大学数学学习辅导丛书

◆ 联系考研，渗透精讲历年考研真题

◆ 习题详解，精确解答教材习题

线性代数典型题解答指南

同济·第五版

主编 李汉龙 缪淑贤

国防工业出版社
National Defense Industry Press

内容简介

本书是作者结合多年的教学实践编写的.全书共分七章和两个附录.前六章内容包括行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换,其中配备了较多的典型例题和同步习题,并对典型例题给出了详细的分析、解答和评注.第7章是自测试题及解答.附录1为同济大学《线性代数》(第5版)课后习题全解,附录2为同济大学《线性代数》(第5版)课外习题详解.

本书可作为理工科院校本科各专业学生的线性代数课程学习指导书或考研参考书,也可以作为相关课程教学人员的教学参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数典型题解答指南/李汉龙,缪淑贤主编.—北京:国防工业出版社,2012.5

(大学数学学习辅导丛书)

ISBN 978-7-118-08083-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李…②缪… Ⅲ.①线性代数-高等学校-题解 Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第075755号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 23¼ **字数** 580千字

2012年5月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 39.90元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

线性代数是理工科高等院校的一门最重要的基础课，它对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用. 因此，学好线性代数至关重要，而线性代数题海茫茫，变化万千. 许多学生上课能听懂，解题却不知道从何下手；或自己想不到，别人一点就明白. 究其原因，其中主要一条是线性代数内容多、学时少、速度快、班级大. 许多学生在学习过程中囫囵吞枣，课堂上没有理解，课后又缺少归纳总结，结果事倍功半. 我们编写这本参考书，旨在帮助线性代数的读者较好地解决学习中的困难，其特点是针对不同的问题，对分析、解决问题的思路、方法和技巧加以指导. 编者一方面汇总了国内同类教材的主要优点，另一方面融合了我校众多教师长期讲授该门课程的经验体会，力求思路清晰、推证简洁且可读性强，从而满足广大师生的教学及学习需求.

本书是高等院校理工科类各专业学生学习线性代数课程必备的辅导书，是有志考研学生的精品之选，是授课教师极为有益的教学参考书，是无师自通的自学指导书. 与国内通用的各类优秀的《线性代数》教材相匹配，可同步使用，同时也可以作为考研辅导教册. 全书共分七章和两个附录. 前六章内容包括行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换，其中配备了较多的典型例题和同步习题，并对典型例题给出了详细的分析、解答和评注. 第 7 章是自测试题及解答，附录 1 是同济大学《线性代数》(第 5 版)课后习题全解，附录 2 是同济大学《线性代数》(第 5 版)课外习题详解.

本书以线性代数课程教材的内容为准，按题型归类，进行分析、解答与评注，归纳总结具有共性题目的解题方法，解题简捷、新颖，具有技巧性而又道理显然，可使读者思路畅达，对所学知识融会贯通、灵活运用，达到事半功倍之效. 本书将会成为学生学习《线性代数》的良师益友.

本书前六章每章内容分为四部分：

(1) 内容概要　可以使读者了解课程内容.

(2) 典型例题分析、解答与评注　通过对例题的详细剖析、细致解答，指导读者掌握解题思路和解题方法.

(3) 本章小结　可帮助读者更清楚明了地把握学习要点，更深刻地理解该章的主要学习内容.

(4) 同步习题及解答　对本章重点习题进行梳理，帮助读者检验掌握程度.

第 7 章中给出自测试题及解答，供读者自测之用.

本书第 1 章由赵恩良编写；第 2 章由孙丽华编写；第 3 章由缪淑贤编写；第 4 章由艾瑛编写；第 5 章由闫红梅编写；第 6 章由王金宝编写；第 7 章由李汉龙编写；附录 1 由顾艳莉和孙平

编写（其中顾艳莉编写习题一、习题二和习题三；孙平编写习题四、习题五和习题六）；附录2由隋英编写.全书由李汉龙统稿，李汉龙（主编）、缪淑贤（主编）、王金宝（副主编）、孙丽华（副主编）审稿.另外，本书的编写和出版得到了国防工业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

本书参考了国内出版的一些教材，见本书所附参考文献，在此，对文献作者一并表示感谢.由于水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者、同行和专家批评指正.

本书是线性代数学习指导书，可作为理工科院校本科或专科学生复习和考研的参考书或辅导书，也可以作为相关课程教学人员的教学参考书.

编　者

2012年6月

目　录

第1章 行列式

1.1 内容概要

1.1.1 基本概念

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列称为这 n 个元素的全排列(简称排列). 全排列共有 $n!$ 种.

2. 逆序数

在 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,则称这两个元素形成一个逆序,一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

3. 对换

在排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这一过程称为对换. 将相邻两个元素对换,叫做相邻对换.

4. n 阶行列式

2 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

一般地, n 阶行列式定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t_1} a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$$

$$= \sum (-1)^{t_2} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = \sum (-1)^{t_3} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 式中:行标 $p_1p_2\cdots p_n$、列标 $q_1q_2\cdots q_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列;t_1 为行标排列的逆序数;t_2 为列标排列的逆序数;t_3 为行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和.

【注意】

(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,每项都是取自不同行、不同列的 n 个元素乘积并被冠以正负号.

(2) 行列式的每一项的正负号由下标排列的逆序数决定.

（3）$n=2,3$ 时，行列式计算遵循对角线法则，但 4 阶及 4 阶以上的行列式不遵循对角线法则.

5. 几种特殊行列式的值

1）对角行列式

对角线以外的元素全为零的行列式称为对角行列式. 其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},\quad \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

2）三角形行列式

对角线以下（上）的元素全为零的行列式称为上（下）三角行列式. 其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3）转置行列式

把行列式 D 的行列互换所得的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

【注意】 有的书上也把转置行列式记为 D'.

4）范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j)$$

式中：$\prod$ 表示同类因子的乘积.

6. 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下的 $(n-1)$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

7. 非齐次与齐次线性方程组

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

当右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,式(1.1)称为非齐次线性方程组;当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,式(1.1)称为齐次线性方程组.

1.1.2 基本理论

1. 行列式的性质

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

性质2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

性质4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

2. 行列式按行(列)展开法则

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,行列式任意行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases} \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

3. 克拉默法则

如果 n 元线性方程组(1.1)系数行列式不等于零,即 $D\neq0$,则有唯一解:$x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【注意】

(1) 如果线性方程组无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零.

(2) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,则齐次线性方程组只有零解.

(3) 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.

1.1.3 基本方法

(1) 求排列的逆序数.

(2) 行列式的计算.

① 利用行列式的定义;

② 利用行列式的性质;

③ 将行列式化为上(下)三角形行列式;

④ 行列式按行按列展开(降阶法);

⑤ 利用加边法(升阶法);

⑥ 利用递推法;

⑦ 利用数学归纳法;

⑧ 利用范德蒙行列式结论;

⑨ 利用拉普拉斯定理计算行列式.

(3) 用克拉默法则求解线性方程组.

1.2 典型例题分析、解答与评注

1.2.1 求排列的逆序数

例 1.1 求排列 $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$ 地逆序数,并确定它的奇偶性.

分析 求一个排列的逆序数,只需顺序地计算出这个排列的每个数与它前面的数有多少个逆序,然后把它们加起来就是这个排列的逆序数.

解答 在这个排列中,前 $n+1$ 个数 $1,3,5,\cdots,2n-1,2n$ 中的每一个数与它前面的数都没有逆序. 第 $n+2$ 个元素 $2n-2$ 逆序数为 2,第 $n+3$ 个元素 $2n-4$ 逆序数为 4,最后一个元素 2 逆序数为 $2n-2$,所以

$$\begin{aligned} t[135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42] &= 0+\cdots+0+2+4+\cdots+(2n-2) \\ &= 2[1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)] \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

由于 $n(n-1)$ 为偶数,所以这个排列为偶排列.

评注 排列中元素较多,可总结出元素间逆序的规律,即可求出排列的逆序数.

1.2.2 行列式的计算与证明

行列式的计算与证明方法较多,技巧性比较强,方法也较灵活,现归类总结如下.

1. 用 n 阶行列式定义计算行列式

例 1.2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

分析 该行列式每行(列)只有一个非零元素,考虑使用行列式定义计算.

解答 因为 D 中不为零的元素只有 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,所以 D 中 $n!$ 项只有 $a_1a_2\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_n$ 不为零,其行标排列为标准排列,其列标排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$,逆序数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,所以 $D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1,a_2,\cdots,a_n$.

评注 用行列式的定义计算行列式不是计算行列式的一般方法,只用当行列式的元素中含有零元素较多时,才考虑用行列式定义计算.

例 1.3 利用行列式的定义,证明 $D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

分析 该行列式含有零元素较多,利用行列式的定义证明行列式为零,一般只要证明行列式的每一项均为零即可.

证明 由于行列式只有两行与两列元素非零,其他元素全为零. 5 阶行列式的每一项是 5 个元素的乘积且取自于不同行与不同列,故 5 个元素中至少有一个为零. 从而每项均为零,故行列式等于零,即 $D_5=0$.

评注 利用行列式的定义证明(或计算)行列式的问题,要注意行列式的项数、每一项的构成及符号.

例 1.4 根据行列式定义计算 $f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数及常数项.

分析 注意 4 阶行列式的每一项都是取自不同行不同列的 4 个元素相乘并被冠以正负号,含有 x^4 的只有一项,含有 x^3 的有两项,不要漏掉.

解答 根据行列式定义,只有对角线上元素相乘才出现 x^4,且该项为正,即 $10x^4$. 故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 10. 含 x^3 的项有两项,即 $(-1)^{t(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3$,$(-1)^{t(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3$,故 x^3 的系数为 -5. 将行列式中的元素 x 用 0 代替,计算该 4 阶行列式即得常数项为 3.

评注 求含有未知量的行列式的某项系数,一般是利用行列式的定义.

2. 利用行列式的性质计算或证明行列式

行列式的性质,均可用于计算或证明行列式,应用时要注意观察行列式各行、各列元素的特点,充分运用行列式性质.

例 1.5 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$,求 $\begin{vmatrix} a_{12} & 3a_{11} & a_{13}-a_{11} \\ a_{22} & 3a_{21} & a_{23}-a_{21} \\ a_{32} & 3a_{31} & a_{33}-a_{31} \end{vmatrix}$.

分析 将所求行列式第 2 列提出公因子 3,交换第 1 列与第 2 列,再将第 1 列加到第 3 列,即可利用已知条件计算行列式.

解答 $\begin{vmatrix} a_{12} & 3a_{11} & a_{13}-a_{11} \\ a_{22} & 3a_{21} & a_{23}-a_{21} \\ a_{32} & 3a_{31} & a_{33}-a_{31} \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \div 3} 3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13}-a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23}-a_{21} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33}-a_{31} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_1 \leftrightarrow c_2]{c_3+c_2} -3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -6.$$

评注 观察所求行列式与已知行列式的区别,充分利用行列式的性质,即可计算出行列式的值.

例 1.6 利用行列式的性质证明 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$能被 18 整除.

分析 利用行列式性质将行列式的某一行或某一列化为含有公因子 18 即可.

证明 因为 $D_4 \xlongequal{c_4+10^3c_3+10^2c_2+10c_3} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 1998 \\ 2 & 1 & 9 & 2196 \\ 2 & 3 & 9 & 2394 \\ 1 & 8 & 0 & 1800 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 111 \\ 2 & 1 & 9 & 122 \\ 2 & 3 & 9 & 133 \\ 1 & 8 & 0 & 100 \end{vmatrix}$,所以行列式能被 18 整除.

评注 要证明行列式有公因子 k,常用的一种方法是证明行列式某行(列)各元素有公因子 k,为此,通常利用行列式的性质 6 对行列式进行变换.

例 1.7 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix}$.

分析 由于行列式的每一行元素都是 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与一个常数的和的形式,因此可用后 $n-1$ 列都减去第 1 列,从而简化行列式的计算.

解答 当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 \\ a_2+1 & a_2+2 \end{vmatrix}=a_1-a_2$.

当 $n>2$ 时,从第 2 列开始,每一列减去第 1 列,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a_2+1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}=0$$

评注 若行列式的每一行或每一列元素都是同一个未知元素与一个常数的和的形式,可利用行列式的性质进行将某些行(列)的未知元素消去,再进行行列式的计算.

例 1.8 计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

分析 行列式各行元素之和相等,因此先把行列式后$(n-1)$列都加到第 1 列,提出公因子,再利用行列式性质化为上(下)三角行列式.

解答 $D_{n+1}\begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

评注 由于所求行列式各行元素之和相等,各列元素除一个外也相同,因此先把某一行(列)全部化为 1,再利用该行(列)把行列式化为三角形行列式,从而求出行列式的值.

3. 将行列式化为上(下)三角形行列式进行计算

将行列式化为上(下)三角形行列式进行计算是一种常用的方法. 这种方法常适用于高阶行列式或者元素为字母的行列式.

例 1.9 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

分析 由于行列式主对角线元素不同,其他元素都相同,可将第 1 行(列)减去第 2 行(列),第 3 行(列)减去第 4 行(列),把该行列式化为零元素比较多,从而简化运算.

解答 $D \xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1} xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

评注 所求行列式主对角线元素不同,其他元素都相同,可利用行列式性质把该行列式化为零元素比较多,有公因子的提出公因子,从而简化运算.

例 1.10 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

分析 由行列式的结构可见,除主对角元素为 $1,2,\cdots,n$ 外,其他元素都为 2,故可用各行减去第 2 行(也可用各行减去第 1 行),使行列式得到简化.

解答 将各行都减去第 2 行,得

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

评注 行列式除主对角线元素外其他元素都相同时,可将其中的 $(n-1)$ 行(列)都减去某一行(列),达到简化行列式的目的.

例 1.11 计算 20 阶行列式 $D_{20} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 18 & 19 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 17 & 18 & 19 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 16 & 17 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 19 & 18 & 17 & \cdots & 2 & 1 & 2 \\ 20 & 19 & 18 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

分析 注意到此行列式的相邻两列(行)的对应元素仅差 1,从第 20 列起,后列减去前列,即可化简.

解答 $D_{20} \xlongequal{\text{从第 20 列起,后列减前列}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 19 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ 20 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,20]{r_i+r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\3&0&2&\cdots&2&2&2\\4&0&0&\cdots&2&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\20&0&0&\cdots&0&0&2\\21&0&0&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 20 行展}}(-1)^{20+1}\cdot 21\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\0&2&2&\cdots&2&2&2\\0&0&2&\cdots&2&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0&2\end{vmatrix}=-21\times 2^{18}.$$

评注 计算行列式应先注意观察一下行列式元素的特点，选取恰当的方法化简可使运算简便.

4. 行列式按行按列展开

例 1.12 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}$.

分析 该行列式第 3 行元素较简单，可将第 3 列乘以 2 分别加到第 2 列和第 4 列，再按第 3 行展开.

解答 $D_4\xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&7&-5&13\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\0&7&-7&12\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}7&-5&13\\2&-1&2\\7&-7&12\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2}-\begin{vmatrix}-3&-5&3\\0&-1&0\\-7&-7&-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}\begin{vmatrix}-3&3\\-7&-2\end{vmatrix}=27$$

评注 利用行列式按行(列)展开法则计算行列式，应先看一下哪一行(列)的元素较简单，然后利用行列式的性质将这一行(列)化为有较多的零元素，再按该行(列)展开.

例 1.13 已知 $D=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&2&2&3\\2&2&3&4\end{vmatrix}$，计算：

(1) $A_{13}+A_{23}+A_{33}+3A_{43}$.

(2) $A_{21}+2A_{22}+2A_{23}+3A_{24}$. 其中 $A_{i,j}(i=1,2,3,4)$ 为行列式中元素 $a_{ij}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式.

分析 将行列式的第 3 列元素分别用 1,1,1,3 代替后计算该行列式的值，即为 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+3A_{43}$ 的值，同理，将行列式的第 2 行元素分别用 1,2,2,3 代替后计算该行列式的值，即为 $A_{21}+2A_{22}+2A_{23}+3A_{24}$ 的值.

解答 (1) 由行列式按行(列)展开定理，有

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+3A_{43}=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&1&4\\1&2&1&3\\2&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&0&3\\1&1&0&4\\1&2&0&3\\2&2&1&4\end{vmatrix}=$$

$$1\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&-5&3\\1&1&4\\1&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-5&3\\0&6&1\\0&7&0\end{vmatrix}=7$$

（2）所求表达式恰好为 D 的第 3 行元素与第 2 行对应元素的代数余子式乘积之和. 因此有

$$A_{21}+2A_{22}+2A_{23}+3A_{24}=0$$

评注 掌握好余子式与代数余子式定义，灵活运用行列式按行按列展开定理，从而简化运算.

例 1.14 解方程 $\begin{vmatrix}2&2&-1&3\\4&x^2-5&-2&6\\-3&2&-1&x^2+1\\3&-2&1&-2\end{vmatrix}=0.$

分析 方程的左端是一个四阶行列式，先利用行列式的性质将其化为关于 x 的多项式，再求解方程.

解答

$$\begin{vmatrix}2&2&-1&3\\4&x^2-5&-2&6\\-3&2&-1&x^2+1\\3&-2&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-2r_1]{r_3+r_4}\begin{vmatrix}2&2&-1&3\\0&x^2-9&0&0\\0&0&0&x^2-1\\3&-2&1&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}(x^2-9)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&0&x^2-1\\3&1&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}(x^2-9)(-1)^{2+3}(x^2-1)\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}$$

$$=-5(x^2-9)(x^2-1),$$

所以原方程为

$$5(x^2-9)(x^2-1)=0$$

求解得 $x=\pm1$ 或 $x=\pm3$.

评注 方程中含有行列式，一般先计算行列式，再求解方程.

例 1.15 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&4&\cdots&n\\x&1&2&3&\cdots&n-1\\x&x&1&2&\cdots&n-2\\x&x&x&1&\cdots&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x&x&x&x&\cdots&1\end{vmatrix}$.

分析 该行列式主对角线以下各元素相同，利用行列式性质可将其化为零元素较多，再按