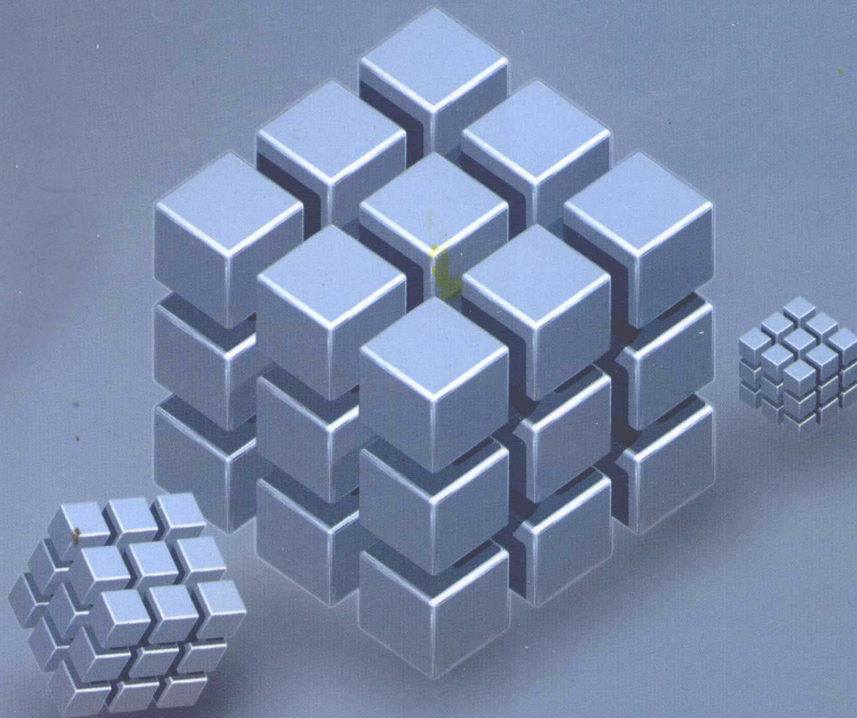

# 高等数学(合订本)

(第2版)

GAODENG SHUXUE

贲亮 等编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

## 内 容 提 要

本书参照普通高等理工院校成人教育《高等数学教学基本要求》编写而成，可作为高等函授教育、现代远程教育及夜大学等成人高等教育(工科)的教学用书。

本书主要包括：函数、极限、连续、一元函数的微积分、多元函数的微积分、级数和常微分方程等内容。本书编写力求逻辑严密、重点突出、深入浅出、便于自学。文中穿插有学习指导，各章后均有内容总结与要求，并配有自我检查的思考题和练习题，书末附有希腊字母表、参考用曲线图、积分表和习题答案。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学：合订本/贲亮等编. --2 版. --北京：北京邮电大学出版社，2012.7

ISBN 978-7-5635-3083-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①贲… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 118848 号

**书　　名**：高等数学(合订本)(第 2 版)
**编　　者**：贲亮　等
**责任编辑**：王晓丹
**出版发行**：北京邮电大学出版社
**社　　址**：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
**发 行 部**：电话：010-62282185　传真：010-62283578
**E-mail**：publish@bupt.edu.cn
**经　　销**：各地新华书店
**印　　刷**：北京联兴华印刷厂
**开　　本**：787 mm×1 092 mm　1/16
**印　　张**：25.5
**字　　数**：666 千字
**印　　数**：1—3 000 册
**版　　次**：2006 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 2 版　2012 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3083-0　　　　**定价**：49.00 元

**· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·**

# 前　言

本书参照普通高等理工院校成人教育《高等数学教学基本要求》编写而成，可作为高等函授教育、现代远程教育及夜大学等成人高等教育（工科）的教学用书。

本书内容包括：函数、极限、连续、一元函数的微积分、多元函数的微积分、级数和常微分方程。

本书编写力求逻辑严密、重点突出、深入浅出、便于自学。文中穿插有学习指导，各章后均有内容总结与要求，并配有自我检查的思考题和练习题，书末附有希腊字母表、参考用曲线图、积分表和习题答案。书中加 * 号处为高等院校网络教育部分公共基础课全国统一考试所不考的内容，可根据教学需要进行取舍。

学生应循序渐进地阅读本教材，重点和难点内容需反复阅读，并认真、独立地回答全部思考题和完成练习题。

本书由北京邮电大学网络教育学院数学教研组组织编写，邵因、彭绍明、贲亮等参加了编写工作。为适应现代网络教育的改革与发展，在保持高等数学内容的科学性与系统性以及后续课程需求的基础上，由贲亮对 2002 年版的内容进行了较大的调整与修改，如有不妥之处，恳请读者批评、指正。

编　者

# 目　　录

# 第一章　函　　数

函数是高等数学研究的对象，因此，函数的概念是高等数学中最重要的概念之一. 本章将首先给出函数的定义. 高等数学中多数研究的是初等函数. 本章将复习各类基本初等函数及其图形，介绍复合函数，最后给出初等函数的概念.

## 第一节　函数的定义

### 一、定义的引出

在同一种自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量，而且这几个变量通常并不是互不相干地、孤立地在变化着，而是相互联系地、遵循着一定的规律在变化着. 下面先就两个变量的情形(多于两个变量的情形在第八章中介绍)举几个例子.

**例 1**　真空中自由落体下落的时间 $t$ 和下落的路程 $s$ 都是变量，并且这两个变量并不是孤立地变化着，而是遵循自由落体运动的规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

相互联系地变化着，其中 $g$ 是重力加速度.

**例 2**　一个 10 Ω 的电阻，使用不同的电压通电，用电流表测得电压 $U$ 和电流 $I$ 的关系如表 1-1 所示.

**表 1-1**

| $U$/V | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I$/A | 0.55 | 1.04 | 1.45 | 2.01 | 2.45 | 3.01 |

在这个问题中，电压 $U$ 和电流 $I$ 都是变量，并且是遵循表 1-1 所示的规律($U$ 为 5 V 时，$I$ 为 0.55 A，$U$ 为 10 V 时，$I$ 为 1.04 A……)相互联系地变化着.

**例 3**　某气象观测站用自动温度记录仪，记录得到某日某地区的气温变化如图 1-1 所示. 这里时间 $t$ 和温度 $T$ 都是变量，并且遵循图示规律相互联系地变化着.

上述诸例，虽然实际意义各不相同，但是它们的共同点是：含有两个变量，不妨叫做 $x$ 和 $y$，当某一变量(如 $x$)每取定一值时，另一变量(如 $y$)总有确定的值和它相对应. 把变量 $y$ 叫做变量 $x$ 的函数(如前述诸例中，路程是时间的函数；电流是电压的函数；温度是时间的函数). 这就是函数定义的粗略说法.

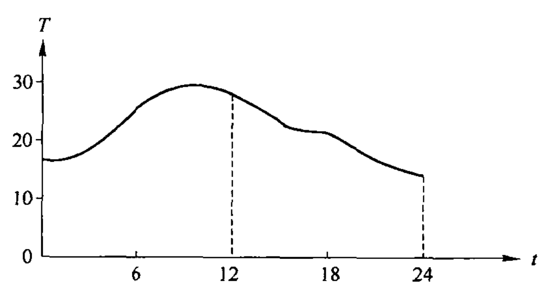

图 1-1

然而更加深入地考虑上述诸例之后，发现

在函数的概念中有两个要素.

首先,第一个变量所能取的值,是有范围限制的.如例 1 中的 $t$ 只能取在开始下落的时刻到着地的时刻之间;例 2 中的 $U$ 只取了 5,10,15,20,25,30 六个值;例 3 中的 $t$ 只能取 0～24 小时之间的值.因此,第一个变量的变化范围应该是函数概念中的一个要素.

其次,两个变量之间都存在着一个对应规律.如例 1 中的对应规律是"$t$ 平方后乘 $g/2$ 得 $s$";例 2 中的对应规律如表 1-1 所示;例 3 中的对应规律如图 1-1 所示.因此,两个变量之间的对应规律应该是函数概念的另一个要素.

显然,这两个要素应该反映在函数的定义中.于是,抛开上述诸例的实际意义,就可以抽象得到函数的确切定义了.

## 二、函数的定义

**定义 1** 若变量 $x$ 在某范围内每取定一值①后,根据某一**对应规律**,变量 $y$ 总有确定的值与之对应,就称 **$y$ 是 $x$ 的函数**.

$x$ 叫做**自变量**,$y$ 叫做**因变量**.$x$ 的变化范围叫做这个函数的**定义域**.

该定义言简而意深.下面通过一组问题来深入领会它的含义.

(1) $y=C$($C$ 是常数)是否表示了 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系?

有人可能会想:在上式 $y=C$ 中,根本就没有出现 $x$,因此不表示 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系.如果这样想,那就错了.因为是否表示 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系,应该根据函数的定义来回答.而在函数的定义中,并没有要求自变量 $x$ 变化时,函数 $y$ 的值一定要变.重要的是,对自变量 $x$ 可能取的每一个值,函数 $y$ 总有确定的值与之对应.现在对于任一实数 $x$,$y$,总有确定的值 $C$ 与之对应.因此,**常数可以作为函数的特例**.

(2) $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ 是否表示了 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系?

有人可能会因为该式右端有正负号而犹豫.其实,在函数的定义中,并没有要求 $y$ 到底有几个确定的对应值,所以回答应该是肯定的.

如果 $x$ 在定义域内任取一个值后,$y$ 都只有一个确定的值与之对应,则称此函数是**单值的**,否则称为**多值的**.

今后若无特殊声明,所讲的函数均指单值函数.希望读者记住.

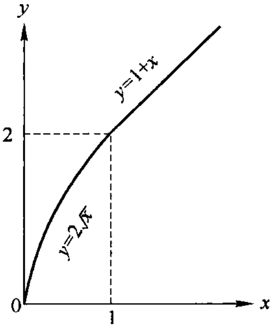

图 1-2

(3) $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$ 是否表示了 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系?

该问题的回答仍然是肯定的.这是因为在函数的定义中,并没有要求必须用什么方式来表示函数.

此类函数,今后常会遇到,它叫做**分段函数**,即在不同的范围内,用不同的式子来表示一个(注意:并不是两个)函数.如上述函数是确定在区间$[0,+\infty)$上的一个函数,当自变量 $x$ 取闭区间$[0,1]$上的数值时,对应的函数 $y$ 的值由式子 $y=2\sqrt{x}$ 确定;当 $x$ 取区间$(1,+\infty)$内的数值时,$y$ 由式子 $y=1+x$ 确定.它的图形如图 1-2 所示.

① 本书仅在实数范围内研究问题,因此,凡书中提到的"数值",均指实数值.

(4) $x^2+y^2=-1$ 是否表示了 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系？

有人可能会被该式的表面现象所迷惑，而错误地得出了肯定的回答. 其实，因为不论 $x$ 取何值，该式左端总不会是负的，也就是说，根本没有定义域. 根据函数的定义得知少了一个要素，因此不能说 $y$ 是 $x$ 的函数.

(5) $y_1=x+1$ 和 $y_2=\dfrac{x_2-1}{x-1}$ 是否表示同一个函数？

有人可能会想：由于第二个式子右端的分子和分母约去$x-1$后，和第一个式子的右端就相同了，因此表示同一个函数. 然而这种想法是不对的. 正确的回答应该是：由于 $y_1$ 的定义域是整个实数轴，而 $y_2$ 的定义域是整个实数轴除去 $x=1$ 这一点，因为它们的定义域不同，所以不表示同一个函数.

(6) $y_1=x$ 和 $y_2=\sqrt{x^2}$ 是否表示同一个函数？

首先看到，这两个函数的定义域是相同的(整个实数轴). 那么它们是否表示同一个函数呢？在函数的定义中，除定义域这个要素外，还有一个要素，那就是两个变量间的对应规律. 而这两个函数的对应规律是不同的，前者由 $x$ 直接得到 $y_1$；后者由 $x$ 平方后再开方才得到 $y_2$. 故 $y_1$ 的值取在 $(-\infty,+\infty)$ 中，而 $y_2$ 的值取在 $[0,+\infty)$ 中(这是因为 $y_2=\sqrt{x^2}=|x|$)，所以正确的回答应该是：它们不表示同一个函数.

通过上述问题的讨论，读者可能已经体会到为什么说函数的定义是“言简而意深”的. 也就是说，函数的概念虽然简单，但要想理解透彻，尚需下一点工夫.

### 思 考 题

1. 什么叫做函数？函数定义中的两个要素是什么？

2. 什么叫做函数的定义域？没有定义域的函数存在吗？它也能叫做函数吗？

3. 为什么常数也可以看做是函数？

4. $y_1=\lg x^2$ 和 $y_2=2\lg x$ 是否表示同一个函数，为什么？

5. $y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ 2x, & x>0,\end{cases}$ 是表示一个函数还是两个函数，为什么？试画出其图形.

6. $M(x,y)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的动点，如图 1-3 所示. 问：

(1) 弧$\overset{\frown}{OM}$的长度是不是 $x$ 的函数？

(2) 图中阴影部分的面积是不是 $x$ 的函数？

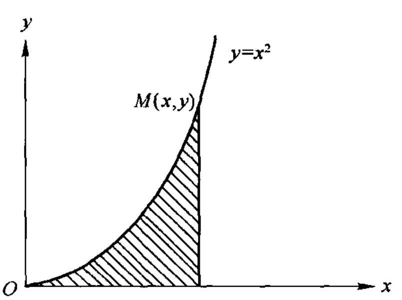

图 1-3

# 第二节　函数的定义域

从第一节的问题(5)和(6)可以看到：函数定义中的两个要素十分重要，两要素之一不同就表示不同的函数. 因此，下面就怎样求函数的定义域、怎样表示对应规律的函数记号等内容，详细地进行研究.

本节研究怎样求函数定义域的问题.

如果自变量取某一数值 $x_0$ 时，函数有确定的值和它对应，那么就称该函数在 $x_0$ 处有定

义. 因此，函数的定义域，也就是使函数有定义的全体实数.

函数的定义域，需要根据函数的数学表达式和实际意义来求，并且以后者为主. 下面看一个简单的例子.

函数 $y=Cx^2$($C$ 是常数).

(1) 若是纯数学的、抽象的函数，则其定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(2) 若上式中 $C=\pi$，$x$ 和 $y$ 分别表示圆的半径和面积，则其定义域为$(0,+\infty)$；

(3) 若上式中 $C=\dfrac{1}{2}g$，$x$ 和 $y$ 分别表示真空中自由落体下落的时间和路程，则其定义域为$[0,T]$，$T$ 表示落地时间.

然而，数学中常常研究的是抽象的函数，这时定义域仅由公式本身决定. 求定义域时只需考虑数值计算是否合理，比如：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号内的数不能小于零；

(3) $\log_a x$($a$ 是不等于 1 的正常数)中的 $x$ 必须大于零；

(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 中 $x$ 的绝对值不能大于 1.

**例 1** 求函数 $y=x+e^x-\sin x$ 的定义域.

**解** 由于不论 $x$ 取任何值，$y$ 都有确定的值与之对应，因此该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

**注** 若函数在整个实数轴上每一点都有定义，就叫做是**处处有定义**的.

**例 2** 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x}$的定义域.

**解** 由于分母不能为零，又由于偶次根号内的数不能小于零，所以当 $x\neq0$ 并且 $3-x\geqslant0$(即 $x\leqslant3$)时该函数有定义. 因此，所求定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

**注** 函数的定义域一般**用区间或不等式来表示**. 如例 2 所求的定义域也可表示为 $-\infty<x<0$ 和 $0<x\leqslant3$.

**例 3** 求函数 $y=\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$的定义域.

**解** 由于 $\arcsin X$ 中 $X$ 的绝对值不能大于 1，而在本例中

$$X=\frac{3-2x}{5}.$$

解不等式

$$\left|\frac{3-2x}{5}\right|\leqslant1.$$

$$|3-2x|\leqslant5,\ -5\leqslant3-2x\leqslant5,\ -8\leqslant-2x\leqslant2,$$

即 $-1\leqslant x\leqslant4$ 时，该函数有定义. 因此，所求定义域为$[-1,4]$.

**例 4** 求函数

$$y=\frac{\sqrt{3-x}}{x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$$

的定义域.

**解** 由于要 $y$ 有确定的值，必须也只需上式右端的两个式子**同时有确定的值**，所以函数的定义域也就是使这两个式子有确定的值的自变量值的**公共部分**.

根据上两例的结果得知：该函数的定义域应该是$[-1,4]$和$(-\infty,0)$及$(0,3]$的公共部分，

如图 1-4 所示.

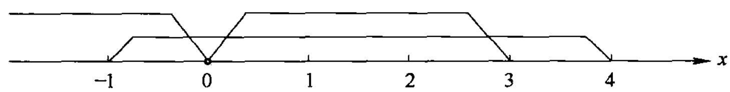


图 1-4

因此,所求定义域为$[-1,0)\cup(0,3]$.

**注 1** 作图时,凡不属于图形上的点,都用**空圈**来表示(如图 1-4 中的 $x=0$ 这一点).

**注 2** 用区间来表示定义域时,需要特别注意区间的端点是否包含在此定义域内的问题.也就是应该用闭区间,还是用开区间,还是用半开区间表示的问题.

**例 5** 求函数

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$$

的定义域.

**解** 由于分母不能为零,所以当 $x\neq2$ 时,$\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$有定义.

又由于 $\log_a X$ 中的 $X$ 必须大于零,而在本例中,$X=2x-3(a=10)$,即当 $2x-3>0$ 时,亦即 $x>\frac{3}{2}$时,$\lg(2x-3)$有定义.

因此,$x\neq2$ 和 $x>\frac{3}{2}$的公共部分,即$\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$就是所求的定义域,如图 1-5 所示.

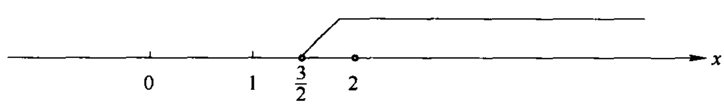


图 1-5

**例 6** 求函数 $y=\sqrt{x^2-7x+12}$的定义域.

**解** 由于偶次根号内的数不能小于零,所以当 $x^2-7x+12\geqslant0$ 时,即$(x-3)(x-4)\geqslant0$ 时,该函数有定义.解出这个不等式,就可以得到所求的定义域了.

该不等式左端两个因式的零点是 $x=3,4$.这两个点把整个实数轴分成了 3 个区间:$(-\infty,3)$,$(3,4)$,$(4,+\infty)$,如图 1-6 所示.

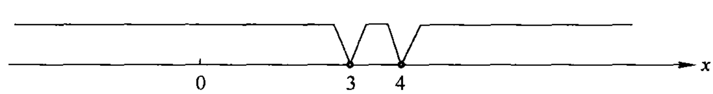


图 1-6

分别在这 3 个区间内考察两因式 $x-3$ 和 $x-4$ 的符号:

(1) 在$(-\infty,3)$内,两因式都取负值,所得乘积为正,函数在这个区间内有定义;

(2) 在$(3,4)$内,两因式取异号值,所得乘积为负,函数在这个区间内没有定义;

(3) 在$(4,+\infty)$内,两因式都取正值,所得乘积为正,函数在这个区间内有定义.

至于在点 $x=3$ 和 $x=4$ 处,由于两因式必有一个为零,因此函数在这两点有定义.

综上所述,即得所求定义域为$(-\infty,3]\cup[4,+\infty)$.

**例 7** 求函数 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域.

**解** 由于偶次根号内的数不能小于零,所以当 $\cos x-1\geqslant 0$ 时,即 $\cos x\geqslant 1$ 时,该函数有定义.

又由于 $\cos x$ 的值是不会大于 1 的,所以只有当 $\cos x=1$ 时,该函数才有定义. 即所求定义域为 $x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$,如图 1-7 所示.

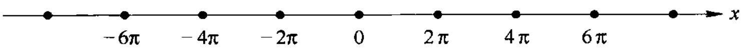


图 1-7

**注** 此例说明,函数的定义域不一定是区间,也可以是实数轴上的一些点.

**例 8** 求函数 $y=|x+1|-1$ 的定义域,并作出其图形.

**解** 应当先去掉上式中的绝对值符号.

由于当 $x+1\geqslant 0$ 时,即 $x\geqslant -1$ 时,$|x+1|=x+1$,所以

$$y=(x+1)-1=x.$$

又由于当 $x+1<0$ 时,即 $x<-1$ 时,$|x+1|=-(x+1)$,所以

$$y=-(x+1)-1=-x-2.$$

因此该函数可以分段表示为

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant -1,\\ -x-2, & x<-1.\end{cases}$$

其图形如图 1-8 所示.

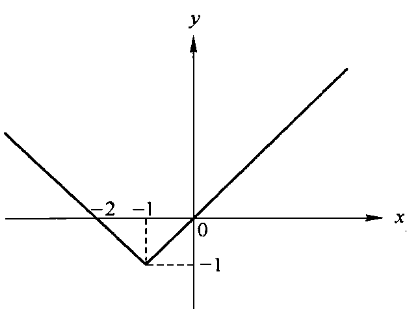


图 1-8

因为当 $x\geqslant -1$ 时,函数是有定义的:$y=x$. 当 $x<-1$ 时,函数也有定义:$y=-x-2$. 所以该函数是处处有定义的,即所求定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

**注** 用绝对值来表示的函数,常常需要先把它写成分段函数的形式,以便进行研究.

如:$y=|x|$ 可写成

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

又如:

$$y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

可写成

$$y=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

至此,读者可能会问:为什么要求函数的定义域呢? 也就是学习本节的目的是什么?

后面在研究函数(比如某函数是否具有某特性;又如需作某函数的图形等)时,常常先确定该函数在什么范围内存在(即有定义). 如果该函数在某部分根本不存在,则对这部分就没有再往下研究的必要了.

## 思 考 题

1. 何谓函数在一点 $x=x_0$ 处是有定义的? 又何谓函数是处处有定义的?

2. 怎样根据公式本身来求函数的定义域?

3. 下列函数在所给点处有定义吗?

(1) $y=\frac{1}{x+1}$ 在 $x=1$ 处;

(2) $y=\sqrt{-x}$ 在 $x=2$ 处;

(3) $y=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处;

(4) $y=\lg(1+x^2)$ 在 $x=0$ 处;

(5) $y=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ x-1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

### 习 题 1-2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=1-\log_5 x$;

(2) $y=e^{1/x}$;

(3) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$;

(4) $y=\arccos\frac{x-3}{2}$;

(5) $y=\sqrt{1-|x|}$;

(6) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

(7) $y=\lg\frac{1}{1+x}+\sqrt[3]{x+2}$;

(8) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

(9) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;

(10) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}-\ln(4-x)$;

(11) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$;

(12) $y=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}}$;

(13) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$;

(14) $y=\tan(x+1)$.

2. 求下列函数的定义域,并作图.

(1) $y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<2,\\ 2, & x\geqslant 2;\end{cases}$

(2) $y=|x-2|$;

(3) $y=\begin{cases}x^2+1, & 0<x\leqslant 2,\\ 0, & x=0,\\ x^2-1, & -1\leqslant x<0;\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}|x-1|, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & x<0, x>2.\end{cases}$

## 第三节 函数记号

函数定义中的第二个要素对应规律,也就是 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系.从第一节引出函数定义的 3 个例题可以看到:通常可以用 3 种方法来具体地表示,它们各有优缺点.

**1. 公式法**

如:例 1 的 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

其优点是准确，便于理论分析和运算；其缺点是不够直观.

**2. 表格法**

如：例 2 的电压和电流的关系表.

其优点是方便，可以直接查阅；其缺点是表中所列的数据常常不完全，也不便于进行理论分析.

**3. 图示法**

如：例 3 的气温变化图.

其优点是直观，一目了然；其缺点是不便于作理论分析.

以后所讨论的函数，一般用公式表示，再辅之以图形. 需要特别注意如下问题.

(1) 函数和表示法切勿混为一谈，同一个函数常常可以用各种不同的方法来表示. 比如正弦函数，既可以用公式 $y=\sin x$ 表示，也可以用三角函数表表示，又可以用图表示.

(2) 切勿认为函数就是公式，公式仅仅是表示函数的一种方法. 很多实际问题中遇到的函数，常常不能用公式来表示. 比如，气温变化图就无法用公式表示.

有的时候，只需要表示 $y$ 是 $x$ 的函数，而并不需要知道其具体的对应规律是什么，那么可以用记号 $y=f(x)$（读做"$y$ 是 $x$ 的函数"）来表示. 比如，$s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 就可以记为 $s=f(t)$.

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母 $f$ 表示了 $x$ 和 $y$ 之间的对应规律. 比如，上述 $s=f(t)$ 中的 $f$ 就表示了如下具体的对应规律：$t$ 平方后乘以 $\dfrac{1}{2}g$ 得 $s$.

$y$ 是 $x$ 的函数，也常常记为 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 或 $y=y(x)$ 等. 需要注意的是：在同一个问题中，如果有几个函数，为了避免混淆，应该分别用不同的记号来表示.

自变量 $x$ 在其定义域内取一个值 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 对应的值叫做该函数在 $x=x_0$ 处的**函数值**，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

欲求 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$，只需将 $x_0$ 代替 $f(x)$ 中的 $x$. 比如，对于函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 来说，当 $x=0$ 时，$f(0)=0^2-3\times0+5=5$；当 $x=2$ 时，$f(2)=2^2-3\times2+5=3$；当 $x=x_0$ 时，$f(x_0)=x_0^2-3x_0+5$.

下面做几个求函数值和熟悉函数记号的例题.

**例 1** 设 $f(x)=x\cdot4^{x-2}$，试求 $f(3)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$\dfrac{1}{f(a)}$，$f(x^2)$ 和 $[f(x)]^2$（$a$ 是大于 1 的正整数）.

**解**

$$f(3)=3\times4^{3-2}=12;$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}\cdot4^{\frac{1}{a}-2}=\frac{\sqrt[a]{4}}{16a};$$

$$\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{a\cdot4^{a-2}}=\frac{16}{4^a a};$$

$$f(x^2)=x^2\cdot4^{x^2-2}=\frac{x^2\cdot4^{x^2}}{16};$$

$$[f(x)]^2=(x\cdot4^{x-2})^2=x^2\cdot4^{2(x-2)}.$$

**例 2** 设 $\varphi(x)=x^2+9$，$\psi(x)=4+\sqrt{x}$，试求：$\varphi[\psi(9)]$和 $\psi[\varphi(-4)]$.

**解** 因为 $\psi(9)=4+\sqrt{9}=7$，所以

$$\varphi[\psi(9)]=\varphi(7)=7^2+9=58;$$

又因为 $\varphi(-4)=(-4)^2+9=25$，所以

$$\psi[\varphi(-4)]=\psi(25)=4+\sqrt{25}=9.$$

**例 3** 设 $f(x)=\lg x$. 试证：

(1) $f(x^n)=nf(x)$；

(2) $f(xy)=f(x)+f(y)$.

**证** 根据对数的性质即可证明：

(1) $f(x^n)=\lg x^n=n\lg x=nf(x)$；

(2) $f(xy)=\lg(xy)=\lg x+\lg y=f(x)+f(y)$.

**例 4** (1) 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$，求 $f(x)$.

(2) 已知 $f(x+1)=x^2-1$，求 $f(\sin x)$.

**解** (1) 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$，所以

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

**注** 由于题目中给出了 $x>0$，因此 $x$ 才可以写到分母上去，并且 $\sqrt{x^2}=|x|=x$. 类似这种细节问题，希望读者在看书时注意体会.

(2) 只需先求出 $f(x)$.

因为 $f(x+1)=x^2-1=(x+1)^2-2(x+1)$，所以

$$f(x)=x^2-2x,$$

因此

$$f(\sin x)=\sin^2 x-2\sin x.$$

**例 5** 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

试求：$f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(4)$，并作出其图形.

**解**

$$f(-2)=-(-2)=2,$$
$$f(0)=0^2=0,$$
$$f(1)=1^2=1,$$
$$f(2)=2^2=4.$$

由于该函数的定义域为 $(-\infty,2]$，所以在 $x=4$ 这一点函数没有定义，即 $f(4)$ 不存在. 该函数的图形如图 1-9 所示.

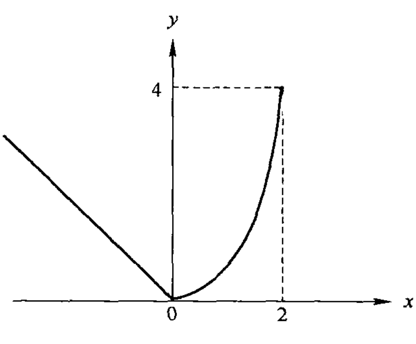

图 1-9

对于分段函数，求某点的函数值时，需要特别注意用哪个式子求的问题. 比如上例中，求 $f(-2)$ 要用式子 $f(x)=-x$，而求 $f(0)$，$f(1)$ 和 $f(2)$，则要用式子 $f(x)=x^2$.

## 思 考 题

1. 表示函数对应规律的方法一般有哪几种？它们各有什么优缺点？
2. 函数就是公式，这句话对吗，为什么？
3. 如果 $f(x)=x^2-x+7$，试问 $f(2)$ 等于什么？$f(2)$ 和 $f(x)$ 有何区别和联系？

4. 如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，问函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $x=x_0$ 处是否一定有定义，为什么？

### 习　题　1-3

1. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$.

2. 设 $f(x)=\arcsin x$，求下列函数值：$f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(1)$.

3. 设 $F(x)=\mathrm{e}^x$，证明：

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$；

(2) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$.

4. 若 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，证明：$f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

5. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，并已知 $f(-2)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=5$，试求出 $a,b,c$，以确定该函数.

6. 求 $f(x)$，设

(1) $f(x+1)=x^2-3x+2$；

(2) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x<3.\end{cases}$ 试求：$f(2)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(3)$.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ 试求：$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数的图形.

## 第四节　函数的几种特性

某些（注意：并非所有）函数具有以下一些特殊的性质.

### 一、奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 当 $x$ 改变符号时，函数值也改变了符号，即对于定义域内的 $x$ 都满足 $f(-x)=-f(x)$，则称该函数是**奇函数**. 如 $y=x$，$y=x^3$，$y=\sin x$ 等.

奇函数的图形是关于原点对称的，这是因为 $f(-x)=-f(x)$，所以当点 $A[x,f(x)]$ 在图形上时，点 $A'[-x,-f(x)]$ 也在图形上，而点 $A'$ 和点 $A$ 是关于原点对称的，如图 1-10 所示.

如果函数 $y=f(x)$ 当 $x$ 改变符号时，函数值不变，即对于定义域内的 $x$ 都满足 $f(-x)=f(x)$，则称该函数是**偶函数**. 如 $y=x^2$，$y=x^4$，$y=\cos x$ 等.

偶函数的图形是关于 $y$ 轴对称的，这是因为 $f(-x)=f(x)$，所以当点 $A[x,f(x)]$ 在图形

上时，点 $A''[-x,f(x)]$ 也在图形上，而点 $A''$ 和点 $A$ 是关于 $y$ 轴对称的，如图 1-11 所示.

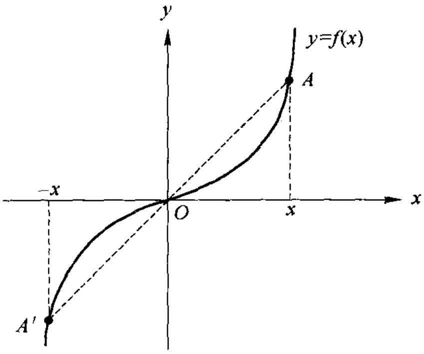


图 1-10

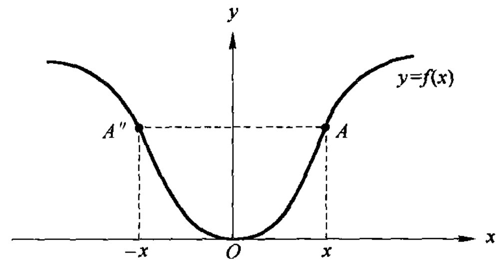


图 1-11

需要注意的是：并非所有的函数都具有奇偶性. 比如 $y=x^2+x^3$，$y=\sin x+\cos x$ 等既非奇函数也非偶函数.

## 二、单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在某区间内随 $x$ 的增加而增加，即设 $x_1$ 和 $x_2$ 是该区间内的任意两点，且 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称该函数在此区间内是**单调增加**的. 其图形是沿横轴的正向而上升的，如图 1-12 所示.

如果函数 $y=f(x)$ 在某区间内随 $x$ 的增加而减少，即设 $x_1$ 和 $x_2$ 是该区间内的任意两点，且 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称该函数在此区间内是**单调减少**的. 其图形是沿横轴的正向而下降的，如图 1-13 所示.

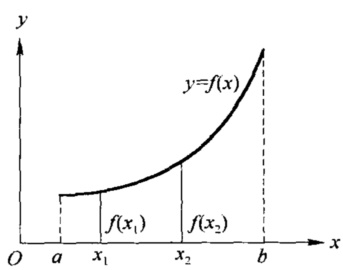


图 1-12

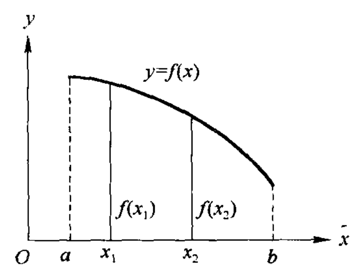


图 1-13

需要注意的是，上述函数的单调增加或单调减少都是函数在某区间内的性态，是相对于某范围而言的. 一个函数，可能在这个区间内是单调增加的，而在另一个区间内是单调减少的. 比如：$y=x^2$，该函数在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，所以在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的，如图 1-14 所示.

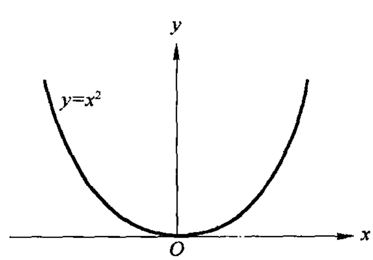


图 1-14

如果函数在它的整个定义域内是单调增加的，则称该函数为**增函数**，如 $y=x$. 如果函数在它的整个定义域内是单调减少的，则称该函数为**减函数**，如 $y=-x$. 增函数或减函