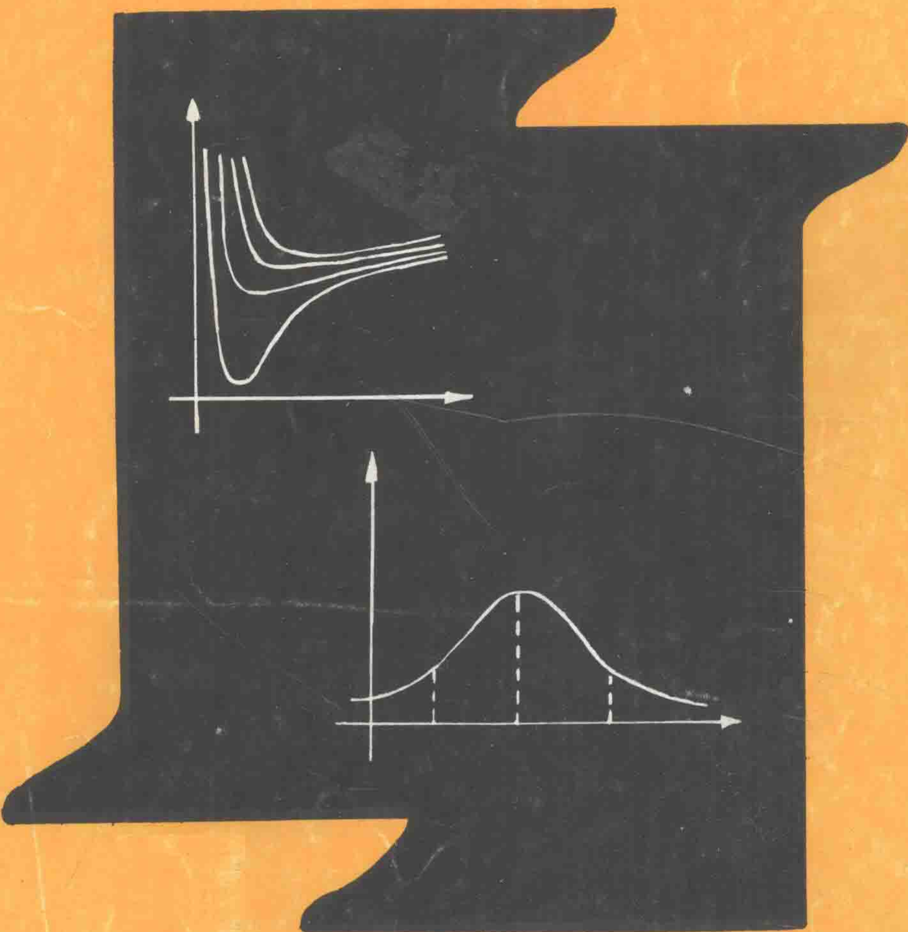
高等院校试用教材

应用数学

刘思峰　孙书安　主　编



河南科学技术出版社

高等院校试用教材

应 用 数 学

刘思峰　孙书安　主编

河南科学技术出版社

一九九三年七月

豫新登字 02 号

内 容 提 要

应用数学是高等院校的重要基础课。本书包括线性代数与概率统计两大部分。线性代数部分主要内容有：行列式，矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，二次型及线性空间、线性变换等；概率统计部分的主要内容有：随机事件与概率，随机变量及其分布，多维随机变量，随机变量的数字特征，参数估计，假设检验，方差分析，回归分析等。各章后配有习题，书末附有参考答案与提示，供读者学习时参考。

本书可作为高等院校农、林、医、经济管理，财会等专业的应用数学教材，也可作为农业、工矿企业科技人员、管理人员的学习参考书。

应 用 数 学

刘思峰　孙书安　主编

责任编辑　张　鹏

河南科学技术出版社出版发行

解放军测绘学院教学实习印刷厂印刷

787×1092 毫米 16 开本 18 印张 451 千字

1993 年 7 月第 1 版　1993 年 7 月第 1 次印刷

印数：1－3，000 册

ISBN7－5349－1234－2/T·256

定　价：12.60 元

前　言

随着我国社会主义经济建设和经济体制改革的深入发展，数学方法的研究和应用日益受到广大科技人员和实际工作者的重视，定量分析方法已成为科研人员的重要工具，这就对数学教学提出了更高的要求。为适应我国教育改革和四化建设的需要，我们和其他兄弟院校共同组织编写了这套教材。

这套教材共分两册：《高等数学》和《应用数学》。本教材与同类教材相比，具有以下三个特点：

一、全套教材包括了微积分、线性代数、概率论与数理统计的基本内容。全书结构严谨，重点突出，内容深入浅出，通俗易懂。在基本概念和方法的阐述上，着重于思路分析，注意培养学生的思维能力，可读性强。

二、本套教材既顾及教学大纲的要求，又考虑了高等教育教学改革的需要。教材突出实用性，注意增加了经济建设中的实例及管理技术方法。无论是基本概念还是基本运算都考虑了学用结合，摒弃了一些不必要的繁杂的推导过程。

三、为加深对基本概念的理解，掌握计算方法，提高计算能力，本书各章节后面都配有足够的习题，难易适当。书后附有答案，供教学时参考使用。

讲授《高等数学》通常需要90－100学时，《应用数学》通常需要110－120学时。书中某些章节加了“*”号，选用教材时可根据教学需要及学时适当安排或略去不讲。

本书可作为高等院校农、林、医、经济管理、财会等专业的教材，也可作为农业、工矿企业科技人员、管理人员的参考书。

本书由河南农业大学、河南医科大学、郑州轻工业学院、河北农业技术师范学院、河南建筑职工大学、河南省计划统计学校等院校联合编写。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，欢迎使用本教材的同志批评指正。

编　者

1993年3月

《应用数学》编委会

主　编　刘思峰　孙书安

主　审　赵　理　丁学智

（以下以姓氏笔画为序）

副主编　马湘玲　刘九芬　郑国清

　　　　信愉平　候云先　党耀国

　　　　曹殿立

编　委　马玉肖　王莲花　叶耀军

　　　　冯密罗　李锁柱　陈铁生

　　　　林　文

绘　图　娄爱真

目　　录

上编　线性代数

下编　概率论与数理统计

上编 线性代数

第一章 行 列 式

行列式是数学研究中的一个重要工具，在许多科学技术领域里具有广泛的应用. 本章主要介绍行列式的概念、基本性质、计算方法以及利用行列式解线性方程组的克莱姆规则.

§1.1 行列式的概念

一、二阶行列式及三阶行列式

在求解线性方程组的过程中，为便于计算，我们引入行列式的概念.

二阶行列式定义

设$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$表示四个数,引进符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$来表示一个数:$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$,称这个符号为**二阶行列式**;通常用$D$来表示,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{1.1.1}$$

构成二阶行列式的四个数$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$叫做行列式的**元素**;它们排成两行两列,横的各排称为行列式的**行**,纵的各排称为行列式的**列**. 元素a_{ij}表示元素在行列式中的位置是第i行第j列的交点,下标i称为**行指标**,下标j称为**列指标**.

三阶行列式的定义

引进一个符号
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
来表示

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{1.1.2}$$

则称此符号为**三阶行列式**,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(1.1.2) 式称为三阶行列式的一个**展开式**.

三阶行列式有三行三列.

根据二阶行列式和三阶行列式的定义,则有:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

即: $D=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.3}$$

(1.1.3) 式称为三阶行列式的**完全展开式**.

例 1.1.1

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2(-2-3) - 3(1-3) - (-1-2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

二、*n* 阶行列式

按照递归法，n 阶行列式可如下定义：

定义 1.1.1 一阶行列式 $|a|$ 定义为 $|a| = a$.(注意：勿与绝对值符号混淆)，二阶行列式由(1.1.1) 式定义，当 $n \geqslant 2$ 时，假如$(n-1)$ 阶行列式已定义，那么 n 阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots\cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

上式左边的 n 阶行列式由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$ 构成，它们排成 n 行 n 列，横的各排叫做**行**，纵的各排叫做**列**，数 a_{ij} 叫做行列式第 i 行第 j 列的**元素**，第一个下标 i 叫做**行指标**，第二个下标 j 叫做**列指标**.

下面介绍余子式与代数余子式.

定义 1.1.2 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的行与列划去后剩下的元素(不改变它们的相对位置)所构成的$(n-1)$阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；M_{ij} 乘以$(-1)^{i+j}$ 所得的式子，叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

引入了余子式和代数余子式的概念，n 阶行列式定义可简化为：

定义 1.1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = a_{11}M_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}M_{21} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots\cdots + a_{n1}A_{n1}$$

上式叫做 n 阶行列式按第一列元素展开的展开式.

例 1.1.2 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 按照定义有

$$D = (-1)^{1+1} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(-5) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 40$$

上面是利用行列式第一列元素的展开式来定义行列式的. 下面证明,如果改用第一行元素,也有相同的结果.

定理 1.1.1 n 阶行列式 D 等于它的第一行所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和(即按第一行展开):

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \tag{1.1.4}$$

证 对行列式的阶数 n,用数学归纳法.

$n = 2$ 时命题显然成立.

设 $n = m - 1$ 时,式(1.1.4) 成立,现证明当 $n = m$ 时,式(1.1.4) 成立.

$$D = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}A_{i1} = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} a_{i1}M_{i1}$$

其中余子式 M_{i1} 是 $m - 1$ 阶行列式:

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots\cdots & a_{i-1,m} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots\cdots & a_{i+1,m} \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

(注意:列指标 $j = 2$ 所标实际在第一列的位置),按假设,它可以按第一列展开,即

$$M_{i1} = \sum_{j=2}^{m} (-1)^{1+(j-1)} a_{1j}(M_{i1})_{1j} = \sum_{i=2}^{m} (-1)^{j} a_{1j}(M_{i1})_{1j} \quad (i \neq 1)$$

这里$(M_{i1})_{1j}$ 表示行列式 M_{i1} 中元素 $a_{1j}(j = 2\cdots\cdots m)$ 的余子式,它是由行列式 D 中先划去第 1 列,第 $i(i \neq 1)$ 行,然后再划去第 1 行,第 $j(j \neq 1)$ 列所得到的行列式;它与先划去第 1 行,第 j 列,后划去第 i 行,第 1 列所得到的行列式相同,即应有$(M_{i1})_{1j} = (M_{1j})_{i1}$. $(i \neq 1, j \neq 1)$

这样

$$D = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}\left[\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j}a_{1j}(M_{1j})_{i1}\right]$$

再由公式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$$

得：

$$\begin{aligned}
D &= a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m}(-1)^{1+i+j}a_{i1}a_{1j}M_{1j}M_{i1} \\
&= a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^{m}(-1)^{1+j}a_{1j}\left[\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i}a_{i1}M_{1j}M_{i1}\right] \\
&= a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^{m}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \\
&= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \\
&= \sum_{j=1}^{m}a_{1j}A_{1j}
\end{aligned}$$

§1.2 行列式的性质及计算方法

一、行列式性质

行列式的性质是计算行列式以及进一步研究矩阵的重要依据.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.2.1 n 阶行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等,即 $D = D^T$.

证 当 $n = 2$ 时显然成立,设它对于 $n = m - 1$ 时成立,现证明当 $n = m$ 时成立. 按定理 1.1.1,把行列式 D^T 按第一行元素展开得：

$$D^T = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\cdot a_{i1}M_{i1}^T$$

因为 M_{i1}^T 是 $m-1$ 阶行列式,由假设知：$M_{i1}^T = M_{i1}$,所以

$$D^T = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} \overset{m}{\underset{i=1}{=}} \sum a_{i1}A_{i1} = D$$

注:行列式的“行”所具有的性质,对“列”也一定成立,反之亦然.

性质 1.2.2 互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号.

证 要证明本命题成立,只要能证明互换相邻两行的情形本命题成立即可.因为互换行列式D的任意两行,可由多次互换相邻两行来实现.比如,设互换行列式D的第i行和第j行($1 \leqslant i < j \leqslant n$)所得到的行列式记为$\triangle$,并设这两行间夹有$S$行,则可以逐步把行列式$D$的第$i$行和它下面的第$i+1, i+2, \cdots\cdots, i+s$行互换,然后再把第$j$行逐步和它上面的行互换,最后达到第$i$行的位置,施行这样的$2s+1$步相邻两行互换,就可得到行列式$\triangle$,如果本命题关于相邻两行的情形已证得,则由于行列式$\triangle$是由行列式D通过$2s+1$次互换相邻两行而得出的,因而改变了$2s+1$次符号,于是有

$$\triangle = -D$$

今用归纳法来证明互换相邻两行的情形本命题成立.设将行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第i行与第$i+1$行互换($i = 1, 2, \cdots, n-1$),并设互换后得到的行列式为

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当$n = 2$时,显然有

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -D$$

设对于$n-1(n \geqslant 3)$阶行列式互换相邻两行的情形命题成立.今证对于n阶行列式的情形命题仍然成立.将行列式$\triangle$按第一列展开,则有

$$\begin{aligned} \triangle = & (-1)^{1+1}a_{11}\triangle_{11} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}\triangle_{i1} + (-1)^{i+1+1}a_{i1}\triangle_{i+1,1} \\ & + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\triangle_{n1} \end{aligned}$$

其中$\triangle_{k1}$表示$\triangle$中第k行第一列元素的余子式($k = 1, 2, \cdots, n$).由假设,应有

$$\triangle_{k1} = -M_{k1} \quad (k \neq i, i+1).$$

当$k = 1, i+1$时,$\triangle_{i1} = M_{i+1,1}$,$\triangle_{i+1,1} = M_{i1}$.

这里M_{k1}表示D中第k行第一列元素的余子式,于是得

$$\begin{aligned} \triangle = & -(-1)^{1+1}a_{11}M_{11} - \cdots - (-1)^{i+1+1}a_{i+1,1}M_{i+1} - (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} \\ & - \cdots - (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ = & -\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}\right] = -D. \end{aligned}$$

推论 1.2.1 如果行列式有两行(列)对应元素相同,则此行列式为0.

证 一方面,由于两行对应元素相同,所以互换这两行的行列式D_1与没有互换的行列式

D 的值相同,即 $D_1 = D$. 另一方面,由性质 2 知:$D_1 = -D$,所以必有 $D = 0$.

以下性质、推论的证明从略,读者可作为练习,自己证明.

性质 1.2.3 把行列式的某一行(列)的每个元素乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式;换句话说,如果行列式某一行(列)所有元素有公因子,则可将公因子提到行列式记号外面.即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.2.2 如果行列式 D 中有一行(列)元素全为零,则行列式 $D = 0$.

推论 1.2.3 如果行列式有两行(列)的元素对应成比例,则行列式的值为零.

性质 1.2.4 如果行列式某一行(列)元素都是两项的和,则可把这个行列式化为两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.5 行列式某一行(列)的元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & ain \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注:该性质常用来简化运算.

性质 1.2.6 行列式 D 等于它任意一行(列)的元素与它的代数余子式的乘积之和,即:

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

或
$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{j1}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$
$$(j = 1,2,\cdots,n)$$

性质 1.2.7 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和为零.即:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$