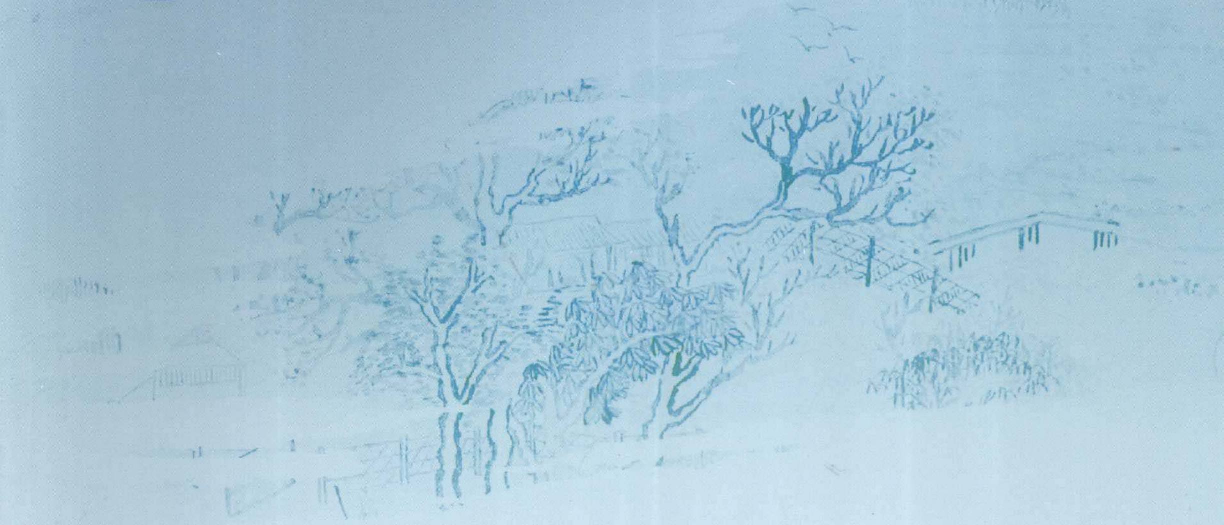
普通高等教育“十二五”规划教材



# 大学数学

## （文科类）（上册）

宋叔尼　杨中兵　王　艳
孙艳蕊　邵新慧　郑维英　编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

# 大学数学(文科类)

## (上册)

宋叔尼　杨中兵　王　艳　编
孙艳蕊　邵新慧　郑维英

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书是高等院校文科(包括经管类)各专业的数学教材，分上、下两册. 上册含一元函数的微积分和线性代数部分，内容包括初等函数、极限与连续、变化率与导数、积分、线性代数初步、矩阵与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 下册含多元函数的微积分、常微分方程和概率统计部分，内容包括多元函数的微分、二重积分、无穷级数、常微分方程、随机事件的概率、随机变量及其概率分布、数理统计初步. 各章均配有适当、适量的习题供读者学习巩固.

本书既可作为高等院校文科(包括经管类)各专业大学数学课程的教材，也可作为相关专业的教学参考书和自学用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

大学数学(文科类)(上册)/宋叔尼，杨中兵，王艳等编. —北京：科学出版社，2012

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-033757-3

I. ①大… II. ①宋… ②杨… ③王… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 038768 号

责任编辑：张中兴 唐保军 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：张克忠 / 封面设计：北京蓝正广告设计有限公司

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2012 年 3 月第一次印刷 印张：13 1/4

字数：270 000

**定价：23.00 元**

# Preface
# 前　　言

当代科学技术的发展, 不仅使自然科学和工程技术离不开数学, 也使人文社会科学的许多领域发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段. 越来越多的人已经认识到, 新时代的人文社会科学工作者也应当掌握相应的数学思想方法和现代数学知识, 用来指导、帮助自己的工作.

数学课程不仅仅是重要的基础课和工具课, 它所传授的也不只是数学知识, 更是一种思维模式、一种文化底蕴, 它所要培养的是具有数学素养的、富有创造力的人才.

文科 (包括经管类) 各专业开设数学课程的目的是使学生对基本的数学方法、数学思想及其在现代社会中的应用有较好的认识, 具有一定的解决实际问题的能力, 同时建立起合理的适应未来发展需要的知识结构, 增强对自然科学知识的了解.

针对文科 (包括经管类) 学生的实际需要、知识结构和思维特点, 本书在内容选取和结构设计上做了充分考虑. 全书以微积分、线性代数、概率统计为主要内容, 打破了原来单一的微积分知识的内容模式. “微积分”、“线性代数”、“概率统计” 是连续、离散和随机三种不同的思维模式. 文科 (包括经管类) 数学的教学过程中不可能这三门课程都开设, 但这三种思维的训练和培养却是必不可少的. 因此, 我们将这三门课程的内容经过认真选取和组合, 形成一个有利于文科 (包括经管类) 学生数学素质的培养的完整内容体系.

书中在不打破原有知识系统的前提下, 每章都有一节实际生活中的数学模型或该章数学知识的应用, 讲解一些源于生活的应用案例, 体现出运用数学知识进行数学建模的过程. 通过这些案例的学习, 使学生切身感到数学无处不在, 感受到数学的强大威力, 进一步增强文科 (包括经管类) 学生学习数学的兴趣, 加深他们对数学思想的把握及应用意识.

本书在编写的过程中获得了东北大学教材建设计划立项项目 (“大学文科数学教材建设”) 及东北大学教务处的支持, 获得了科学出版社高等教育出版中心数理分社的大力

支持, 在此表示感谢. 在本书几个学期的试用过程中, 王洪曾老师提出了许多宝贵的意见, 在此表示衷心的感谢. 同时, 向审稿人、科学出版社所有参与本书出版的工作人员, 特别是张中兴编辑致以衷心的感谢.

欢迎读者对书中错误和不足之处提出宝贵意见.

编　者

2012 年 1 月

Contents

# 目　录


前言

## 连续思想篇(一)——一元函数微积分学

第 1 章　初等函数 …… 3
1.1　函数的概念和性质 …… 3
1.1.1　问题的提出 …… 3
1.1.2　实数集 …… 3
1.1.3　函数的概念 …… 4
1.1.4　函数的性质 …… 7
1.2　初等函数 …… 8
1.2.1　基本初等函数 …… 8
1.2.2　复合函数 …… 10
1.2.3　初等函数的定义 …… 10
1.3　建立函数关系 —— 数学模型 …… 10
数学重要历史人物 —— 笛卡儿 …… 13
习题 1 …… 14
第 2 章　极限与连续 …… 17
2.1　极限的概念与无穷小量 …… 17
2.1.1　数列的极限 …… 17
2.1.2　函数的极限 …… 18
2.1.3　极限的性质 …… 20
2.1.4　无穷大与无穷小 …… 20
2.2　极限的运算 …… 21
2.2.1　极限的运算法则 …… 21
2.2.2　复合函数的极限运算法则 …… 22
2.2.3　夹逼准则 …… 23
2.2.4　重要极限 …… 23

2.2.5 无穷小的比较 …… 24
2.3 函数的连续性 …… 26
2.3.1 函数的连续性 …… 26
2.3.2 函数的间断点 …… 27
2.3.3 初等函数的连续性 …… 27
2.3.4 闭区间上连续函数的性质 …… 28
数学重要历史人物 —— 柯西 …… 30
习题 2 …… 32
**第 3 章 变化率与导数** …… 35
3.1 导数的概念 …… 35
3.1.1 实际问题 …… 35
3.1.2 导数 …… 36
3.1.3 导数的几何意义 …… 38
3.1.4 可导与连续的关系 …… 39
3.2 导数的计算 …… 39
3.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 …… 40
3.2.2 复合函数的求导法则 …… 40
3.2.3 基本导数公式和求导法则 …… 41
3.2.4 高阶导数 …… 42
3.3 微分中值定理 …… 44
3.4 导数的应用 …… 47
3.4.1 函数的单调性 …… 47
3.4.2 函数的极值 …… 48
3.5 函数变化率的数学模型 …… 49
3.6 洛必达法则 …… 52
3.7 微分与近似计算 …… 54
3.7.1 微分的定义 …… 54
3.7.2 基本微分公式与微分运算法则 …… 56
3.7.3 微分在近似计算中的应用 …… 57
数学重要历史人物 —— 费马 …… 58
习题 3 …… 60
**第 4 章 积分** …… 63
4.1 不定积分 …… 63
4.1.1 原函数与不定积分的概念 …… 63
4.1.2 基本积分表 …… 64

4.1.3 不定积分的性质 …… 65
4.2 不定积分计算 …… 66
4.2.1 换元积分法 …… 66
4.2.2 分部积分法 …… 68
4.3 定积分的引出及概念 …… 69
4.3.1 引例 …… 69
4.3.2 定积分的定义 …… 70
4.3.3 定积分的几何意义 …… 71
4.3.4 定积分的性质 …… 72
4.4 定积分计算 …… 72
4.4.1 积分上限函数 …… 72
4.4.2 微积分基本公式 …… 74
4.4.3 定积分的换元积分法 …… 75
4.4.4 定积分的分部积分法 …… 76
4.5 定积分应用 …… 77
4.5.1 微元法 …… 77
4.5.2 平面图形的面积 …… 77
4.5.3 体积 …… 79
4.5.4 投资回收期的计算 …… 80
数学重要历史人物 —— 莱布尼茨 …… 81
习题 4 …… 83

## 离散思想篇

**第 5 章 线性代数初步** …… 91
5.1 线性方程组与矩阵 …… 91
5.2 消元法与矩阵初等变换 …… 93
5.3 行列式的概念与计算 …… 96
5.3.1 二、三阶行列式 …… 96
5.3.2 一般阶行列式的定义 …… 98
5.3.3 行列式的性质 …… 100
5.3.4 行列式的计算 …… 105
5.3.5 克拉默法则 …… 107
5.4 线性代数模型 …… 108
5.4.1 食谱营养模型 …… 108
5.4.2 差分方程 …… 109

数学重要历史人物 —— 高斯 ······ 111
习题 5 ······ 113
**第 6 章 矩阵与线性方程组** ······ 116
6.1 矩阵的基本运算 ······ 116
6.1.1 矩阵加法与数量乘法 ······ 116
6.1.2 矩阵乘法 ······ 117
6.1.3 矩阵的转置 ······ 119
6.2 矩阵的逆 ······ 120
6.2.1 矩阵逆的概念 ······ 120
6.2.2 由伴随矩阵求矩阵的逆 ······ 121
6.2.3 由初等矩阵求矩阵的逆 ······ 121
6.3 矩阵的秩 ······ 123
6.3.1 行阶梯形矩阵 ······ 123
6.3.2 矩阵的秩的定义 ······ 128
6.4 $n$ 维向量及其线性相关性 ······ 128
6.4.1 $n$ 维向量及其线性运算 ······ 128
6.4.2 向量组线性相关性 ······ 129
6.5 向量组的秩及最大线性无关组 ······ 132
6.5.1 向量组的等价 ······ 132
6.5.2 向量组的秩 ······ 133
6.5.3 向量组的秩与矩阵的秩的关系 ······ 134
6.6 线性方程组的解 ······ 135
6.6.1 解线性方程组 ······ 135
6.6.2 存在与唯一性问题 ······ 137
6.6.3 齐次线性方程组 ······ 138
6.6.4 非齐次线性方程组 ······ 142
6.7 应用举例 ······ 144
6.7.1 列昂季耶夫投入产出模型 ······ 144
6.7.2 交通流量问题 ······ 146
数学重要历史人物 —— 伯努利 ······ 148
习题 6 ······ 149
**第 7 章 矩阵的特征值与特征向量** ······ 153
7.1 向量的内积与正交向量组 ······ 153
7.1.1 向量的内积 ······ 153
7.1.2 正交向量组与施密特正交化方法 ······ 155

7.1.3 正交矩阵 ······ 156
7.2 矩阵的特征值与特征向量 ······ 157
7.2.1 特征值与特征向量的概念和求法 ······ 157
7.2.2 特征值和特征向量的性质 ······ 158
7.3 相似矩阵与方阵的对角化 ······ 159
7.3.1 相似矩阵及其性质 ······ 159
7.3.2 矩阵与对角矩阵相似的条件 ······ 160
7.4 实对称矩阵的对角化 ······ 161
7.4.1 实对称矩阵的特征值与特征向量的性质 ······ 161
7.4.2 实对称矩阵的对角化 ······ 162
7.5 特征值与特征向量的应用 ······ 163
数学重要历史人物 —— 埃尔米特 ······ 165
习题 7 ······ 166
**第 8 章 二次型** ······ 169
8.1 二次型及其标准形 ······ 169
8.1.1 二次型及其矩阵表示 ······ 169
8.1.2 二次型的标准形 ······ 171
8.2 化二次型为标准形 ······ 171
8.2.1 正交变换法 ······ 172
8.2.2 配方法 ······ 173
8.3 正定二次型 ······ 176
8.4 正交变换化标准型的几何应用 ······ 178
数学重要历史人物 —— 阿基米德 ······ 182
习题 8 ······ 184
**参考文献** ······ 186
**附录 积分表** ······ 187
**习题答案** ······ 191

# 连续思想篇(一)

——一元函数微积分学

# Chapter 1
# 第1章 初等函数

函数是描述现实世界中变量之间的依赖关系的数学概念, 它是微积分学主要的研究对象. 本章介绍几个常见函数及其性质, 并举例介绍如何建立数学模型, 为学习微积分打好基础.

## 1.1 函数的概念和性质

### 1.1.1 问题的提出

先观察周围的一些日常现象.

**例 1.1** 股票交易中的涨跌停板

上海及深圳证券交易所为了抑制股票市场中的过度投机, 规定了一只股票在一个交易日内的涨、跌幅均不得超过 10%的限制, 分别称其为 “涨停板” 和 “跌停板”. 假若某只股票第一个交易日涨停, 而第二个交易日又跌停, 试问此时这只股票的价格比上涨前高了还是低了?

**例 1.2** 2001 年 1 月 1 日起, 我国的电信资费进行了一次结构性的调整, 其中某地区固定电话的市话费由原来的每 3 分钟 (不足 3 分钟以 3 分钟计) 0.18 元调整为前 3 分钟 0.22 元, 以后每 1 分钟 (不足 1 分钟以 1 分钟计) 0.11 元, 那么, 与调整前相比, 市话费是降了还是升了? 升、降的幅度是多少?

上述两例都需要建立量与量之间的相互关系, 这就是所说的函数, 同时还要指出这些量的取值范围.

### 1.1.2 实数集

正整数 1, 2, 3, $\cdots$ 是人类最早认识的数, 所有正整数的集合称为正整数集 (用 $\mathbf{N}$ 表示). 任意两个正整数作加法和乘法运算, 仍然是正整数. 但有些作减法和除法后就不再是正整数, 如 1, $-2$, $\dfrac{1}{2}$, 从而定义了整数集 (用 $\mathbf{Z}$ 表示) 和有理数集 (用 $\mathbf{Q}$ 表示), $Q=\left\{x|x=\dfrac{p}{q},p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0\right\}$. 在有理数集里我们可以进行加、减、乘、除四则运算.

有理数的出现, 人们认为有理数充满了整个数轴. 但随着人类对数的认识的不断深

入, 发现在求半径为 1 的正方形的对角线的长度时, 无法用有理数来表示, 于是定义了无理数. 有理数和无理数统称为实数, 全体实数构成的集合称为实数集 $\mathbf{R}$, 实数充满整个数轴.

数轴上点的集合, 经常用区间来表示. 设实数 $a$ 和 $b$, 取 $a<b$. 数集

$$\{x|a<x<b\}$$

称为开区间, 记作 $(a, b)$, 即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

数集

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

以上区间都称为有限区间, 区间长度为 $b-a$. 从数轴上看, 这些有限区间是长度为有限的线段. 此外还有所谓无穷区间. 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 和 $-\infty$ (读作负无穷大), 例如

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无穷区间.

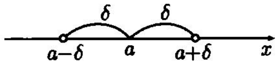


图 1.1

设 $\delta$ 是任一正数, 则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域, 记作

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\},$$

如图 1.1 所示. 集合

$$\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域, 记作 $\mathring{U}(a,\delta)$, 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

### 1.1.3 函数的概念

先看下列例子.

**例 1.3** 设质点自由落体下落的距离为 $s$, 所用的时间为 $t$, 则有

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中, $g$ 是重力加速度. $s$ 随着 $t$ 的变化而变化, 给定 $t$ 的一个值, 在实数范围内都有唯一的 $s$ 与它对应, 这就是一种函数关系.

**例 1.4** 设正方形的边长为 $x$, 面积为 $A$, 则

$$A = x^2,$$

当边长 $x$ 给定一个值时, 有唯一的面积值与之对应. 这也是函数关系.

**定义 1.1** 设 $D$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集, $f$ 是一个对应规则, 如果对于每一个 $x \in D$, 按照 $f$ 都有唯一的实数 $y$ 与之对应, 则称 $y$ 是 $x$ 的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中, $x$ 称为自变量, $y$ 称为因变量.

自变量 $x$ 的取值集合 $D$ 称为函数的定义域, 记作 $D_f$. 全体函数值的集合

$$R_f = \{y|y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数的值域.

在平面直角坐标系中, 平面点集 $\{(x,y)|y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图像, 它表示平面上的一条曲线 (图 1.2).

下面举几个函数的例子.

**例 1.5** 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域, 值域, 并画出其图像.

**解** 定义域, 由 $1 - x^2 \geqslant 0$ 知 $D = [-1,1]$. 值域为 $R_f = \{y|0 \leqslant y \leqslant 1\}$. 图像为半圆 (图 1.3).

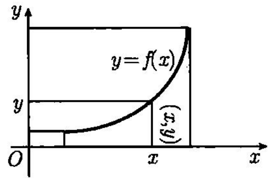



图 1.2

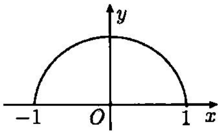



图 1.3

**例 1.6** 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

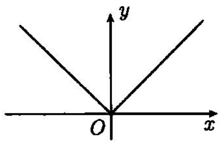



图 1.4

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 图像如图 1.4 所示.

**例 1.7** 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty,\ +\infty)$, 值域 $R_f = \{-1,\ 0,\ 1\}$, 图像如图 1.5 所示.

**例 1.8** 取整函数

$$y = [x],$$

表示不超过 $x$ 的最大整数. 如 $[1.25] = 1$, $[-3.5] = -4$, $[-1] = -1$. 图像如图 1.6 所示.

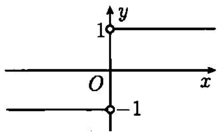



图 1.5

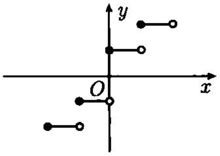



图 1.6

从例 1.6 到例 1.8 看到, 有时一个函数要用几个式子来表示. 这种在自变量的不同变化范围中, 对应关系用几个不同式子表示的函数, 称为分段函数.

再来建立例 1.1 的函数关系.

设 $x$ 表示涨停前的价格, 则涨停的价格为

$$y = x + 0.1x = 1.1x,$$

第二天跌停的价格为 $z$, 则

$$z = y - 0.1y = 0.9y = 0.9 \times 1.1x = 0.99x < x,$$

所以价格更低了.

例 1.2 是一个分段函数: 设 $y(t)$, $Y(t)$ 分别表示调整前、后市话费与通话时间 $t$ 之间的函数关系, 则

$$y(t) = \begin{cases} 0.18, & 0 < t \leqslant 3, \\ 0.18 \times \dfrac{t}{3}, & t > 3, \dfrac{t}{3} \in \mathbf{N}, \\ 0.18\left(\left[\dfrac{t}{3}\right] + 1\right), & t > 3, \dfrac{t}{3} \notin \mathbf{N}, \end{cases}$$

$$Y(t) = \begin{cases} 0.22, & 0 < t \leqslant 3, \\ 0.22 + 0.11(t - 3), & t > 3, \dfrac{t}{3} \in \mathbf{N}, \\ 0.22 + 0.11\left([t - 3] + 1\right), & t > 3, \dfrac{t}{3} \notin \mathbf{N}. \end{cases}$$

不难看出, 只有当通话时间 $t \in (3, 4]$ 时, 调整后的市话费才稍微有所降低, 其余时段均有较大提高.

### 1.1.4 函数的性质

#### 1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义, 如果对于 $I$ 上的任意两点 $x_1$ 及 $x_2$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上是**严格单调增加的**; 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上是**严格单调减少的**.

严格单调增加函数和严格单调减少函数统称为**单调函数**.

严格增函数的图像是沿 $x$ 轴正向上升的, 如图 1.7 所示; 严格减函数的图像是沿 $x$ 轴正向下降的, 如图 1.8 所示.

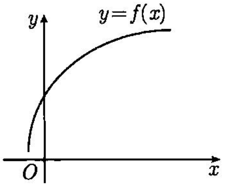



图 1.7

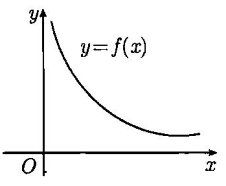



图 1.8

#### 2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称. 如果对于任意 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**; 如果对于任意 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**;

偶函数的图像关于 $y$ 轴对称, 如图 1.9 所示; 奇函数的图像关于原点对称, 如图 1.10 所示.

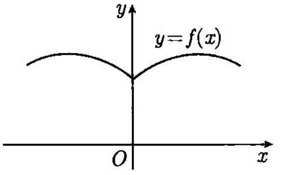



图 1.9

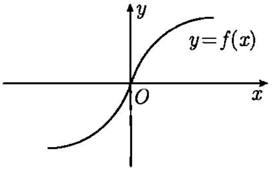



图 1.10