清华大学出版社“十二五”规划教材

# 高等数学（上）

郭治中　编著

清华大学出版社

出版社“十二五”规划教材

# 高等数学（上）

郭治中　编著



清华大学出版社
北京

## 内容简介

本书是作者根据高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合多年的教学经验编写而成.

教材遵循"自然而然"的原则，避免跳跃. 紧抓各主要概念、定理的几何背景，用简单、朴实且生活化的语言、方法引出主要数学概念，使其自然、朴实、顺理成章，且读起来顺畅而又印象深刻. "延伸阅读"将帮助学生加深对教材内容的理解. 习题分 A，B 类，增加了概念类题目，编排紧扣教材内容与例题，难度渐变. A 类习题为基本内容，B 类习题略作引申. 每章配有提高训练题，基本取自历年高等数学考研题，并按难易程度进行编排. 习题配有答案与较为详尽的提示.

全书分上、下册，上册内容：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程.

本书可作为高等院校理、工、经管各类专业高等数学课程的教材使用.



**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学. 上/郭治中编著. --北京：清华大学出版社，2012. 8
ISBN 978-7-302-28647-9

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①郭…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 070999 号

**责任编辑**：石　磊　赵从棉
**封面设计**：傅瑞学
**责任校对**：王淑云
**责任印制**：张雪娇

**出版发行**：清华大学出版社
**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质量反馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 装 者**：三河市李旗庄少明印装厂
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185mm×230mm　　**印　　张**：19.25　　**字　　数**：418 千字
**版　　次**：2012 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 8 月第 1 次印刷
**印　　数**：1～3000
**定　　价**：32.00 元

产品编号：043514-01

# 前 言

FOREWORD

本教材编写的指导思想是：无论问题的导入还是理论探讨，都遵循“自然而然”的原则，避免跳跃，尽量做到教材本身就是一条“连续而光滑的曲线”；紧紧抓住各主要概念、定理的几何背景，尽量用简单、朴实且生活化的语言、方法引出主要数学概念，揭示概念创建的原本思想过程，使其自然、朴实且顺理成章；尽量体现出“形”与“数”的完美结合，使学生读起来顺畅而又印象深刻；在这些基础之上再进行数学抽象，得出严格、精准的数学定义及结论.

本教材也做了一些不同于以往教材的探索性工作，在分段函数、函数的周期延拓、极限、定积分的几何应用、多元复合函数的导数、方向导数、拉格朗日乘数法、线性空间、向量空间、重积分、曲线积分、曲面积分等部分与通常的讲法相比多少都做了一些改变，同时注重分解与化解难点. 例如：

(1) 极限内容是高等数学教学中公认的难点，如何使学生更好地理解 $\varepsilon$-$\delta$ 类极限定义(的内涵)，理解用此类定义证明题目时的关键所在，是每个讲授高等数学教师所苦恼，且又没有多少好办法的一件事情. 而整个高等数学体系又都是建立在极限(定义)基础之上，其重要性不言而喻. 所以，使学生加深对极限定义的理解，是这门课程的基本要求. 为此，本教材提前引入了无穷小概念，以特殊无穷小为标准尺，对极限证明题进行论证，以期由此衬托出极限定义的内涵，帮助学生对极限定义的进一步理解. 多年的教学实践证明，这种讲法对学生的确起到了帮助作用.

(2) 在掌握了不定积分与定积分的计算之后，其他所有积分计算问题的本质都是将其转换为定积分进行计算，而转换的关键在于积分区域的表达，所以，本教材将积分区域的表达问题贯穿始终. 例如，教材特别强调空间 3 种基本区域的表达，使多元函数积分的计算问题清晰明了，且在讲授空间解析几何时很自然地引入这些概念，使得三重积分的难点得以分解. 对于第一、二类曲线积分、曲面积分也是如此处理.

(3) 教材增加了极坐标系的相关内容，如极坐标系下常见函数的表达、常见区域的表达，使学生较为系统地了解掌握这些内容，为更好地学习、掌握重积分及曲面积分奠定了基础.

另外，也许由于历史原因，有些高等数学教材在许多基本概念的定义方面有些小问题，例如导数定义：在一定条件下极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在时，称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点可导，记为 $f'(x_0)$. 也即符号 $f'(x_0)$ 表示上述极限存在，但又有“$f'(x_0)$ 不存在”这样的提法.

本教材则避免了类似情况.

高等数学是人类逻辑思维、智慧的结晶,并非仅仅是各学科的"工具",更为显然的是,将高等数学作为"工具"讲授与作为"智慧工具"讲授的感知差别是不言而喻的. 本教材在内容叙述方面顾及到了这一点,尽量做到使学生多想多练,引导学生通过对现象的分析、研究,自然而然地得到相关定理、性质,尽量剥去数学定理"抽象"、"云里雾里"的外衣,使学生变被动接受为主动创造与获取,同时也尽量避免教者将其作为单纯的"工具"讲授而使之变为"应试"教育的教材而丢弃"智慧"精髓.

另外,书中除"延伸阅读"用楷体排版外,还有个别例题、例题与定理的证明以及个别简短的补充内容也使用了楷体,这些内容可根据专业需求及课时数的多少选择取舍.

习题分为基本类习题与提高训练题. 基本类习题分为 A,B 类,习题选配紧扣教材内容与例题,难度渐变,避免偏、难、怪及技巧性要求过高的题目,使学生能够较为顺畅地完成作业而使得自信心得以建立,又能通过习题掌握教材内容所揭示的数学思想方法. 习题编入了概念性题目,主要目的是促使学生认真读书. A 类习题为基本内容,B 类习题略作引申(根据内容需要,个别节的习题无 B 类),以期满足不同学生及专业的需要. A,B 类习题附有答案及提示. 每章所配的提高训练题基本取自历年高等数学考研题,根据题目所涉及的知识要求以及难易程度进行了编排,同时给出了答案与较为详尽的提示. 这部分习题仅供考研及数学爱好者参考,不作为教学要求.

全书分上、下册,共 11 章. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程. 下册内容包括空间解析几何、多元函数的微分法、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数.

上、下册基本内容共需 170 学时左右,对于 170 学时左右的专业,习题可选择 A 类,再适当选一些 B 类习题;对于 198 学时或更多学时的专业,习题可同时选择 A,B 类,亦可选讲一些"延伸阅读"的内容.

几点说明与建议:(1)极限的 $\varepsilon$-$\delta$ 定义部分主要要求学生能够理解定义的内涵,提前引入无穷小的目的正在于此,并非强调对题目的新证法;(2)本教材的观点是:多元函数积分计算的关键是积分区域的表达,所以对区域的表达应给予足够重视;(3)建议多用邻域符号.

在教材编写过程中,得到了学院领导、教务处、许多同行教师及研究生的鼎力相助,特别是由于笔者所教历届本科生的期望与热情鼓励,才使得笔者最终提笔,在此一并致谢. 但笔者深知水平实在有限,错误在所难免,恳望同行及读者批评指教,不胜感激!

编　者

2012 年 5 月

# 目录 CONTENTS

# 第 1 章

# 函数与极限

任何人都可以举出许多这样的例子：由于某件事物的变化引起另一事物的变化，这实际上是自然界乃至整个宇宙万物的表象与根本. 从数学上讲，就是某个或某些量的变化引起另一个量的变化，这些量之间的这种相互依赖关系称为函数关系，简称为函数. 由此足以说明函数以及研究函数的重要性. 极限则是研究函数最根本而无以替代的方法，现代科学技术领域中的各个学科所使用的数学方法几乎无一不是在极限基础之上所产生的方法. 所以，函数与极限概念是最基本且非常重要的概念，熟悉并掌握它们对于后续学习至关重要.

## 1.1 集合与映射

### 1.1.1 集合

集合是数学中最基本的概念，也是一个非常朴素且具有生活化背景的概念. 某个班的全体学生、某个年级的全体学生、某个学校的全体学生分别构成 3 个不同的群体，数学上称之为 3 个不同的集合；所有小于 100 的正偶数，所有大于 0 而小于 1 的有理数也构成不同的集合.

**抽象地讲：满足某种特性的事物或对象的全体称为集合；事物或对象称为集合的元素.**

这个定义是中学所讲的，也是我们现在所能给出的集合定义. 要指出的是：这是集合的古典定义，并不是目前数学中关于集合的严格定义，但又是被非数学专业的数学教材所普遍认同、采纳的定义. 原因在于：其一，严谨的集合定义是相对复杂而抽象的，它需要在上述定义的基础上附加一些条件，也即还需要满足一组被称为公理的条件——公理系统；其二，基于非数学专业其他学科对数学的要求，这样的定义一般不会导致矛盾，因为数学上已证明，如果 $I$ 是集合，则 $I$ 的部分元素也构成集合，而我们所讨论的范围是实数或复数范围，且全体实数或全体复数是集合.

集合的根本特征之一是确定性. 如果 $A$ 是一个集合，那么对于任何元素（事物）$a$，只有两种可能：$a$ 是集合 $A$ 的元素（$a \in A$，即 $a$ 属于 $A$），或者 $a$ 不是集合 $A$ 的元素（$a \notin A$，即 $a$ 不属于 $A$），两者必居其一. 例如，讨论数集时我们可以说：全体偶数构成的集合 $A$，因为对于任何实数 $r$，我们都能够指出它是否属于集合 $A$.

我们来举一个由上述集合定义产生的矛盾集.

村庄里有一位村民是位理发师,他只给村子里需要理发而又不能给自己理发的人理发.按照上述集合的古典定义,“村里需要理发而自己又不能给自己理发的人”的全体构成一个集合 $A$,现在要问:理发师是否属于集合 $A$.如果理发师属于 $A$,则理发师属于“需要理发而又不能给自己理发”的人,按条件理发师应该能给自己理发,所以理发师不属于 $A$;若理发师不属于 $A$,则需要理发的理发师能够给自己理发,但按规定理发师“只给那些村子里需要理发而又自己不能给自己理发的人理发”,所以理发师又不能给自己理发,从而理发师属于 $A$.因此,我们无法确定理发师是否属于 $A$.

这就是上述集合的古典定义所导致的著名的**罗素悖论**.

**1. 集合的基础概念**

中学所学的有关集合知识对高等数学这门课程已够用,在此做一回顾与梳理.

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素;用符号“$\in$”与“$\notin$”表示元素与集合的属于与不属于关系:$a\in A$ 指 $a$ 是集合 $A$ 的元素;$a\notin A$ 指 $a$ 不是集合 $A$ 的元素.集合分为有限集、无限集与空集:含有有限个元素的集合称为有限集,含有无限多个元素的集合称为无限集,不含任何元素的集合称为空集.

常用集合符号:$\varnothing$ 表示空集;$\mathbb{Z}$ 表示整数集,$\mathbb{Z}^+$ 表示正整数集,$\mathbb{Q}$ 表示有理数集,$\mathbb{N}$ 表示自然数集,$\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合.

常用逻辑符号“$\forall$”表示“任意的”,$\forall x\in X$ 表示 $x$ 是 $X$ 中的任意一个元素;“$\exists$”表示“存在”,且有“至少存在一个”的含义,如 $\exists y\in Y$ 表示至少存在一个 $Y$ 中的元素 $y$.

请解读“$\forall x\in X$, $\exists y\in Y$”.

表示集合的主要方法有两种.

(1) 列举法　将集合的元素一一列举或部分列举但表现出某种明确的规律,如

$$\{1,2,5,6,8\},\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}.$$

(2) 描述法　集合 $A$ 由具有某种性质的元素构成,如果将“某种性质”用 $P$ 来表示,则通常将 $A$ 表示为

$$A=\{x \mid x\text{具有性质}P\} \quad\text{或}\quad A=\{x\mid P(x)\},$$

如 $M=\{x|0<x<1 \text{ 且 } x\in\mathbb{Q}\}$ 表示集合 $M$ 是 $(0,1)$ 区间内的全体有理数.

两集合之间的关系主要有:相等、包含、相交、不相交.

设 $A,B$ 为二集合,则 $A,B$ 之间有以下关系.

**包含**:$A$ 包含 $B$ 是指 $B$ 的元素也是 $A$ 的元素,即 $\forall x\in B\Rightarrow x\in A$(读作任何 $x$ 属于 $B$ 蕴含(或必有)$x$ 属于 $A$),记为 $A\supset B$ 或 $B\subset A$.

**相等**:$A$ 与 $B$ 相等指 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,记为 $A=B$.

用 $A\neq B$ 表示 $A$ 与 $B$ 不相等.

**子集**:由集合 $A$ 的元素构成的集合.

显然,如果 $A\supset B$,则 $B$ 是集合 $A$ 的子集;如果 $A\supset B$ 且 $A\neq B$,则称 $B$ 是集合 $A$ 的**真子集**. 当然,子集的定义并没有排除 $A$ 是 $A$ 的子集,因为 $A\supset A$ 是成立的.

**交集**:集合 $A$ 与 $B$ 的共同元素构成的集合. 记为 $A\cap B$.

如果存在元素 $x$,使得 $x\in A$ 且 $x\in B$,则称集合 $A$ 与 $B$ 相交;若 $A$ 与 $B$ 无共同元素,则称集合 $A$ 与 $B$ **不相交**,也称交为空集,即 $A\cap B=\varnothing$.

下面的图 1.1、图 1.2、图 1.3 是常用的两集合间关系的图示法.

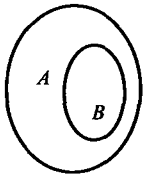


图 1.1 $A\supset B$

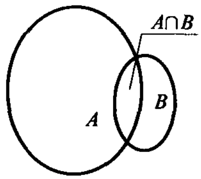


图 1.2 $A\cap B\neq\varnothing$

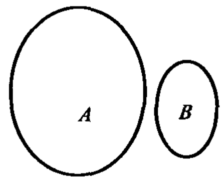


图 1.3 $A\cap B=\varnothing$

## 2. 集合的基本运算

集合的基本运算包括交、并、差、余以及它们的运算律.

**交** 根据定义,集合 $A,B$ 的交 $A\cap B$ 为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

**并** 由集合 $A$ 与 $B$ 的所有元素构成的集合称为集合 $A$ 与 $B$ 的并,记为 $A\cup B$,且

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

**差** 由属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素构成的集合称为集合 $A$ 与 $B$ 的差,记为 $A-B$ 或 $A\backslash B$,且

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

**余** 余是一种相对意义下的差运算概念,例如,高等数学所涉及的量都在实数范围,所以,所遇到的任何数集 $A$ 都是实数集$\mathbb{R}$ 的子集,这时称$\mathbb{R}$ 为全集或基本集,称差集$\mathbb{R}-A$ 为集合 $A$ 关于$\mathbb{R}$ 的**余集**或**补集**,简记为 $A^c$. 一般地,如果所讨论的问题可以限定在某个集合 $I$ 内,称此集合 $I$ 为**基本集**或**全集**,而对于 $I$ 的子集 $A$,称差集 $I-A$ 为集合 $A$ 关于 $I$ 的**余集**或**补集**,简记为 $A^c$. 例如,相对于实数集$\mathbb{R}$,集合 $A=\{x\mid 0<x<1\}$的余集 $A^c$ 为

$$A^c=\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 1\}.$$

设 $A,B,C$ 为 3 个集合,则它们的交、并、余满足如下运算法则.

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

## 1.1.2 区间与邻域

### 1. 区间

区间的概念在中学已很熟悉，区间包括有限与无限区间以及开区间、闭区间、半开半闭区间，总结起来有如下几种：

$(a,b),[a,b],(a,b],[a,b),(-\infty,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,b],(a,+\infty),[a,+\infty)$.

其中，$a,b\in\mathbb{R}$，它们也可用集合的形式给出，例如：

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\},\quad (a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}.$$

### 2. 邻域

1) $x_0$ 点的邻域

邻域在数学中是一个很重要的基本概念，很大程度上具有"邻居"的含义. 我们说点 $x_0$ 的邻域，即指点 $x_0$ 附近点的全体，或开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$(图 1.4(a))，此处 $\delta$ 是一个很小的正数，至于 $\delta$ 小到多少不做定义，就如同离你家多少米的另外一家是邻居，而超过多少米的不是邻居一样，这样的距离是不好精确定义的，但我们总可以说某家因为离你家很远而不是邻居.

**定义 1.1** 设 $\delta$ 是一个很小的正数，称区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为 $x_0$ 点的 $\delta$-邻域，记为 $U(x_0,\delta)$；$U(x_0,\delta)$中去掉 $x_0$ 后称为 $x_0$ 点的 $\delta$-去心邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

图 1.4 分别为邻域 $U(x_0,\delta)$与去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$的几何示意图.

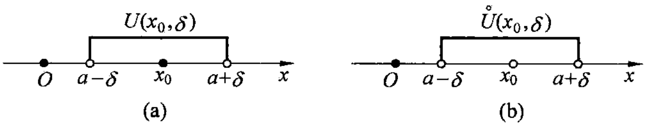


图 1.4

2) 无穷远点的邻域

如果将 $x$ 正半轴上离原点无穷远的地方看做一个点(这一提法在此只需大概理解，1.4 节后会有一个比较严格的数学意义下的理解)，称为正无穷远点，记为$+\infty$，那么，这个点的邻域可理解为那些 $x$ 正半轴上离原点很远的点的全体，也即区间$(X,+\infty)$，这里 $X>0$ 是某个很大的数，至于 $X$ 大于多少不做定义；同样，将 $x$ 负半轴上离原点无穷远的地方看做一个点，称为负无穷远点，记为$-\infty$，这个点的邻域可理解为那些 $x$ 负半轴上离原点很远的点的全体，也即区间$(-\infty,-X)$(图 1.5)；用邻域的符号可将上述两个无穷远点的邻域记为

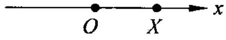


图 1.5

$$U(+\infty,X)=(X,+\infty),\quad U(-\infty,X)=(-\infty,-X).$$

我们将正无穷远点与负无穷远点统称为无穷远点，记为$\infty$，则集合$(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$

表示那些 $x$ 轴上离原点很远的点的全体，称之为无穷远点$\infty$的邻域，记为 $U(\infty,X)$，即

$$U(\infty,X)=(-\infty,-X)\cup(X,+\infty).$$

这样一来，就可以将有限点与无穷远点的邻域用统一符号表示为 $U(\Delta,\delta)$，即

$$U(\Delta,\delta),\quad \Delta\in\{+\infty,-\infty,\infty,x_0\}.$$

当 $\Delta$ 为 $x_0$ 时，$\delta$ 为很小的正数；当 $\Delta$ 为$+\infty,-\infty,\infty$之一时，$\delta=X(X>0)$是一个很大的数. 显然，无穷远点的邻域是去心邻域，即

$$U(\Delta,\delta)=\mathring{U}(\Delta,\delta),\quad \Delta\in\{+\infty,-\infty,\infty\}.$$

另外，根据邻域的几何意义容易证明如下结论.

**结论** $\forall\delta>0$ 及 $\forall\delta'>0$，有

$$\mathring{U}(\Delta,\delta)\cap\mathring{U}(\Delta,\delta')=\mathring{U}(\Delta,\delta^*),$$

当 $\Delta=x_0$ 时，$\delta^*=\min\{\delta,\delta'\}$；当 $\Delta\in\{+\infty,-\infty,\infty\}$时，$\delta^*=\max\{\delta,\delta'\}$.

由此可知，同一点 $\Delta$ 的两个邻域 $\mathring{U}(\Delta,\delta)$与 $\mathring{U}(\Delta,\delta')$之交还是 $\Delta$ 的邻域，此结论在后面经常使用.

### 1.1.3 映射

#### 1. 映射的定义

**定义 1.2** 设 $X,Y$ 为二非空集合，如果存在一个法则 $f$，使得 $\forall x\in X$，按法则 $f$，存在唯一的元素 $y\in Y$ 与之对应，则称 $f$ 为 $X$ 到 $Y$ 的映射，记为

$$f:x\to y,\quad 或\quad y=f(x),\quad 或\quad f:X\to Y.$$

称 $y$ 或 $f(x)$为 $x$ 的像，$x$ 为映射 $f$ 下的原像；集合 $X$ 为映射 $f$ 的定义域(或原像集)，记为 $D_f$；$X$ 中所有元素的像的全体称为映射 $f$ 的值域(或像集)，记为 $R_f$ 或 $f(X)$，即

$$R_f=\{y\mid\forall x\in X,y=f(x)\},$$

$X$ 到 $Y$ 的两个映射 $f,g$ 称为相等，如果 $\forall x\in X$ 有 $f(x)=g(x)$，记为 $f=g$.

还需指出，值域 $R_f$ 是集合 $Y$ 的子集，可以是 $Y$ 的真子集，也可以有 $R_f=Y$.

欲加深对上述定义的理解，请阅读如下例子.

设 $X,Y$ 为二集合，设想集合 $X,Y$ 为两个袋子，它们的元素分别是装在袋子 $X$ 里的黑色小球和装在袋子 $Y$ 里的红色小球.

先从集合 $X$ 中取出黑色小球 $x_1(x_1\in X)$，再从 $Y$ 中摸出红色小球 $y_1(y_1\in Y)$，将它们构成一对，记为$(x_1,y_1)$或 $x_1\to y_1$，也称 $x_1$ 与 $y_1$ 对应. 现在将 $y_1$ 放回袋子 $Y$ 中而 $x_1$ 不要放回，从集合 $X$ 中剩下的小球中再取出一个黑色小球 $x_2(x_2\in X$，显然 $x_2\neq x_1)$，从 $Y$ 中摸出一个红色小球 $y_2$，则有$(x_2,y_2)$或 $x_2\to y_2$；再将 $y_2$ 放回袋子 $Y$ 中而 $x_2$ 不要放回，……，继续重复上述做法直至取完袋子 $X$ 中所有小球(假定能够取完)，则 $\forall x\in X$，即任一黑色小球 $x$，都存在 $Y$ 中的红色小球 $y(\exists y\in Y)$与之对应(图 1.6)，即 $x\to y$ 或$(x,y)$.

需要注意的是：①每个黑色小球都有唯一的红球与之对应；任何两个不同的黑色小球

$(x_i, x_j, x_i \neq x_j)$对应的红色小球 $y_i, y_j$ 可能相同(即某个红球被多次摸出),也可能不同;②并不是 $Y$ 中的每个红色小球都有黑色小球与之对应(某个红球每次都摸不到).

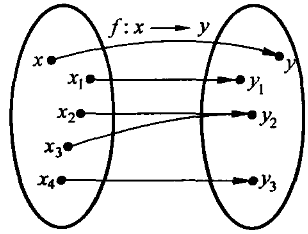


图 1.6

现在将所有小球放入各自袋子中,重新再取一遍. 那么,当取到 $x_1$(或 $x_\mu$)时,在 $Y$ 中摸出的红球就不一定是上次那个 $y_1$(或 $y_\mu$)了. 这说明:每次取完 $X$ 中的所有小球而得到与之对应的 $Y$ 中小球的同时,就形成了每个黑球与红球之间的一种确定的对应规则或法则,记为 $f$,我们称这种规则或法则 $f$ 为 $X$ 到 $Y$ 的映射. 显然,只有完全按照第一轮的规则 $f_1$ 去取(即 $f_2=f_1$ 时),才能保证第二轮 $X$ 中的每个黑色小球所对应的 $Y$ 中的红色小球还是第一轮的那个.

将上述讨论的事实抽象为数学概念,就是上面关于映射的定义.

### 2. 几个特殊映射

(1) **单射** 映射 $f$ 称为单射,如果 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,则 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

如果上述黑球与红球的对应关系 $f$ 是单射,则不同的黑球对应于不同的红球,反过来,$R_f$ 中的任何红球必有唯一的 $X$ 中的黑球与之对应,这种对应关系称为映射 $f$ 的逆映射,记为 $f^{-1}$,即有以下定义.

(2) **逆映射** 如果 $f$ 为单射,则 $\forall y \in R_f$,都有唯一的 $x \in X$ 与之对应,即 $y \to x$,称这个由 $R_f$ 到 $X$ 的映射为 $f$ 的逆映射,记为 $f^{-1}$,即

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in R_f \quad 或 \quad f^{-1}: y \to x.$$

(3) **满射** 当 $R_f = Y$ 时,映射 $f$ 称为 $X$ 到 $Y$ 的满射;也称 $f$ 为由 $X$ 到 $Y$ 上的映射.

即映射 $f$ 由 $X$ 射满集合 $Y$,或者说每个红球都有黑球与之对应.

(4) **1-1 映射** 当映射 $f$ 既是单射又是满射时,称为 $X$ 到 $Y$ 的 1-1 映射.

即黑球与红球之间是一对一的,就如同剧场中的座位与座位号.

(5) **复合映射** 设 $f$ 为集合 $X$ 到 $Y$ 的映射,$g$ 为集合 $Y^*$ 到 $Z$ 的映射,且 $R_f \cap Y^* \neq \phi$. 显然交集 $R_f \cap Y^*$ 是映射 $f$ 的值域 $R_f$ 的子集,所以,$\forall y \in R_f \cap Y^*$,$\exists x \in X$,使得 $y = f(x)$,$x$ 为 $y$ 的原像,将交集 $R_f \cap Y^*$ 中所有元素的原像构成的集合记为 $X_0$,则

$$X_0 = \{x \mid x \in X 且 f(x) \in Y^*\}.$$

显然,$\forall x \in X_0$,存在唯一确定的 $y \in R_f \cap Y^*$,使得 $y = f(x)$,而对此元素 $y$,存在唯一确定的集合 $Z$ 中的元素 $z$,使得 $z = g(y)$. 由此知,$\forall x \in X_0$,存在唯一确定的集合 $Z$ 中的元素 $z$ 与之对应,记这一对应关系(映射)为 $\varphi$,即

$$\varphi: x \to z, \forall x \in X_0 \quad 或 \quad z = \varphi(x), \forall x \in X_0,$$

映射 $\varphi$ 也被记为 $g \circ f$,即

$$\varphi = g \circ f: x \to z, \ \forall x \in X_0,$$