全国高等教育自学考试指导委员会

高等教育自学考试

高等数学（二）

自学考试大纲

ZIXUEKAOSHIDAGANG

武汉大学出版社

全国高等教育自学考试指导委员会

高等教育自学考试

高等数学（二）自学考试大纲

（经济管理类专业）

武汉大学出版社

1987·武汉

（鄂）新登字 09 号

全国高等教育自学考试指导委员会
高等教育自学考试
高等数学（二）自学考试大纲
（经济管理类专业）
*
武汉大学出版社出版发行
（430072 武昌　珞珈山）
黄石日报社印刷厂印刷
*
787×1092 毫米 1/32　3.125 印张　63 千字
1988 年 3 月第 1 版　1994 年 11 月第 6 次印刷
印数：95501－105500
ISBN　7－307－00212－4/O.22
定价：2.00 元

出版前言

为了适应社会主义现代化建设的需要，我国实行了高等教育自学考试制度。它是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种新的教育形式，是我国社会主义高等教育体系的一个组成部分。实行这种高等教育自学考试制度，是实行宪法规定的“鼓励自学成才”的重要措施，也是造就和选拔人才的一种新的途径。凡是干部、职工、群众按照高等教育专业考试计划进行考试合格后，国家承认其学历，与全日制高等学校相应专业毕业生同样对待。高等教育自学考试于1981年开始进行试点，1983年起逐步向全国推广。到1985年底，全国29个省、自治区、直辖市都开展了高等教育自学考试工作，现已进入到加强、完善、提高、发展的新阶段。

为了大体上统一全国高等教育自学考试的标准，全国高等教育自学考试指导委员会陆续制定部分专业考试计划。各专业委员会按照有关专业考试计划的要求，从造就和选拔人才的需要出发，编写了相应专业的课程自学考试大纲，进一步规定课程自学和考试的内容、范围，使考试标准具体化。

经济管理类专业委员会根据国务院有关文件精神，参照原教育部拟定的全日制高等学校有关课程的教学大纲，结合自学考试的特点，编写了高等教育自学考试《高等数学(二)自学考试大纲》。1986年5月全国部分院校的有关专家开会审议、修改后，报全国高等教育自学考试指导委员会审定，经国家教育委员会批准颁发试行。

高等教育自学考试高等数学(二)自学考试大纲，是各地都要贯彻执行的。它是该课程命题、自学和社会助学的依据。我们希望这个大纲的出版将对自学和考试起到应有的作用。

全国高等教育自学考试指导委员会

一九八七年四月

第一部分 《线性代数》纲目要点

第二部分 《概率统计》纲目要点

第一部分 《线性代数》纲目要点

第一章 行 列 式

目的要求

学习本章，要求读者掌握行列式的定义、性质，并学会行列式的展开，计算一些简单的行列式，能运用克莱姆法则求解代数方程组.

§1 行列式的递推定义

定义 定义一阶行列式为 $A=|a_{11}|=a_{11}$. 设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则定义 n 阶行列式 A 为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}$$

$$+(-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}M_{1i},$$

这里 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式，表示划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列所剩下的 $n-1$ 阶行列式.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

§2 行列式的性质

性质 1 行列式转置后,其值不变.

性质 2 两行(列)元素互换,行列式之值变号.

性质 3 将行列式的某行(列)元素同乘以常数 k,所得行列式之值为原行列式值的 k 倍.

性质 4 若行列式中某一行(列)的元素 a_{ij}可分解为两元素 b_{ij},c_{ij}之和(差),即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$,则该行列式可分解为相应的两行列式之和(差),即

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 5 若两行(列)元素成比例，则行列式的值为零.

性质 6 把行列式的某行(列)元素乘上同一个因子加到另一行(列)上去，其值不变.

§3 行列式的展开

一、代数余子式的定义

对于 n 阶行列式 A，其元素 a_{ij} 的余子式为 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如，行列式递推定义中，A 可写成

$$
A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}M_{1i}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}.
$$

二、行列式的展开公式

定理 1 行列式 A 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$
\begin{aligned}
A &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\
&= \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}, \qquad i=1,2,\cdots,n;
\end{aligned}
$$

或

$$
A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}
$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

推论 行列式 A 任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,i\neq j.$

综合定理 1 及推论得有关代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=A\delta_{ij}=\begin{cases}A, & 当\ i=j,\\ 0, & 当\ i\neq j;\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=A\delta_{ij}=\begin{cases}A, & 当\ i=j,\\ 0, & 当\ i\neq j.\end{cases}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1,当\ i=j,\\ 0,当\ i\neq j.\end{cases}$

§4 克莱姆法则

克莱姆法则 若 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $A\neq0$,则该方程组有唯一解,其解为

$$x_j=\frac{1}{A}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\frac{A_j}{A}.$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

例如，求解代数方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 5, \\ \qquad\quad 3x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$$

解

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times 5 = 20 \neq 0,$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -20,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 60,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20.$$

由克莱姆法则可得

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = -1, x_2 = \frac{A_2}{A} = 3, x_3 = \frac{A_3}{A} = -1.$$

第二章 矩　阵

目的要求

学习本章，要求读者掌握矩阵及其各种特殊类型矩阵的定义，熟练运用矩阵的运算法则，并能求矩阵的逆阵.

§1 矩阵的定义

定义 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 m 行 n 列的矩形表，称为一个 m 行 n 列矩阵，记作：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵.

(1)式也可记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})$ 当 $m=n$ 时，A 为 n 阶方阵.

掌握行矩阵、列矩阵、零矩阵、单位矩阵、对角阵、上三角阵、下三角阵的定义.

矩阵相等 若 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，并且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，

记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数可表示成一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组的系数矩阵；常数项可表示为列矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

并称

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为增广矩阵.

§2 矩阵的运算

一、矩阵的加法

定义 1 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则定义矩阵 A 和 B 的和为

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵加法满足如下法则：

1. $A+B=B+A$；
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

二、数与矩阵相乘

定义 2 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA，定义为

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

数乘矩阵满足下列运算法则：

1. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$；
2. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；
3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

三、矩阵的乘法

定义 3 给定矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，矩阵 A 和 B 的乘积 C 是一个 $m\times p$ 阶矩阵，其元素 c_{ij} 为矩阵 A 的第 i 行元素和矩阵 B 的第 j 列对应元素乘积的和，即

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}.$$

矩阵乘法满足如下运算法则：

1. 结合律　$A(BC)=(AB)C$；
2. 分配律　$(A+B)C=AC+BC$；
3. 对任一数 λ，有 $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.

请读者注意，矩阵乘法一般不满足交换律.

四、矩阵的转置

定义 4　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 令 $b_{ij}=a_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，称 $B=(b_{ij})_{n\times m}$ 为 A 的转置，记为 $B=A^{\mathrm{T}}$.

例如，$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

矩阵的转置具有下列性质：

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；
2. $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；
3. $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$；
4. $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

§3　逆　　阵

一、逆阵的定义

对于 n 阶方阵 A，如果有一个 n 阶方阵 B，使 $AB=BA=E$，则说方阵 A 是可逆的，并把方阵 B 称为 A 的逆阵，记为 $B=A^{-1}$，这里，E 为 n 阶单位方阵.