普通高等教育基础课规划教材

线性代数

第2版





王尚平 李艳丽 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

线 性 代 数

第 2 版

主编　王尚平　李艳丽
参编　秦新强　赵凤群

机械工业出版社

本书是根据高等学校理工科工程数学课程基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，在原有的《线性代数》教材的基础上，在听取广大教师使用意见的基础上，完善和改进编写而成的。

全书分7章，内容为行列式、矩阵、n维向量和向量的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、n维向量空间。每章附有习题和参考答案。

本书的附录是MATLAB线性代数范例教程。该附录详细地介绍了利用MATLAB软件，实现教材中所有的线性代数数学实验的方法，具有很强的实践性，是本书的特色之一。

本书可作为高等理工院校线性代数课程的教材或参考书，也可供其他相关专业人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/王尚平，李艳丽主编．—2版．—北京：机械工业出版社，2006.10

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-08519-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①王…②李… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第111650号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：郑　玫　版式设计：霍永明　责任校对：张晓蓉
责任印制：杨　曦
北京富生印刷厂印刷
2007年1月第2版第1次印刷
169mm×239mm·7.625印张·296千字
定价：20.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
编辑热线电话（010）88379711
封面无防伪标均为盗版

第 2 版前言

线性代数是关于线性关系经典理论的课程，是高等学校工科专业的一门重要的基础理论课，是工科专业本科生的校级必修课，是硕士研究生入学数学考试的内容之一，是一个大面积的公共基础课。因此，线性代数课程在工科专业教学中具有重要的地位。

本次修订教材的一个大背景是线性代数精品课程的建设，作者希望通过这次修订能为线性代数精品课程的建设作出应有的贡献。

线性代数属于代数的范畴，但是代数的发展和研究始终是和几何密不可分的。通过线性代数的学习可以开阔学生几何空间的概念，超越 3 维空间，研究一般的抽象的 n 维空间，这对提高学生的空间思维能力，提高学生的创造能力具有重要的意义。因此，本书在修订中更强调了代数和几何的联系。

本书在编写中，听取了广大教师对原教材的意见，对有些定理的证明作了弱化处理，对某些例题进行了删减，同时也增加了一些典型的例题，对某些内容的次序作了适当的调整，力图使学生能较容易地掌握该课程的基本理论与方法，培养学生的数学素养，为学习后继课程奠定必要的数学基础。在此要对提出建议的教师和学生表示感谢。

这次修订的一个重要举措是增加编写了附录——MATLAB 线性代数范例教程。该附录详细地介绍了利用 MATLAB 软件，实现教材中所有的线性代数运算的数学实验方法，具有很强的实践性和可操作性，是培养学生动手能力和应用线性代数知识解决实际问题的一个很好的实验教程。这是我们的一个尝试，也是本书的特色之一。

这次修订重在改进和完善原有教材，但是其中可能还有不妥之处，希望广大教师和学生能多提宝贵意见，我们将充分听取合理的建议，不断改进教材的质量。

编　者

前言

本书是根据全国工科数学课程指导委员会制订的线性代数课程的基本要求及近年来工科硕士生入学考试线性代数部分的试题要求编写而成的。可作为普通高等院校工科各专业教材。

线性代数是一门基础数学课程，它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性。它的核心是研究向量组的线性相关关系。它的重点内容是矩阵理论、线性方程组解的理论及求解方法、矩阵的对角化、二次型的标准化及 n 维向量空间中基、坐标等概念。

人类对线性关系的研究已取得了丰硕的成果，而对非线性关系的研究尚在进一步探索之中。本书对线性关系中最经典的内容做了介绍。学习这些内容对掌握现代科学技术是必不可少的。

本书在编写过程中力求叙述清晰，说理详尽，通俗易懂，深入浅出，对重点、难点概念及内容列举了大量有代表性的例题，以实例解释这些概念及内容，目的是使读者易于理解和掌握这些概念及难点。特别是很多例题是近几年考研的题型，这对提高读者考研数学的通过率将大有益处。

本书中带“*”号的内容具有一定难度，教师可根据教学学时数及学生实际学习能力进行取舍，读者可根据学习能力来选择。

习题是本书不可忽略的重要组成部分。我国著名数学家华罗庚教授在推荐维诺格拉陀夫的《数论基础》一书时曾说，如果读该书而不看不做该书后面的习题，无异于“入宝山而空返”。由此可见习题在教材中，尤其是基础教材中的重要性。本书选编的习题，期望通过读者的独立完成，达到巩固和掌握书中基本概念、内容的目的，同时能对读者进行初步的科研训练。因此，建议读者按时完成教师指定的习题，并予以足够的重视。

本书在编写过程中，得到了西安理工大学各级领导及同事们的大力支持，特别得到了学校教材委员会的大力支持。张学中、闵涛、张德生、秦新强、马新民、唐平、王逸迅、张学冲、王秋萍、侯玲、张瑞平等同志对本书的编写提出了不少宝贵意见。赵凤群仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵的建议，她的建议使本书增色不少。编者指导的研究生王晓峰、何成、邹又姣、秦波等同学承担了本书的校对工作。编者在此一并表示对他们的深切谢意。

编者希望本书在使用过程中不断得到改进与提高，真诚欢迎同行专家和广大读者多提宝贵意见，编者 E－mail 地址为：Spwang@mail.xaut.edu.cn。

编　者

目　　录

第1章 行 列 式

本章通过求解二元和三元一次方程组，引入二阶和三阶行列式的定义，进而给出了一般 n 阶行列式的定义，讨论了行列式的基本性质，行列式的展开和行列式的计算．最后给出了利用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆（Cramer）法则．

1.1 行列式的定义

在给出行列式的定义之前，先简单介绍一些有关排列的基本知识．

1.1.1 排列及其逆序数

定义 1 由 n 个自然数 1，2，$\cdots n$ 组成的一个有序数组（j_1，$j_2\cdots$，j_n）称为一个 n 级排列．

例如，（1，2，3，4）是一个 4 级排列，（4，2，1，3）也是一个 4 级排列．（2，6，4，3，5，1）是一个 6 级排列．

显然，n 级排列的总数为 $n!$ 个．

由 1，2，3 这三个数可以排出 3!（$=6$）个 3 级排列，它们是：

（1，2，3），（1，3，2），（2，1，3），（2，3，1），（3，1，2），（3，2，1）．在所有的 n 级排列中，排列（1，2，3，…，n）是唯一按自然顺序排列的，称为自然排列．

定义 2 在一个 n 级排列中，如果有某个较大的数排在某个较小的数的前面，就称这两个数构成了该排列的一个逆序．

一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数．

n 级排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$的逆序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$．

逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列，自然排列规定为偶排列．

关于排列的一个逆序，确切地讲，是指在一个 n 级排列$(j_1,j_2,\cdots,j_i,\cdots,j_k,\cdots,j_n)$中，如果 $i<k$，而 $j_i>j_k$，则数对(j_i,j_k)构成了该排列的一个逆序，即前后位置与大小顺序相反，前面的数大于后面的数．

例如，$\tau(1,2,3)=0$，$\tau(2,3,1)=1+1=2$，$\tau(3,2,1)=2+1=3$，故（1，2，3），（2，3，1）是偶排列，（3，2，1）是奇排列．对于所有的 3 级排列有

全排列	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)	(1, 3, 2)	(2, 1, 3)	(3, 2, 1)
逆序数	0	2	2	1	1	3
奇偶性	偶			奇		

n 级排列$(j_1,j_2,\cdots,j_i,\cdots,j_n)$的逆序数的一般计算方法：

$$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_i,\cdots,j_n) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i,$$

其中，$t_i(i=1,2,\cdots,n-1)$为排在 j_i 之后，且比 j_i 小的数的个数.

例如，$\tau(3,1,4,2)=2+0+1=3$，故（3，1，2，4）是奇排列. $\tau(2,1,4,3)=1+0+1=2$，故（2，1，4，3）是偶排列.

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列.这样一个变换称为一次对换.

注意到如果把相邻的某两个数做一次对换，则奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列，一般的对换可以由奇数次个相邻对换得到，可以证明

定理　一次对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

例如，把排列（2，$\boxed{4}$，6，3，$\boxed{1}$，5）中的 4 与 1 对换，得到的新排列为（2，$\boxed{1}$，6，3，$\boxed{4}$，5），则

$$\tau(2,4,6,3,1,5)=1+2+3+1+0=7,$$
$$\tau(2,1,6,3,4,5)=1+0+3+0+0=4,$$

即奇排列（2，$\boxed{4}$，6，3，$\boxed{1}$，5）经过一次对换变为偶排列（2，$\boxed{1}$，6，3，$\boxed{4}$，5）.

更进一步分析可以看到，排列（2，$\boxed{4}$，6，3，$\boxed{1}$，5）中的 4 与 1 对换是由以下 5 个相邻对换得到的：$(2,\boxed{6},\boxed{4},3,1,5)\to(2,6,\boxed{3},\boxed{4},1,5)\to(2,6,3,\boxed{1},\boxed{4},5)\to(2,6,\boxed{1},\boxed{3},4,5)\to(2,\boxed{1},\boxed{6},3,4,5)$，即得到 4 与 1 对换（2，$\boxed{1}$，6，3，$\boxed{4}$，5）.

推论　在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $n!/2$ 个.

这是因为将每一个奇排列位置 1 和位置 2 的元素对换都对应一个偶排列，且不同的奇排列对应不同的偶排列，因此，偶排列的个数不少于奇排列的个数；同理可证，奇排列的个数不少于偶排列的个数.因此，二者相等，又所有的 n 级排列的总数为 $n!$ 个，因此奇、偶排列各有 $n!/2$ 个.

1.1.2　二阶和三阶行列式的定义

由初等数学知道，二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

的解，实际上是平面上两条直线的交点．当两条直线互不平行（$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$，即 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$）时，利用消元法，此方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

观察式（1－2）的分子与分母，有规律可循．

为了便于记忆，我们称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式，用符号表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-3}$$

简单地说，就是主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积．

于是，线性方程组（1－1）的解可以用二阶行列式叙述为：

当二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，该方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1-4}$$

对于三元线性方程组有相仿的结论．

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

的解，实际上是三维空间中三个平面的交点．利用消元法，可以求得

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}. \end{aligned} \tag{1-6}$$

数学家们发现，利用三阶行列式可以很规则地表达该解．

三阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1-7}$$

三阶行列式按行划分共有 3 行，分别称为第 1 行、第 2 行和第 3 行．按列划分共有 3 列，分别称为第 1 列、第 2 列和第 3 列．其中，a_{ij}（i，$j=1$，2，3）称为三阶行列式的第 i 行第 j 列的元素，且称 i 为行指标，j 为列指标．

三阶行列式可以有一个简便的对角线计算的方法，如图 1－1 所示．

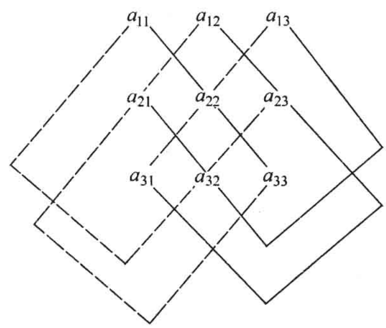

图 1－1　三阶行列式的对角线计算方法

图 1－1 中的三条实线上的三个元素的乘积项取正号，三条虚线上的三个元素的乘积项取负号．这种方法称为三阶行列式的对角线计算方法．

利用三阶行列式，对上述的三元线性方程组有结论：

当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1-8}$$

时，上述三元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1-9}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1-10}$$

例 1　求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \\ -2x_1 + x_2 = -7 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 21 \end{cases}.$$

解 $D=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-2&1&0\\3&-2&1\end{vmatrix}=1+4-3-4=-2\neq0,$

$$D_1=\begin{vmatrix}12&-2&1\\-7&1&0\\21&-2&1\end{vmatrix}=12+14-14-21=-9,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&12&1\\-2&-7&0\\3&21&1\end{vmatrix}=-7-42+24+21=-4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&12\\-2&1&-7\\3&-2&21\end{vmatrix}=21+42+48-14-84-36=-23.$$

三元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{9}{2},\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{23}{2}.$$

1.1.3 *n* 阶行列式的定义

前面我们引进了二阶和三阶行列式的定义，得到了求解二元及三元线性方程组的解法．该方法使得方程组的解法公式化、程序化．那么，对于一般的 n 元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_2=b_2\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1-11}$$

能否引入类似的 n 阶行列式的概念，从而得到一般的 n 元一次线性方程组的行列式解法呢？

利用前面介绍的排列及逆序数的概念这是可能的．

不妨再仔细地分析一下二阶和三阶行列式的定义．

二阶和三阶行列式的定义中，有些项取的是正号，有些项取的是负号，利用逆序数的概念，数学家们发现了其中定义的规律．

对于二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=(-1)^{\tau(1,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\tau(2,1)}a_{12}a_{21},\tag{1-12}$$

其展开式共有 2! =2 项，每一项恰好是两个元素的乘积，这两个元素分别位于不同的行和列，每一项的正负号由其列下标的逆序数的奇偶性决定（当每一项的

行下标按自然顺序排列时).

对于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= (-1)^{\tau(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(2,3,1)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(3,1,2)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\tau(1,3,2)}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(2,1,3)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(3,2,1)}a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,j_3)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1-13}$$

其中，(j_1,j_2,j_3)表示一个 3 级排列，$\sum\limits_{(j_1,j_2,j_3)}$表示对所有的 3 级排列求和，$\tau(j_1,j_2,j_3)$表示排列$(j_1,j_2,j_3)$的逆序数，所以$(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)} = \begin{cases} 1 & 当(j_1,j_2,j_3)为偶排列 \\ -1 & 当(j_1,j_2,j_3)为奇排列 \end{cases}$.

可见，三阶行列式展开式中，共有 3!= 6 项，每一项恰好是三个元素的乘积，这三个元素分别位于不同的行和列，每一项的正负号由其列下标的逆序数的奇偶性决定（当每一项的行下标按自然顺序排列时)，有一半取正号，一半取负号.

由上述的分析，可以把行列式的概念推广到一般的情形：

定义 3 （n 阶行列式定义） 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成的 n 行 n 列的表达式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-14}$$

称为 n 阶行列式（Determinant)，它的值等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-15}$$

的代数和，这里$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是一个 n 级排列，每一项（1 - 15）都按下面规则带有符号：当$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是偶排列时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$带有正号；当$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是奇排列时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$带有负号.

这一定义用公式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \quad (1-16)$$

这里$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$表示一个 n 级排列，$\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对所有 n 级排列求和，$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$表示排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$的逆序数,所以

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} = \begin{cases} 1 & \text{当}(j_1,j_2,\cdots,j_n)\text{为偶排列} \\ -1 & \text{当}(j_1,j_2,\cdots,j_n)\text{为奇排列} \end{cases}.$$

定义表明:

(1) 为了计算 n 级行列式，首先作所有可能由位于不同行不同列元素构成的乘积. 把构成这些乘积的元素按行指标排成自然顺序，然后由列指标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号.

(2) n 级行列式是由 $n!$ 项组成的，其中所有的代数符号 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 中，由定理的推论知，有一半（$n!/2$）取正号，有一半（$n!/2$）取负号.

(3) $n=1$ 时，一阶行列式 $D=|a_{11}|=a_{11}$.

(4) 当 $n=2$ 或者 3 时，n 级行列式的定义式（1-16）与前面的定义式（1-12）和（1-13）是完全一致的.

行列式从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线. 行列式从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线，或称为副对角线.

当 $n=2$ 或者 3 时，行列式的计算有对角线计算方法，当 $n\geqslant 4$ 的时候，一般没有对角线计算法则. 但是，对于一些特殊的行列式有简便的方法.

例 2 下列各项中，哪些是 5 阶行列式展开式中的项

(1) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{22}a_{15}$;

(2) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$.

解 (1) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{22}a_{15}$不是 5 阶行列式展开式中的项，因为 a_{42}，a_{22}均取自第二列.

(2) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$是 5 阶行列式展开式中的项，因为该项的 5 个元素来自 5 个不同的行和列，按行指标将其排列后

$$-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43} = (-1)^{\tau(5,1,4,3,2)} a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}.$$

例 3 计算 4 阶上三角形行列式（主对角线下方元素全为零的行列式）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 按定义 $D=\sum\limits_{(j_1,j_2,j_3,j_4)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，该定义式中共有$4!=24$项. 但是，注意到 $a_{41}=a_{42}=a_{43}=0$，在每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中，只需取 $j_4=4$，其余都等于0. 同理，第3行中，除了 a_{33}，a_{34}外，全为0. 现在已经取过 $j_4=4$，只需取 $j_3=3$. 同理，只需取 $j_2=2$，$j_1=1$. 于是这个行列式的24项中不为0的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. 因此 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

同理可以证明

(1) 上三角形行列式（主对角线下方元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 下三角形行列式（主对角线上方元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 对角形行列式（主对角线以外元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似的可以得到：

(4) 次对角线以下元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,2,1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

可以看到，对于这些特殊的行列式，其计算是比较简单的. 但是，要通过定义来计算一般的 n 阶行列式，不是一件容易的事. 为了计算一般的 n 阶行列式，我们需要研究 n 阶行列式.

1.2 行列式的性质

本节研究行列式的性质，然后利用行列式的性质，化一般的 n 阶行列式为上述一些容易计算其值的特殊行列式，进而求得一般的 n 阶行列式的值.

在行列式的定义式（1-16）中，为了决定每一项的正负号，把每个元素按行指标的自然顺序排起来. 由于数的乘法是可以交换的，因而这些元素的次序是可以任意写的，一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1-17}$$

其中（i_1，i_2，…，i_n），（j_1，j_2，…，j_n）是两个 n 级排列. 利用排列的性质，可以证明，式（1-17）的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}. \tag{1-18}$$

按式（1-18）来决定行列式中每一项的符号的好处在于，行指标与列指标的地位是对称的，因而为了决定每一项的符号，同样可以把每一项的列指标按自然顺序排列起来，于是定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1-19}$$

由此即得行列式的下列性质：

性质 1 行列互换，行列式不变. 即设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1-20}$$

则
$$D = D^{\mathrm{T}}.$$

D^{T} 称为是 D 的转置行列式.

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的，所以凡是有关行的性质，对列也同样成立.

行列式还有很多其他性质：

性质 2 行列式两行（列）互换，行列式改变符号.

推论 若行列式有两行（列）相同，则此行列式的值等于零.

性质 3 行列式的某一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式号外面.即，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1-21}$$

性质 4 若行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则此行列式为零.

性质 4 可由性质 3 和性质 2 的推论得到.

性质 5 若行列式中某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij_1}+b_{ij_1} & a_{ij_2}+b_{ij_2} & \cdots & a_{ij_n}+b_{ij_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij_1} & a_{ij_2} & \cdots & a_{ij_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{ij_1} & b_{ij_2} & \cdots & b_{ij_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-22}$$

性质 6 把行列式某一行（列）的元素的倍数加到另一行（列）对应的元素上，则该行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i+kr_j}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-23}$$

性质 6 可以由性质 5 和性质 4 得到.

以上这些性质可以通过行列式的定义和排列的性质得到.限于篇幅，我们仅给出性质 5 的证明.

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右端}. \end{aligned}$$