《工程数学方法》编写组

工程数学方法

GONGCHENGSHUXUE FANGFA

（第 2 分册）

东南大学出版社

工程数学方法

（第2分册）

《工程数学方法》编写组

东南大学出版社

目　录

第四篇　复变函数

第五篇 数学物理方程

第四篇　复变函数

1　复数与复变函数

复变函数是自变量为复数的函数。复变函数在分析结构上与高等数学几乎相同。它们分别按照如下顺序建立起来：

复数 ↗ 复平面上的点集(区域) ┐ → 复变函数的极限、连续、
　　 ↘ 复变函数　　　　　　 ┘ 　 导数、积分及级数

实数 ↗ 实数集 ┐ → 实变函数的极限、连续、
　　 ↘ 实变函数 ┘ 　 导数、积分及级数

因此，在 1.1 节中复习和补充关于复数及其运算的内容，其中大部分内容(除复球面表示法外)在中学已经学过；第 1.2，1.3 节中分别引入区域、函数、极限等概念。它们与高等数学中的有关概念和性质，在形式上几乎一样，但本质上却有很大的差别。这种差别正是反映复变函数特点的基础，使复变函数具有微积分所没有的优越性。因此在学习过程中，注意同高等数学的有关概念比较，找出它们之间的区别和联系是重要的。

1.1　复数

1.1.1　复数及其表示法

设 x 和 y 是任意的实数，则称 $z = x + \mathrm{i}y$(或 $x + y\mathrm{i}$) 为**复数**。其中 i 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的一个根，称为虚数单位；x 称为复数 z 的**实**

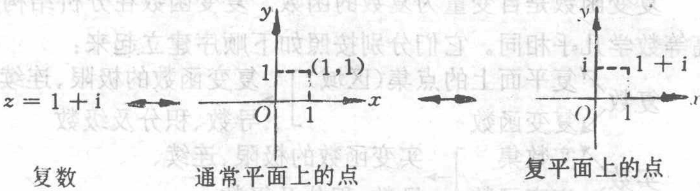
部，记为 $\mathrm{Re}z$；y 称为 z 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}z$。如果 $x=0, y\neq 0$，则 $z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**。如果 $y=0$，则 z 为实数 x，所以实数可以看作复数的特殊情形。

值得注意，复数与实数不同，两个复数不能比较大小。

下面给出复数的几种表示法：

1）代数表示法：$z=x+\mathrm{i}y$。

2）点表示法：在平面上取定直角坐标系，则平面上的点 (x,y) 与复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 一一对应。如果视横轴为实轴，纵轴为虚轴，即横轴上的点表示实数，纵轴上的点表示纯虚数，则两轴所在的平面叫做**复平面**或简称**平面**。这样复平面上的点与复数可以一一对应，这种对应给出了复数的点表示。例如：



3）向量表示法：由于点 (x,y) 与从原点指向点 (x,y) 的向量一一对应，所以复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用点 z 所对应的向量表示（如图 1.1）。

向量的长度 r 称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**，记为 $|z|$。于是

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

显然，$|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|x|+|y|$。

$z=0$ 当且仅当 $|z|=0$。

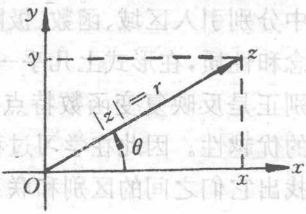


图 1.1

当 $z\neq 0$ 时，实轴的正向与向量之间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$。显然 $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，且任意两值之间相差 2π 的整数倍。记 $\arg z$ 为其中某个特定值，并称适合条件 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 为 z 的辐角的**主值**。于是

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z) = \frac{y}{x}$$

值得一提，在利用上式求复数 $z = x + iy(\neq 0)$ 的辐角主值时必须注意，当 z 在第一、四象限时，$\arg z = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$；当 z 在第二象限时，$\arg z = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \pi$；当 z 在第三象限时，$\arg z = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - \pi$。

当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，而幅角不确定。

例 1 求 $\mathrm{Arg}(2 - 2i)$ 及 $\mathrm{Arg}(-3 + 4i)$。

解 因为 $z = 2 - 2i$ 在第四象限，$z = -3 + 4i$ 在第二象限，于是它们的辐角主值分别为

$$\arg(2 - 2i) = \mathrm{arctg}(-\frac{2}{2}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(-3 + 4i) = \mathrm{arctg}(-\frac{4}{3}) + \pi = -\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} + \pi$$

因此

$$\mathrm{Arg}(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

$$\mathrm{Arg}(-3 + 4i) = -\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} + (2k + 1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

4) 三角表示法：由图 1.1 知，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，于是复数的代数形式可转化为三角形式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$。

5) 指数表示法：利用我们熟知的欧拉(Euler)公式 $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$，复数的三角形式可转化为指数形式：$z = re^{i\theta}$。

例 2 将 $1 - \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (0 \leqslant \varphi < \pi)$ 化为三角表示和指数表示式。

解 $1 - \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$= 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + i \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2})$$

于是，z 的三角表示式为

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

z 的指数表示式为

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}$$

6) 复球面表示法：以复平面上的原点 O 为中心作单位球面 G，并过 O 点作平面的垂线交上半球面于 N，称为球面的**北极**，与下半球面的交点称为**南极**，记为 S。让 x_1 轴、x_2 轴分别为复平面上的实轴、虚轴，x_3 轴以 ON 方向为正方向（如图 1.2）。

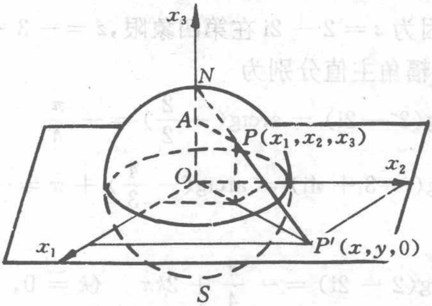


图 1.2

作以北极 N 为中心的球极映射（即将复平面上任一点 P' 与 N 连接成直线，并设此直线与球面的交点是 P，则称对应 $P\to P'$ 为**球极映射**，如图 1.2），显然，它将 $G-\{N\}$ 一一映射成整个复平面。利用相似三角形对应边成比例知

$$\frac{x}{1}=\frac{x_1}{1-x_3},\quad \frac{y}{1}=\frac{x_2}{1-x_3}$$

于是上述对应关系可表为

$$z=x+\mathrm{i}y=\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}$$

或

$$x_1=\frac{2\mathrm{Re}z}{1+|z|^2},\quad x_2=\frac{2\mathrm{Im}z}{1+|z|^2},\quad x_3=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \tag{1.1}$$

由图 1.2 知，当 $|z|$ 无限增大时，点 P 就无限接近于 N。这就启发人们在复平面上添加进无穷远点（记为 ∞）与 N 相对应。复平面

加上 ∞ 后称为**扩充复平面**。在扩充复平面上，复数 ∞ 的实部、虚部以及幅角的概念都没有意义，$|\infty| = \infty$，其它复数 z，$|z| < \infty$。并且规定：当 $\alpha \neq \infty$ 时，$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$，$\alpha - \infty = \infty - \alpha = \infty$，$\dfrac{\alpha}{\infty} = 0$，$\dfrac{\infty}{\alpha} = \infty$；当 $\alpha \neq 0$ 时，$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty$；而 $\infty \pm \infty$，$0 \cdot \infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ 均无意义。

由(1.1)式知，∞ 的对应点为 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$，即 N 与 ∞ 对应(这使无穷远点不再是看不见摸不着的了，它有明显的几何意义 —— 球面 G 上的一个点)。于是，球极映射将球面 G 与扩充复平面一一对应，称这个球面为**复球面**。

因此，复数域的几何模型是复平面或去掉北极的复球面；复数域添加无穷远点后的几何模型是扩充复平面或复球面。

1.1.2　复数的运算及其几何意义

设 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$。

相等：$z_1 = z_2$，当且仅当 $x_1 = x_2$ 同时 $y_1 = y_2$。

四则运算：$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ 称为 z_1 与 z_2 的和(差)。复数加(减)法与向量的加(减)法一样，可按平行四边形法则进行(如图 1.3)。

由加(减)法的几何意义即得复平面上的三角不等式为

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$$

另外

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

称为 z_1 与 z_2 的积。

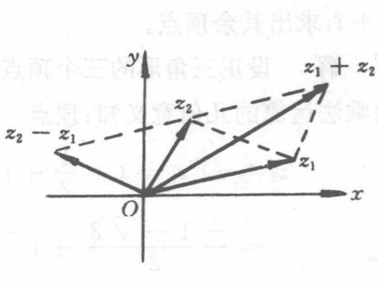


图 1.3

如果 z 满足 $z_1 = z_2 z (z_2 \neq 0)$，称 z 为 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z = \frac{z_1}{z_2}$。由定义即得

$$z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

如果将复数的乘除法用指数形式表示，有

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \quad (1.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \quad (1.3)$$

即，两复数相乘(除)，只要将模相乘(除)，幅角相加(减)(如图1.4)。

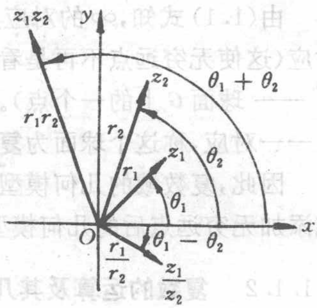


图 1.4

证(1.2)式：

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)|z_2|(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)) \\ &= |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

同理(1.3)式成立。

例 3 已知以原点为中心的一个正三角形的一个顶点为 $z_1 = 1+\mathrm{i}$，求出其余顶点。

解 设正三角形的三个顶点依逆时针方向分别为 z_1, z_2, z_3。由乘法运算的几何意义知：顶点

$$\begin{aligned} z_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) \\ &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

再将 z_2 旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 得另一顶点

$$z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

例 4　利用复数运算的几何意义证明：如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

则

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$$

证　考虑 $\triangle z_1 z_2 z_3$，要证 $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$，即证 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 是等边三角形。

由已知条件得：

$$\arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \tag{1.4}$$

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| \tag{1.5}$$

如果用 $\angle z_i$ 记顶点在 $z_i(i = 1,2,3)$ 的那个角，那么由(1.4) 式得：$\angle z_1 = \angle z_3$。从而 $\angle z_1$ 和 $\angle z_3$ 所对的边相等，即 $|z_2 - z_3| = |z_2 - z_1|$。将它代入(1.5) 式得

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_3 - z_1|^2$$

即

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$$

共轭运算：称 $\bar{z} = x - iy$ 为与 $z = x + iy$ 共轭的复数。

显然，当 $y \neq 0$ 时，z 与 $\bar{z}$ 关于 x 轴对称；当 $y = 0$ 时，z 与 $\bar{z}$ 在 x 轴重合。于是，$z = \bar{z}$ 的充要条件是 z 为实数。

由定义易得共轭复数有如下性质：

$$\bar{\bar{z}} = z,\ \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0)$$

$$x = \mathrm{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \mathrm{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$|z|^2 = z\bar{z},\ |z| = |\bar{z}|$$

利用上述性质可以将平面上的曲线方程的实数形式化为复数

形式。

例 5　将直线方程 $ax+by=c$ 化为复数形式。

解　将 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$ 代入原方程得

$$\frac{a-bi}{2}z+\frac{a+bi}{2}\bar{z}=c$$

令 $\alpha=\dfrac{a+bi}{2}$，则 $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=c$（$\alpha\neq 0$ 为复常数，c 为实常数）。

例 6　将圆的方程用复数形式表示。

解　设圆心为 $-\alpha$，半径为 R，则在此圆周上的点 z 满足：$|z+\alpha|=R$（α 为复常数）。将上式两端平方得：$(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha})=|z+\alpha|^2=R^2$。令 $c=\alpha\bar{\alpha}-R^2$，则 $z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0$（其中 α 为复常数，c 为实常数）。

n 次乘幂运算：n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记为 z^n。当 n 为正整数时，由(1.2)式得

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.6}$$

如果定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，当 n 为负整数时，由(1.3)式知

$$z^{-n}=\frac{1}{r^n\mathrm{e}^{in\theta}}=r^{-n}(\cos(-n\theta)+\mathrm{i}\sin(-n\theta))$$

因此(1.6)式对任意整数成立。

特别当 $|z|=1$ 时，由(1.6)式得棣莫佛(De Moivre)公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.7}$$

如果给定 $z\neq 0$，n 次方程 $w^n=z$ 的解称为 z 的 n 次根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$。

可以证明：

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\arg z}{n}+\frac{2k}{n}\pi)}\quad(k=0,\cdots,n-1) \tag{1.8}$$

这是因为：$|w|^n=|z|$，$n\mathrm{Arg}w=\arg z+2k\pi$，于是

$$w=\sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2k\pi}{n}}\quad(k=0,\pm 1,\cdots)$$

注意到 $k_1 - k_2 = kn$ 时，

$$\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k_1\pi}{n}} \Big/ \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k_2\pi}{n}}$$
$$= e^{i\frac{2(k_1-k_2)\pi}{n}} = 1$$

于是，当 $k = 0,1,2,\cdots,n-1$ 时得到 n 个相异的根；当 k 为其它整数时，其值又重复出现在这 n 个相异的值中，所以(1.8) 式成立。

(1.8) 式说明在几何上 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

例 7 求 $\sqrt[4]{1+i}$。

解 因为 $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$，所以由(1.8) 式得

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$
$$(k = 0,1,2,3)$$

即

$$w_0 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})$$
$$w_1 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{9}{16}\pi + i\sin\frac{9}{16}\pi)$$
$$w_2 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{17}{16}\pi + i\sin\frac{17}{16}\pi)$$
$$w_3 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{25}{16}\pi + i\sin\frac{25}{16}\pi)$$

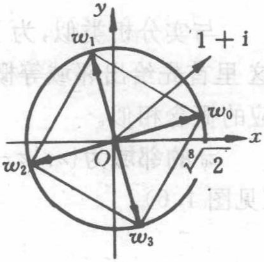


图 1.5

这四个根是内接于中心在原点、半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点(如图 1.5)。

例 8 试证 $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}}$。

证 考虑方程 $z^n = 1$。由(1.8) 式知

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}(k = 0,\cdots,n-1)$$

是方程的 n 个根。即

$$z^n - 1 = (z - z_0)\cdots(z - z_{n-1})$$

其中 $z_0 = 1$,于是,

$$z^{n-1} + \cdots + z + 1 = (z - z_1)\cdots(z - z_{n-1})$$

令 $z = 1$,则

$$\begin{aligned} n &= (1 - z_1)\cdots(1 - z_{n-1}) \\ &= (1 - \cos\frac{2\pi}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n})\cdots(1 \\ &\quad - \cos\frac{2(n-1)}{n}\pi - \mathrm{i}\sin\frac{2(n-1)}{n}\pi) \end{aligned}$$

利用例 2,再两边取模得

$$n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

即

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}}$$

1.2 区域

与实分析类似,为了以后讨论复变函数的极限、连续等问题,这里首先给出邻域等概念。这些概念与高等数学中二维平面上相应的概念相似。

z_0 **的邻域**为 $\{z: |z - z_0| < \delta\}$,即以 z_0 为中心、δ 为半径的开圆(见图 1.6)。

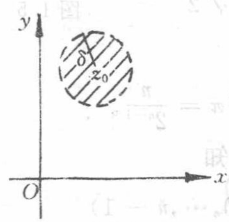


图 1.6

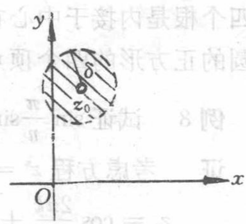


图 1.7

z_0 **的去心邻域**为 $\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$,即将图 1.6 中开圆的中

心 z_0 除去(如图 1.7)。

无穷远点的邻域为$\{z:|z|>M\}\cup\{\infty\}$,即以 O 为中心、M 为半径的圆的外部(不包括圆周),并包括 ∞。

无穷远点的去心邻域为$\{z:|z|>M,z\neq\infty\}$,即上述圆的外部,不包括 ∞。

值得注意,这里第一、二个概念讨论的对象是有限点,所以只需 在有限复平面上考虑;而第三、四个概念讨论的对象是无穷远点,所以要在扩充复平面上考虑。为了便于直观,这里通过球极投影,看一下它们在复球面上分别表示什么。

图 1.8 表示无穷远点的去心邻域所对应的是去掉 N(无穷远点的对应点)的球冠。由此可知无穷远点的邻域为此球冠(包含 N),见图 1.9。

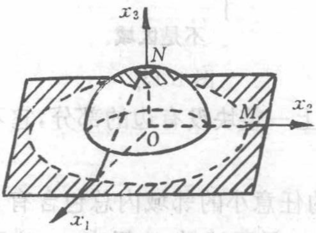


图 1.8

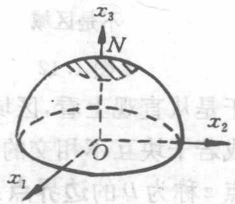


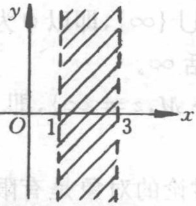
图 1.9

记 D 是平面上的点集,定义:

D 是**开集**:D 中每一个点至少有一个邻域含于 D,如图 1.10 是开集,图 1.12 中的直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上的点不合要求,所以不是开集。

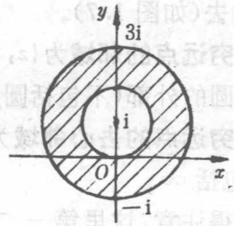
D 是**连通**的:D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来,如图 1.10、1.11、1.12 都是连通的,而图 1.13 不是连通的。

D 是一个**区域**:如果 D 是连通的开集,如图 1.10 是区域,图 1.11、1.12 不是开集,因而不是区域;图 1.13 虽然是开集,但不连通,所以也不是区域。



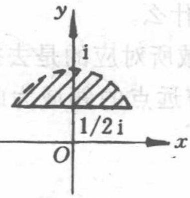
单连通无界区域

图 1.10



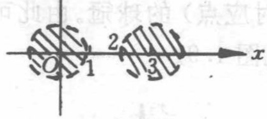
多连通有界闭区域

图 1.11



不是区域

图 1.12



不是区域

图 1.13

于是从直观上看，区域是平面上一整块没有边的部分，它不能分割成若干块互不相交的开集。

点 z 称为 D 的**边界点**：如果 z 的任意小的邻域内总包含有 D 中的点，同时又有非 D 中的点。因此当 D 是区域时，边界点 z 一定不属于 D。例如，图 1.10 中的虚线 $x=1$ 和 $x=3$ 上的点是边界点，又如图 1.12 中的虚线 $|z|=1, y>\frac{1}{2}$ 和实线 $y=\frac{1}{2}, |z|\leqslant 1$ 上的点也是边界点。

D 的**边界**：由 D 的所有边界点组成的集合，如上面所提的虚、实线就是它们所在图中点集的边界。

区域 D 与它的边界一起构成**闭区域**，记为 $\bar{D}$。如图 1.11 中区域 $1<|z-i|<2$ 与其边界线 $|z-i|=1$ 和 $|z-i|=2$ 一起构成闭区域 $1\leqslant|z-i|\leqslant 2$。

如果一个区域（闭区域）可以包含在一个以原点为中心的圆内，那么称它为**有界域**（有界闭域），否则称为**无界域**（无界闭域）。