概念、基本性质、计算方法以及利用行列式解线性方程组的克莱姆规则.

§ 1.1 行列式的概念

一、二阶行列式及三阶行列式

在求解线性方程组的过程中,为便于计算,我们引入行列式的概念.

二阶行列式定义

设 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 表示四个数,引进符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示一个数: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, 称这个符号为**二阶行列式**;通常用 D 来表示,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (1.1.1)$$

构成二阶行列式的四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**;它们排成两行两列,横的各排称为行列式的**行**,纵的各排称为行列式的**列**.元素 a_{ij} 表示元素在行列式中的位置是第 i 行第 j 列的交点,下标 i 称为**行指标**,下标 j 称为**列指标**.

三阶行列式的定义

引进一个符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

来表示

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (1.1.2)$$

则称此符号为**三阶行列式**,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(1.1.2) 式称为三阶行列式的一个**展开式**.

三阶行列式有三行三列.

根据二阶行列式和三阶行列式的定义,则有:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

即: $D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.1.3)$$

(1.1.3) 式称为三阶行列式的完全展开式.

例 1.1.1

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-2-3) - 3(1-3) - (-1-2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

二、 n 阶行列式

按照递归法, n 阶行列式可如下定义:

定义 1.1.1 一阶行列式 $|a|$ 定义为 $|a| = a$. (注意: 勿与绝对值符号混淆), 二阶行列式由 (1.1.1) 式定义, 当 $n \geq 2$ 时, 假如 $(n-1)$ 阶行列式已定义, 那么 n 阶行列式定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

上式左边的 n 阶行列式由 n^2 个数 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 构成, 它们排成 n 行 n 列, 横的各排叫做**行**, 纵的各排叫做**列**, 数 a_{ij} 叫做行列式第 i 行第 j 列的**元素**, 第一个下标 i 叫做**行指标**, 第二个下标 j 叫做**列指标**.

下面介绍余子式与代数余子式.

定义 1.1.2 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的行与列划去后剩下的元素 (不改变它们的相对位置) 所构成的 $(n-1)$ 阶行列式, 称为元素 a_{ij} 的**余子式**, 记为 M_{ij} ; M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子, 叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**, 记为 A_{ij} ,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

引入了余子式和代数余子式的概念, n 阶行列式定义可简化为:

定义 1.1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = a_{11} M_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} M_{n1}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \cdots + a_{n1} A_{n1}$$

上式叫做 n 阶行列式按第一列元素展开的展开式.

例 1.1.2 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 按照定义有

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+1} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} (-5) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + \\ &(-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 40 \end{aligned}$$

上面是利用行列式第一列元素的展开式来定义行列式的. 下面证明, 如果改用第一行元素, 也有相同的结果.

定理 1.1.1 n 阶行列式 D 等于它的第一行所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和(即按第一行展开):

$$D = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} \quad (1.1.4)$$

证 对行列式的阶数 n , 用数学归纳法.

$n = 2$ 时命题显然成立.

设 $n = m - 1$ 时, 式(1.1.4) 成立, 现证明当 $n = m$ 时, 式(1.1.4) 成立.

$$D = \sum_{i=1}^m a_{i1} A_{i1} = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^m (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$$

其中余子式 M_{i1} 是 $m - 1$ 阶行列式:

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,m} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

(注意: 列指标 $j = 2$ 所标实际在第一列的位置), 按假设, 它可以按第一列展开, 即

$$M_{i1} = \sum_{j=2}^m (-1)^{1+(j-1)} a_{1j} (M_{i1})_{1j} = \sum_{i=2}^m (-1)^j a_{1j} (M_{i1})_{1j} \quad (i \neq 1)$$

这里 $(M_{i1})_{1j}$ 表示行列式 M_{i1} 中元素 a_{1j} ($j = 2, \cdots, m$) 的余子式, 它是由行列式 D 中先划去第 1 列, 第 i ($i \neq 1$) 行, 然后再划去第 1 行, 第 j ($j \neq 1$) 列所得到的行列式; 它与先划去第 1 行, 第 j 列, 后划去第 i 行, 第 1 列所得到的行列式相同, 即应有 $(M_{i1})_{1j} = (M_{1j})_{i1}$. ($i \neq 1, j \neq 1$) 这样

$$D = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^m (-1)^{i+1} a_{i1} \left[\sum_{j=2}^m (-1)^j a_{1j} (M_{1j})_{i1} \right]$$

再由公式

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

得:

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m (-1)^{1+i+j} a_{i1} a_{1j} M_{1j} M_{i1} \\ &= a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^m (-1)^{1+j} a_{1j} \left[\sum_{i=2}^m (-1)^i a_{i1} M_{1j} M_{i1} \right] \\ &= a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^m (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^m a_{1j} A_{1j} \end{aligned}$$

§ 1.2 行列式的性质及计算方法

一、行列式性质

行列式的性质是计算行列式以及进一步研究矩阵的重要依据.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为行列式 D 的转置行列式.

性质 1.2.1 n 阶行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等, 即 $D = D^T$.

证 当 $n = 2$ 时显然成立, 设它对于 $n = m - 1$ 时成立, 现证明当 $n = m$ 时成立. 按定理 1.1.1, 把行列式 D^T 按第一行元素展开得:

$$D^T = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} M_{i1}^T$$

因为 M_{i1}^T 是 $m - 1$ 阶行列式, 由假设知: $M_{i1}^T = M_{i1}$, 所以

$$D^T = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum_{i=1}^m a_{i1} A_{i1} = D$$

注: 行列式的“行”所具有的性质, 对“列”也一定成立, 反之亦然.

性质 1.2.2 互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号.

证 要证明本命题成立,只要能证明互换相邻两行的情形本命题成立即可. 因为互换行列式 D 的任意两行,可由多次互换相邻两行来实现. 比如,设互换行列式 D 的第 i 行和第 j 行 ($1 \leq i < j \leq n$) 所得到的行列式记为 Δ ,并设这两行间夹有 s 行,则可以逐步把行列式 D 的第 i 行和它下面的第 $i+1, i+2, \dots, i+s$ 行互换,然后再把第 j 行逐步和它上面的行互换,最后达到第 i 行的位置,施行这样的 $2s+1$ 步相邻两行互换,就可得到行列式 Δ ,如果本命题关于相邻两行的情形已证得,则由于行列式 Δ 是由行列式 D 通过 $2s+1$ 次互换相邻两行而得出的,因而改变了 $2s+1$ 次符号,于是有

$$\Delta = -D$$

今用归纳法来证明互换相邻两行的情形本命题成立. 设将行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第 i 行与第 $i+1$ 行互换 ($i=1, 2, \dots, n-1$), 并设互换后得到的行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=2$ 时,显然有

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -D$$

设对于 $n-1$ ($n \geq 3$) 阶行列式互换相邻两行的情形命题成立. 今证对于 n 阶行列式的情形命题仍然成立. 将行列式 Δ 按第一列展开,则有

$$\Delta = (-1)^{1+1}a_{11}\Delta_{11} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}\Delta_{i1} + (-1)^{i+1+1}a_{i1}\Delta_{i+1,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\Delta_{n1}$$

其中 Δ_{k1} 表示 Δ 中第 k 行第一列元素的余子式 ($k=1, 2, \dots, n$). 由假设,应有

$$\Delta_{k1} = -M_{k1} \quad (k \neq i, i+1).$$

当 $k=1, i+1$ 时, $\Delta_{i1} = M_{i+1,1}$, $\Delta_{i+1,1} = M_{i1}$.

这里 M_{k1} 表示 D 中第 k 行第一列元素的余子式,于是得

$$\begin{aligned} \Delta &= -(-1)^{1+1}a_{11}M_{11} - \cdots - (-1)^{i+1+1}a_{i+1,1}M_{i+1,1} - (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} \\ &\quad - \cdots - (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= -\left[\sum_{i=1}^n a_{i1}A_{i1}\right] = -D. \end{aligned}$$

推论 1.2.1 如果行列式有两行(列)对应元素相同,则此行列式为 0.

证 一方面,由于两行对应元素相同,所以互换这两行的行列式 D_1 与没有互换的行列式

D 的值相同, 即 $D_1 = D$. 另一方面, 由性质 2 知: $D_1 = -D$, 所以必有 $D = 0$.

以下性质、推论的证明从略, 读者可作为练习, 自己证明.

性质 1.2.3 把行列式的某一行(列) 的每个元素乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式; 换句话说, 如果行列式某一行(列) 所有元素有公因子, 则可将公因子提到行列式记号外面. 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.2.2 如果行列式 D 中有一行(列) 元素全为零, 则行列式 $D = 0$.

推论 1.2.3 如果行列式有两行(列) 的元素对应成比例, 则行列式的值为零.

性质 1.2.4 如果行列式某一行(列) 元素都是两项的和, 则可把这个行列式化为两个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.5 行列式某一行(列) 的元素加上另一行(列) 对应元素的 k 倍, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注: 该性质常用来简化运算.

性质 1.2.6 行列式 D 等于它任意一行(列) 的元素与它的代数余子式的乘积之和, 即:

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{j1}A_{1j} + a_{j2}A_{2j} + \cdots + a_{jn}A_{nj} \\ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

性质 1.2.7 行列式某一行(列) 的元素与另一行(列) 对应元素的代数余子式的乘积之和为零. 即:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$