代数学基础丛书 146

金融数学引论

严加安 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书　146

金融数学引论

严加安　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书由浅入深、全面系统地介绍金融数学基本理论，着重介绍鞅方法在未定权益定价和对冲中的应用. 内容包含离散时间投资组合选择理论和金融市场模型，Black-Scholes 模型及其修正，奇异期权的定价和对冲，Itô 过程和扩散过程模型，利率期限结构模型，最优投资组合与投资-消费策略，静态风险度量. 本书第四章系统讲述了 Itô 随机分析理论，这是金融数学中鞅方法的理论基础，该章可以作为概率论研究生学习 Itô 随机分析的简明教材.

本书适合金融数学专业的高年级大学生、研究生学习使用、也适合金融数学理论和应用研究的科研人员、教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

金融数学引论/严加安著. —北京：科学出版社，2012
(现代数学基础丛书；146)
ISBN 978-7-03-035123-4

I. ①金… II. ①严… III. ①金融-经济数学 IV. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 157705 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬／封面设计：包志虹

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 7 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2012 年 7 月第一次印刷 印张：19 1/2
字数：372 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》编委会

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

现代金融经济学研究在不确定环境中的投资和交易. 金融数学 (亦称数理金融学) 通过建立金融市场的数学模型, 利用数学工具研究风险资产 (包括衍生金融产品和金融工具) 的定价、对冲和最优投资消费策略的选取. 近四十年来, 金融数学不仅对金融工具的创新和对金融市场的有效运作产生直接影响, 而且对公司的投资决策和对研究开发项目的评估以及在金融机构的风险管理中得到广泛应用.

金融数学的第一个突破是 1952 年 Markowitz 提出的用于投资分析的均值–方差分析方法. 该方法用收益率的期望和方差分别表示投资的回报和风险, 投资者从证券收益率的统计特性出发来决定最优投资组合, 以达到在回报和风险间一种权衡. 60 年代中期, 在 Markowitz 的均值–方差分析基础上, Sharpe (1964)、Lintner (1965) 和 Mossin (1966) 进一步发现在竞争均衡市场中, 风险资产的预期收益率与市场投资组合的风险报酬之间有一个线性关系, 这就是著名的资本资产定价模型 (CAPM). CAPM 在证券估价、投资组合绩效评估、资本预算以及投资风险分析中有广泛的应用. 1976 年 Ross 进一步提出了著名的套利定价理论 (APT). 该理论认为证券收益率与一组因子线性相关, 这组因子代表影响证券收益率的一些基本因素, 这提供了理解市场中风险与收益率间的一种内在关系.

事实上, 金融数学的历史还可以追溯到 1900 年法国数学家 Bachelier 的博士学位论文《投机的理论》. 在这篇论文中, 他首次用 Brown 运动来描述股票价格的变化, 并研究了期权定价问题. 但 Bachelier 的工作直到首届诺贝尔经济学奖得主 Samuelson 在 1965 年的一篇文章提及才被经济学家知晓. Samuelson 在文章中提出用几何 Brown 运动替代 Bachelier 论文中 Brown 运动来描述股票价格的变动, 建立了这一经典的连续时间金融数学模型. 在 1969 年和 1971 年的两篇文章中, Merton 用随机动态规划方法研究了这一连续时间金融模型下的最优消费投资组合问题. 1973 年 Black 和 Scholes 利用随机分析中的 Itô 公式导出了一个期权定价公式, 即著名的 Black-Scholes 公式. 几乎与此同时, Merton (1973) 对 Black-Scholes 模型和定价公式作了完善和多方面的推广, 并将他们用期权来估价公司负债的思想发展成为所谓的 “未定权益分析”. Harrison and Kreps (1979) 提出用鞅方法刻画无套利市场, 并用等价鞅测度对期权进行定价和对冲, 这对金融数学的日后发展产生了深远的影响. 为了研究利率衍生产品的定价, 需要对未来即期利率的市场走势有所预测. 20 世纪 70 年代以来, 许多学者相继提出了能够反映未来即期利率的市场走势的许多利率期限结构模型, 其中著名的有 Vasicek 模型、CIR 模型、HJM 模型

和 BGM 模型. 所谓利率期限结构, 是指在某一时点上, 各种不同期限债券的利率与到期期限之间的关系. 利率期限结构模型大致可分为两大类: 无套利模型和均衡模型. 前者是基于债券市场价格是合理的 (不存在套利机会) 这一假定, 而后者是基于流动性报酬和风险报酬之间的关系.

20 世纪 80 年代以来, 许多概率论及相关领域的学者开展了对金融数学的理论和应用研究, 国外已经出版了许多有关金融数学的著作, 国内近年来也有一些金融数学的著作问世. 本书旨在由浅入深地、全面和系统地介绍金融数学的基本理论, 着重介绍鞅方法在未定权益的定价和对冲中的应用. 本书共分 10 章. 第一章简单介绍概率论基础和离散时间鞅论, 这是专门为非概率论专业的读者准备的. 第二章首先系统介绍经典的离散时间组合选择理论——Markowitz 的均值–方差分析, 并简单介绍作者和合作者对 Markowitz 均值–方差分析理论的一个改进形式; 接着介绍资产定价模型 (CAPM)、套利定价理论 (APT) 和多阶段均值–方差分析理论; 最后简要介绍期望效用理论的基本思想和基于消费的资产定价模型. 第三章首先引入金融市场的基本概念和二叉树模型, 接着介绍一般离散时间金融市场模型和无套利市场的鞅刻画, 最后讲述期望效用最大化的鞅方法和欧式未定权益的风险中性定价原理. 第四章系统讲述了 Itô 随机分析理论, 这是金融数学中的鞅方法的理论基础. 本章首先简要介绍了基本的连续时间随机过程的定义和性质, 以及连续下鞅的 Doob-Meyer 分解和连续局部鞅和半鞅的二次变差过程; 然后给出关于 Brown 运动随机积分的定义, 介绍 Itô 公式、Girsanov 定理和鞅表示定理等基本结果; 最后简要介绍 Itô 随机微分方程、Feynman-Kac 公式和倒向随机微分方程. 本章内容可以单独提取出来作为概率论研究生学习 Itô 随机分析的一个简明教材. 第五章在经典的 Black-Scholes 模型下, 介绍欧式未定权益定价和对冲的鞅方法, 并推导出欧式期权定价的 Black-Scholes 公式, 对美式期权的定价问题也进行了简要讨论. 此外, 通过若干例子说明鞅方法的具体应用. 最后, 针对 Black-Scholes 公式在期权定价中出现的偏差, 介绍了 Black-Scholes 模型的几种修正. 第六章介绍了几种在实际中常用的路径依赖的特异期权: 障碍期权、亚式期权、回望期权和重置期权, 用鞅方法和偏微分方程方法研究了这些特异期权的定价和对冲. 第七章研究了 Itô 过程和扩散过程模型, 详细介绍了未定权益定价的鞅方法, 包括介绍通过时间和刻度变换给出一些期权定价的显式公式. 此外也简要介绍了美式未定权益的定价. 第八章介绍债券市场和利率期限结构模型, 包括各种单因子短期利率模型、HJM 模型以及 HJM 模型的一个变种 (BGM 模型). 此外, 简单讨论了利率衍生品的定价问题. 第九章介绍扩散过程模型下的最优投资组合与投资–消费策略, 内容包括在 L^2 容许交易策略范围内研究风险–均值投资组合选择问题, 期望效用最大化问题和带消费的投资组合策略选择问题. 第十章系统介绍有关静态风险度量的一般理论, 其中包括一致风险度量和凸风险度量, 共单调次可加风险度量, 共单调凸风险度量, 分布不变的

各类风险度量, 介绍它们的刻画和表示.

本书前八章部分内容来自我的一份英文讲义, 感谢我的学生邓欣雨帮我将英文讲义中的相关章节翻译成了本书第五、六、七章的初稿. 我曾经用英文讲义和本书的书稿给我的历届研究生讲授金融数学入门课程, 感谢他们发现书稿中的一些错误和欠妥之处, 使我得以对书稿不断加以改进和完善. 在本书定稿阶段, 许明宇博士、宋永生博士、许左权博士以及我的博士生尚珂和葛旸等审阅了部分书稿, 提出了不少修改建议, 在此向他们表示衷心感谢.

作者特别感谢夏建明研究员为本书撰写了第九章的 9.2 节, 感谢宋永生博士将他的博士论文中有关静态风险度量部分提供给作者作为本书第十章的基本素材.

本书的出版得到中国科学院科学出版基金的资助. 在本书写作过程中, 作者得到科技部 973 项目 “金融创新产品的设计和定价” 课题 (No. 2007CB814902)、国家自然科学基金委员会 “创新研究群体科学基金”(No.11021161) 和中国科学院随机复杂结构与数据科学重点实验室的资助, 在此一并致谢.

严加安

2012 年 5 月

目 录

第一章　概率论基础和离散时间鞅论

中世纪欧洲盛行用掷骰子进行赌博, 概率论就起源于研究与之相关的概率问题. 但直到 20 世纪初概率论还未被认为是数学的一个分支. 现代概率论的数学基础是 Kolmogorov 在 1933 年奠定的, 他采纳 Lebesgue 的测度论框架创立了概率论公理化体系. 本章首先介绍现代概率论的若干基本概念和结果, 重点介绍与条件数学期望有关的结果; 然后介绍离散时间鞅论, 包括鞅变换和 Snell 包络. 我们假定读者已经具备测度论的基础知识.

§1.1　概率论的基本概念

§1.1.1　事件与概率

考虑一项试验. 用 Ω 表示试验的所有可能的结果的集合, 称为*样本空间*. 每个结果称为*基本事件*. 样本空间 Ω 的子集, 称为*事件*. Ω 本身称为*必然事件*. 我们说事件 A 发生, 是指试验结果 ω 是 A 的一个元素. 如果试验结果是有限或可数多个, 我们可以用组合数学来研究有关的概率问题. 但如果试验结果是不可数无限多个, 我们可能不好考虑单个试验结果, 因为它们出现的概率可能为零. 这时我们需要在测度论框架下研究概率问题.

在测度论中, 我们用 Ω 表示一个空间, 它是我们事先界定的研究对象, 它的元素用 ω 表示. $\omega \in A$ 或 $\omega \notin A$ 分别表示 ω 属于 A 或不属于 A. 不含任何元素的集合称为*空集*, 以 $\varnothing$ 记之. 我们用 $A \supset B$ 或 $B \subset A$ 表示 B 是 A 的子集, 用

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ A \triangle B$$

分别表示 A 与 B 的*交*、*并*、*差*和*对称差*, 即

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\},\ A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\},$$
$$A \setminus B = \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\},\ A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

我们用 A^c 表示 $\Omega \setminus A$, 并称 A^c 为 A (在 Ω 中) 的*余集*, 于是有 $A \setminus B = A \cap B^c$. 有时也用 AB 表示 $A \cap B$. 若 $A \cap B = \varnothing$, 称 A 与 B *互不相交*. 显然有 $A \cap A^c = \varnothing, A \cup A^c = \Omega$.

设 $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为一由 Ω 的子集为元素构成的集合. 我们用 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 和 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 分别表示它们的并和交. 设 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 为一 Ω 的子集构成的有限或可数序列.

若 (A_n) 两两不相交 (即 $n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \varnothing$), 则常用 $\sum\limits_n A_n$ 表示 $\bigcup\limits_n A_n$. 若有 $\sum\limits_n A_n = \Omega$, 称 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 为 Ω 的一个**划分**.

对任一集列 (A_n), 令

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

分别称其为 (A_n) 的**上极限**和**下极限**. 显然有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

若 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 称 (A_n) 的极限存在, 并用 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示 (A_n) 的同一上、下极限, 称它为 (A_n) 的**极限**.

以 Ω 的某些子集为元素的集合称为 (Ω 上的)**集类**. 称集类 $\mathcal{C}$ 为**代数(或域)**, 如果 $\Omega \in \mathcal{C}$, $\varnothing \in \mathcal{C}$, 且 $\mathcal{C}$ 对有限交及取余集运算封闭 (由此推知 $\mathcal{C}$ 对有限并及差运算封闭). 称 $\mathcal{C}$ 为**σ-代数**, 如果 $\Omega \in \mathcal{C}, \varnothing \in \mathcal{C}$, 且 $\mathcal{C}$ 对可列交及取余集运算封闭 (由此推知 $\mathcal{C}$ 对可列并及差运算封闭). 包含一集类 $\mathcal{C}$ 的最小 σ-代数称为**由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ- 代数**, 记为 $\sigma(\mathcal{C})$.

设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数, 称序偶 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一**可测空间**, $\mathcal{F}$ 中的元称为 **$\mathcal{F}$-可测集**. 设 μ 为定义于 $\mathcal{F}$ 取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ 的函数. 如果 $\mu(\varnothing) = 0$ 且 μ 有**可数可加性**或**σ- 可加性**, 即

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 1, \quad A_n \in \mathcal{F};\ \forall n \neq m,\ A_n \cap A_m = \varnothing& \\ \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)&,\end{aligned}$$

则称 μ 为 Ω 上的 (或 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的)**测度**. 若 $\mu(\Omega) < \infty$, 则称 μ 为**有限测度**. 如果存在 Ω 的可数可测划分 $(A_i)_{i\geqslant 1}$, 使得对于每个 A_i, $\mu(A_i) < \infty$, 则称 μ 为**σ- 有限测度**. 若 $\mu(\Omega) = 1$, 则称 μ 为**概率测度**, 并称三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为**概率空间**. 以下我们用 $\mathbb{P}$ 表示一概率测度.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间, 若 $A \in \mathcal{F}$, 且 $\mathbb{P}(A) = 0$, 称 A 为**零概集**. 如果任何零概集的子集皆属于 $\mathcal{F}$, 称 $\mathcal{F}$ 关于 $\mathbb{P}$ **是完备的**, 并称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一**完备概率空间**.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间, 令

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega:\ \text{存在 } A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = 0,\ \text{使得 } N \subset A\},$$

$$\overline{\mathcal{F}} = \{B \cup N : B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\},$$

$$\overline{\mathbb{P}}(B \cup N) = \mathbb{P}(B), \quad B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}.$$

则 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ 为一完备概率空间, 它是包含 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的最小完备概率空间. 我们称 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}})$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的**完备化**, 称 $\overline{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的**完备化**.

§1.1.2 独立性, 0-1 律和 Borel-Cantelli 引理

设 A 和 B 为事件, 如果 $\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, 则称事件 A 和 B 独立. 一事件类 $(A_t, t\in T)$ 称为独立事件类, 如果对 T 的任何有限子集 S, 我们有

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{s\in S} A_s\Big)=\prod_{s\in S}\mathbb{P}(A_s).$$

这时称该事件类中的诸事件相互独立, 这比两两独立条件强.

称事件类 $\mathcal{A}$ 和事件类 $\mathcal{B}$独立, 如果 $\mathcal{A}$ 中的任何事件 A 和 $\mathcal{B}$ 中的任何事件 B 独立. 更一般地, 设 $(\mathcal{C}_t, t\in T)$ 为由事件类构成的族. 如果从每个事件类 $\mathcal{C}_t$ 中任取一事件 A_t, 由它们组成的类 $(A_t, t\in T)$ 都是独立事件类, 则称该族为独立族, 并称该族中的事件类相互独立. 容易证明如下的

独立类扩张定理 设 $(\mathcal{C}_t, t\in T)$ 为独立族, 如果每个 $\mathcal{C}_t$ 为 π 类 (即对集合交运算封闭), 则 $(\sigma(\mathcal{C}_t), t\in T)$ 也为独立族, 这里 $\sigma(\mathcal{C}_t)$ 表示由事件类 $\mathcal{C}_t$生成的 σ- 代数(即包含 $\mathcal{C}_t$ 的最小 σ- 代数).

下面的 Kolmogorov 0-1 律 是有关事件独立性的一个个重要结果.

Kolmogorov 0-1 律 设 $(\mathcal{F}_n, n\geqslant 1)$ 为一列相互独立的 σ- 代数. 令

$$\mathcal{G}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\sigma\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty}\mathcal{F}_n\Big).$$

则对任何 $A\in\mathcal{G}$, 我们有 $\mathbb{P}(A)=0$ 或 1. 我们称 $\mathcal{G}$ 为序列 $(\mathcal{F}_n, n\geqslant 1)$ 的尾 σ- 代数.

事实上, 由于 $\sigma\Big(\bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty}\mathcal{F}_n\Big)$ 和 $\sigma(\mathcal{F}_n, 1\leqslant n\leqslant k)$ 独立, $\mathcal{G}$ 和 $\sigma(\mathcal{F}_n, 1\leqslant n\leqslant k)$ 独立. 令 $\mathcal{A}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\sigma(\mathcal{F}_n, 1\leqslant n\leqslant k)$. 则 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{A}$ 也独立. 但 $\mathcal{A}$ 本身是一代数 (从而是 π 类), 故 $\mathcal{G}$ 和 $\sigma(\mathcal{A})$ 独立. 然而由于 $\mathcal{G}\subset\sigma(\mathcal{A})$, 这表明 $\mathcal{G}$ 与它自身独立. 因此对任何 $A\in\mathcal{G}$, 我们有 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(AA)=\mathbb{P}(A)^2$, 即 $\mathbb{P}(A)=0$ 或 1.

令 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 为一列事件. 事件 $A=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$($(A_n)$ 的上极限) 发生, 当且仅当有无穷多个事件 A_n 发生. 我们用 “A_n i.o.” 表示事件 A, 关于此事件的概率, 我们有如下的

Borel-Cantelli 引理 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)<\infty$, 则 $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.})=0$. 若 (A_n) 相互独立, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\infty$, 则 $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.})=1$.