普通高等院校“十二五”规划教材

数学模型

单锋 朱丽梅 田贺民 ◎ 编著

Mathematical Model

国防工业出版社
National Defense Industry Press

数学模型

单锋　朱丽梅　田贺民　编著

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

今天的数学兼有科学和技术两种品质,数学科学是授人以能力的技术。数学建模是应用数学科学的重要途径,开展数学建模教学和竞赛活动,有利于培养学生掌握和运用数学科学的能力。本书是编者在积累了多年数学建模教学和指导学生参加数学建模竞赛实践经验的基础之上编写而成的。

本书内容涉及到数学、物理学、生物学、医学、交通、经济管理和工程技术等许多领域,重点介绍建立数学模型的思想与方法,还介绍了常用数学软件(MATLAB,LINDO,LINGO)的使用方法,并配有相应的习题和习题答案。

本书可作为高等院校数学建模、数学模型课程的教材和数学建模竞赛辅导教材,也可供高校师生和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型/单锋,朱丽梅,田贺民编著.—北京:国防工业出版社,2012.2
ISBN 978-7-118-07928-9

Ⅰ.①数... Ⅱ.①单... ②朱... ③田... Ⅲ.①数学模型 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 015036 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 17¼ **字数** 426 千字
2012 年 2 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 38.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

在知识经济时代，数学科学的地位发生了巨大的变化。特别是计算机的飞速发展，促使数学的应用向一切领域渗透，从而使数学在高科技领域中的重要地位和作用日益突出。数学已成为当代高科技的一个重要组成部分和思想库，也是高科技赖以发展的重要支柱。这一方面促使数学本身得到了空前的发展，另一方面也促使数学与其他学科相结合，产生不少新的交叉学科，推动了科技的发展。基于此，我们认为定量分析和数学建模等数学素质是面向知识经济时代人才素质的一个重要方面，是培养创新能力的一个重要方法和途径。实践表明，开展数学建模教学和竞赛活动将会对学生的数学素质的形成起着重要的作用。

本书共分 15 章。第 1 章数学建模概论，主要介绍数学模型的一些基本概念和基本方法，通过椅子问题、人体的体重问题和人口问题介绍建模的步骤和原则。第 2 章初等模型，介绍几个初等模型和用量纲分析法建模。第 3 章微分方程模型，通过传染病传播的数学模型、减肥的数学模型和追赶走私船等模型介绍了建立微分方程模型的基本方法。第 4 章种群生态学模型，介绍微分方程稳定性理论、捕鱼模型和生物种群模型。第 5 章线性规划模型，介绍线性规划模型的基本理论、求解方法和应用。第 6 章非线性规划模型，介绍非线性规划模型的基本理论、求解方法和应用。第 7 章层次分析模型，介绍用层次分析理论建模方法及其应用。第 8 章随机模型，介绍几个用随机方法建立模型的实例。第 9 章动态规划模型，介绍动态规划的基本方法和应用举例。第 10 章图论模型，介绍图论的基本概念和基本理论，以及用图论建模的方法。第 11 章最短路模型，介绍求最短路的标号法及应用。第 12 章网络流模型，介绍求最大网络流的增量算法及其应用。第 13 章数学建模竞赛案例选讲，介绍全国数学建模竞赛三个案例。第 14 章 MATLAB 软件使用简介，介绍了 MATLAB 软件的使用方法、MATLAB 优化工具箱及 MATLAB 在概率统计和计算方法中的应用。第 15 章 LINDO 软件和 LINGO 软件使用简介。本书内容涉及到数学、物理学、生物学、医学、交通、经济管理和工程技术等许多领域，重点介绍建立数学模型的思想与方法。

本书是编者在十几年辅导大学生参加数学建模竞赛的经验积累以及给本科生讲授数学模型课和数学建模课的讲义的基础上充实而成的。编写时编者参考了国内近 20 部数学模型教材和参考书，收集了较为丰富的资料，编者力求编写一部适应一般工科院校学生的教材。单锋编写第 1、2、3、12、14 章，朱丽梅编写第 8、9、10、11、13 章，田贺民编写第 4、5、6、7、15 章并提供习题参考答案。

限于水平，书中难免会有缺点和错误，敬请同行专家和广大读者批评指正。

编　者

2012 年 1 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　数学建模概论

1.1 引　言

随着科技的迅猛发展，要求人们在解决各类实际问题时更加精确化和定量化，特别是计算机的飞速发展，引起了社会的深刻变化，各行各业普遍使用计算机，这促使数学的应用向一切领域渗透，或者说各行各业日益依赖数学，这一方面促使数学本身得到了空前的发展，另一方面也产生不少新的学科，特别是与数学相结合，产生不少新的交叉学科，如数学生物学、数学地质学、数学心理学等。许多学科为了进一步进行学术交流和发展，都创办了相应的学术期刊或杂志。

现在，人们对数学十分重视，对数学及其作用有了新的认识，认为数学像社会科学和自然科学一样，是一门科学，是“关于模式和秩序的科学”。数学是一门技术，称为数学技术。在当今时代，“国家的繁荣富强，关键在于高新的科学技术和高效的经济管理”。这是当代有识之士的一个共同见解，也已为发达国家的历史所证实。大量的事实表明，高科技是保持国家竞争力的关键因素。高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学。高新技术的出现使得数学与工程技术之间在更广阔的范围内和更深刻的程度上直接相互作用，把社会推进到数学工程技术的新时代。当代社会和经济发展的一个特点就是定量化和定量化思维的不断加强。直观思维、逻辑思维、精确计算及其结论的明确无误，将成为精明的科技人员和经济工作者所应具备的工作素质。因此可以预言：数学以及数学的应用在科学技术、经济建设、商业贸易和日常生活中的作用将越来越大，数学科学作为技术改进、经济发展以及工业竞争中的推动力的重要性也将日益显现出来。

众所周知，数学最引人注意的特点是其思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性。数学的抽象性和严谨性的特点也成为科学思维和组织构造知识的一个有效手段。而数学的广泛应用性为各门科学以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层次发展奠定了基础。但是，在过去的年代，由于种种原因，这个特点反映得并不充分，人们往往把数学理解为训练科学思维的工具，而在数学的教学和学习中，讲的、练的、考的主要是定义、定理和公式计算，致使人们虽然学会了大量的数学知识和方法，但是不会用或用不上。而在数学科学与其他科学技术和经济建设紧密结合变得更加需要和可能的今天，数学的应用特征就显得更加突出和重要。

在应用数学知识和计算机去解决各门学科和社会生产中的实际问题时，首先要通过对实际问题的分析，研究并建立用以描述这个问题的数学模型，使用数学的理论和方法或编程计算，对问题进行分析并得到结果，再返回去解决现实的实际问题。可见数学模型、数学建模是应用数学理论和计算机解决实际问题的重要手段和桥梁。大量的事实表明，掌握了数学知识只是应用数学解决实际问题的必要条件，使用数学解决实际问题的技能的培养也是非常重要和必需的，这就要求我们加强数学建模能力的培养。

1.2 什么是数学建模

1.2.1 引例

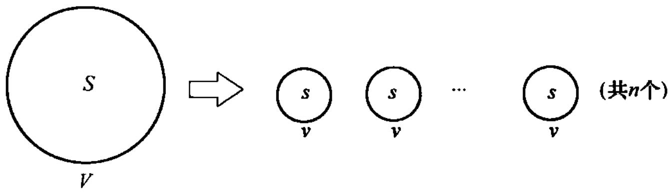
什么是数学建模？下面从生活中的一个实际问题——包汤圆(饺子)说起。

通常,1kg 面, 1kg 馅,包 100 个汤圆(饺子)。今天,1kg 面不变,馅比 1kg 多了,问应多包几个(小一些),还是少包几个(大一些)?

这个问题表面上看似乎与数学毫无关系,但只要进行简单抽象,就可转化为数学问题。

1. 模型准备

设圆面积为 S 的一个皮,包成体积为 V 的汤圆。若将原来的一个皮分成 n 个皮,每个新皮的圆面积为 s,所包成体积为 v。原问题就变成研究 V 和 nv 哪个大？大多少？



2. 模型假设

作如下假设:

(1) 皮的厚度一样。

(2) 汤圆(饺子) 的形状一样 。

3. 模型的建立与求解

设大圆的半径为 R,设小圆的半径为 r。由于面皮的面积与面皮的半径的平方成正比(设比例系数为 k_1),因此有

$$S = k_1R^2,\ S = k_1r^2$$

由于汤圆(饺子)的体积与面皮的半径的立方成正比(设比例系数为 k_2),因此有

$$V = k_2R^3, v = k_2r^3$$

于是

$$V = kS^{\frac{3}{2}}, v = ks^{\frac{3}{2}}\left(k = \frac{k_2}{k_1^{\frac{3}{2}}}\right)$$

由于 $S=ns$,所以

$$V = n^{\frac{3}{2}}v$$

4. 模型应用

$V=\sqrt{n}(nv)$,V 是 nv 的$\sqrt{n}$倍。因此,可少包几个(大一些),就可以包比 1kg 多的馅。例如,若 100 个汤圆(饺子)包 1kg 的馅,则 50 个汤圆(饺子)包 1.4kg 的馅。

这个问题的解决过程里包含了数学建模的基本内容和过程。

1.2.2 数学建模定义

数学模型:为了定量地解决一个实际问题,从中抽象、归结出来的数学结构称为数学模型。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

详细地说，数学模型可以描述为[1]：对于现实世界的一个研究对象，为了一个特定的目的，根据对象的内在规律，作出必要的简化假设，运用适当数学工具，得到的一个数学结构。

数学建模：建立数学模型的全过程（包括模型的叙述、建立、求解、分析和检验）称为数学建模。本书主要研究建立数学模型的方法以及建模能力的培养。

1.2.3 开展数学建模的目的

(1) 培养"双向翻译"能力。一方面，通过一定的抽象、简化，把实际问题用数学语言表达出来，形成数学模型（即数学建模过程）；另一方面，对于应用数学方法进行推演出来的结果，能用"常人"能懂的语言"翻译"出来，如图 1.1 所示。

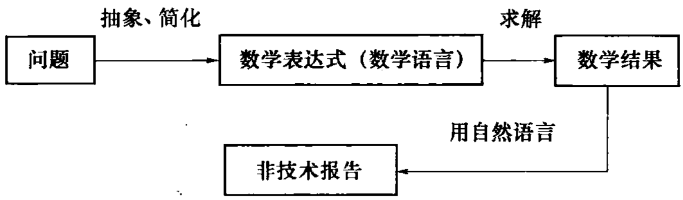


图 1.1　翻译过程

(2) 培养学生的想象力。培养学生抽象、分析问题的能力，包括抓住主要矛盾、选择变量、进行归纳、联想、类比等创新能力。

(3) 培养学生运用工具知识的能力。包括自然科学、工程技术、计算机，尤其是数学知识等能力。

(4) 培养学生观察力和判断力。数学建模能培养学生观察问题、分析问题、判断问题、概括问题的能力。

(5) 培养学生用数学的能力，探索数学教学改革的途径。数学教育应该培养学生两种能力："算数学"（计算、证明等）和"用数学"（实际问题建模及模型结果的分析、检验、应用）。传统数学教学体系和内容偏重前者，忽略后者；数学建模引入教学是不打乱现有体系下的教改实验，从教学模式上进行改革，探索培养学生用数学的创新能力的途径。

1.3 数学建模的基本方法和步骤

1.3.1 数学建模的基本方法

数学建模的方法大体上可分为机理分析和测试分析两种。机理分析是根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律，建立的数学模型常有明确的物理或现实意义。测试分析将研究对象看做一个"黑箱"（意思是内部机理看不清楚），通过对测量数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型。

面对一个实际问题，用哪一种方法建模，主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模目的。如果掌握了一些内部机理的知识，模型也要求具有反映内部特征的物理意义，建模就应以机理分析为主。而如果对象的内部机理规律基本上不清楚，模型也不需要反映内部特征，那么

可以用测试分析。对于许多实际问题也常常将两种方法结合起来,用机理分析建立模型结构,用测试分析确定模型的参数。

1.3.2 数学建模的一般步骤

建模要经过哪些步骤并没有一定的模式,通常与问题性质和建模的目的有关。下面给出建模的一般步骤,如图 1.2 所示。

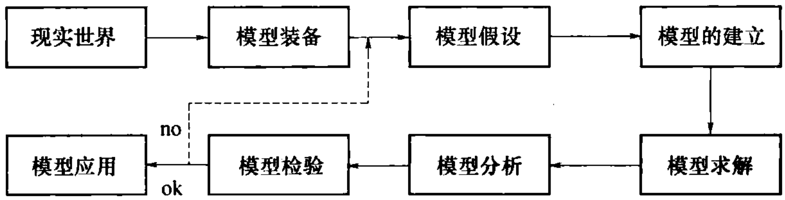


图 1.2 数学建模步骤示意图

(1) 模型准备。了解实际背景,明确建模目的,搜索必要信息,弄清对象的主要特征,形成一个比较清晰的“问题”(即问题的提出)。情况明才能方法对,在这个阶段要深入调查研究,虚心向实际工作者请教,尽量掌握第一手资料。

(2) 模型假设。根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,作出必要、合理的简化假设。对于建模的成败,这是非常重要和困难的一步。假设不合理或太简单,会导致错误或无用的模型;假设作得过分详细,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,将很难或无法继续下一步的工作。常常需要在合理与简化之间作出恰当的折中,要不断积累经验,并注意培养和充分发挥对事物的洞察力和判断力。

(3) 模型的建立。根据假设,用数学的语言、符号描述对象的内在规律,得到一个数学结构。这里除了需要一些相关的专门知识外,还常常需要较为广阔的应用数学方面的知识,要善于发挥想象力,注意使用类比法,分析对象与熟悉的其他对象的共性,借用已有的数学模型。建模时还应遵循的一个原则是尽量采用简单数学工具,因为建立出来的模型总希望更多的人了解和使用,而不是只供少数专家欣赏。

(4) 模型求解。使用各种数学方法、数学软件和计算机技术对模型求解。

(5) 模型分析。对求解结果进行数学上的分析,如对结果进行误差分析,分析模型对数据的稳定性或灵敏性等。

(6) 模型检验。把求解和分析结果翻译回到实际问题,与实际现象、数据进行比较,检验模型的合理性与适用性。如果结果与实际不符,问题常常出现在模型假设上,应该修改或补充假设,重新建模。这一步对于模型是否真的有用是非常关键的,要以严肃、认真的态度对待。

(7) 模型应用。这与问题的性质、建模的目的以及最终结果有关,一般不属于本书讨论的范围。

应该指出,并不是所有问题的建模都要经过这些步骤,有时各步骤之间的界限也不那么分明,建模时不要拘泥于形式。

1.3.3 数学建模的全过程

数学建模的全过程可分为表述、求解、解释、验证几个阶段,并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型,再从数学模型回到现实对象的循环,如图 1.3 所示。

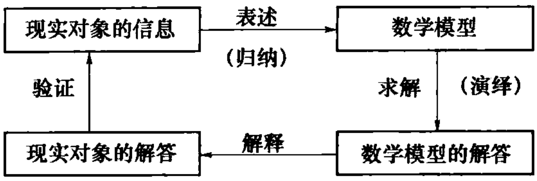


图 1.3　数学建模的全过程

表述是根据建模目的和信息将实际问题"翻译"成数学问题,即将现实问题"翻译"成抽象的数学问题,属于归纳法。数学模型的求解是选择适当的数学方法求得数学模型的解答,则属于演绎法。解释是将数学语言表述的数学模型的解答"翻译"回实际对象,给出分析、预报、决策或者控制的结果。最后,作为这个过程的最重要一环——检验,是用现实对象的信息检验得到的解答。

图 1.3 也揭示了现实对象与数学模型的关系。一方面,数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物,它来源于现实,又高于现实;另一方面,只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时,才可以用来指导实际,完成实践——理论——实践这一循环。

1.4　数学建模问题举例

本节将给出三个数学建模的例子,重点说明如何作出合理、简化的假设,用数学语言确切地表述实际问题,以及建模的结果怎样用于解释实际现象。

1.4.1　椅子问题[1]

1. 问题的提出

把椅子放在不平的地面上,通常只有三只脚着地,放不稳。椅子在不平的地面上能放稳吗?生活经验告诉我们:只要稍挪动几次,就可以使四只脚同时着地,放稳了。这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言给出表述,并用数学工具来证实吗?

2. 模型假设

对椅子和地面应该作一些必要的假设:

(1) 椅子的四条腿一样长,椅子与地面接触处可视为一个点,四脚连线呈正方形。

(2) 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面。

(3) 对于椅子脚的间距和椅子腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

假设(1)显然是合理的。假设(2)相当于给出椅子能放稳的条件,因为如果地面高度不连续,例如,在有台阶的地方,可能无法使四只脚同时着地。假设(3)要排除这样的情况:地面上与椅子脚间距和椅子腿长度的尺寸大小相当的范围内,出现深沟或凸峰(即使是连续变化的),致使三只脚无法同时着地。

3. 模型的建立

问题的关键是运用数学语言把椅子四脚同时着地的条件和结论表示出来。首先要用变量表示椅子的位置。注意到椅子脚连线呈正方形,以中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代

表了椅子位置的改变,于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图1.4中,椅子脚连线为正方形$ABCD$,对角线AC与x轴重合,椅子绕中心旋转角度θ后正方形$ABCD$转至$A'B'C'D'$的位置,所以对角线AC与x轴的夹角θ表示椅子的位置。

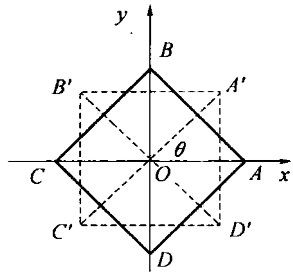


图1.4 变量θ表示椅子的位置

其次把椅子脚着地用数学符号表示出来。如果定义椅子脚与地面之间的距离为椅子脚到地面的竖直长度,则"着地"就是椅子脚与地面距离等于零。由于椅子位置不同,椅子脚与地面的距离也不同,因而这个距离为θ的函数。

虽然椅子有四只脚,因而有四个距离,但由于正方形的中心对称性,只要设两个距离函数就行了。记A、C两脚与地面距离之和为$f(\theta)$,B、D两脚与地面距离之和为$g(\theta)$($f(\theta),g(\theta)\geqslant 0$)。

$f(\theta),g(\theta)$所满足的条件(具有的性质):

由假设(2),$f(\theta),g(\theta)$都是连续的。由假设(3),椅子在任何位置至少有三只脚着地,所以对任何θ,$f(\theta)$和$g(\theta)$总有一个为零,所以$f(\theta)g(\theta)=0$。另外,由于$ABCD$呈正方形,因此将椅子绕中心旋转$\frac{\pi}{2}$,对角线AC与BD互换,有$f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=g(\theta),g\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=f(\theta)$。当$\theta=0$时,不妨设$g(0)=0,f(0)>0$。这样,改变椅子的位置使四脚同时着地,就归结为如下的数学命题:

已知$f(\theta)$和$g(\theta)$是θ的连续函数,$g(0)=0,f(0)>0$,且对任意θ,有

$$f(\theta)g(\theta)=0,f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=g(\theta),g\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=f(\theta)$$

则存在$\theta_0\left(0<\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$,使$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

4. 模型求解

令$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$,则$h(\theta)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续,且$h(0)=f(0)-g(0)=f(0)>0$,$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,由介值定理,必存在$\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$,使$h(\theta_0)=0$,即$f(\theta_0)=g(\theta_0)$,但$f(\theta_0)g(\theta_0)=0$,故$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$,即在$\theta_0$方向上椅子的四条腿能同时着地。

评注:椅子问题的解决是运用类比法的一个很好实例,读者从中可受到一定启发,学习到一些建模技巧:将转动椅子与坐标轴旋转联系起来;用一个变量θ表示椅子的位置;巧妙地把"距离"用θ的函数表示,而且只设两个函数$f(\theta)$和$g(\theta)$;由三点确定一个平面得$f(\theta)g(\theta)=0$;利用正方形的中心对称性及旋转$\frac{\pi}{2}$并不是本质。读者可以考虑四脚呈长方形的情况。

1.4.2 人体的体重问题

1. 问题的提出

在一般情况下,人们每天的进食量是相对固定的,所获得的热量一部分用于自身的新陈代谢,一部分用于劳动和体育锻炼,剩余的热量以脂肪的形式贮藏起来。问人体的体重是怎样随

时间变化的？人体的体重会达到平衡吗？如何减肥？

2. 模型假设

作如下假设：

(1) 假设某人每天的进食量是每天 2500cal。

(2) 每天用于基本的新陈代谢(即自动消耗)的热量是 1200cal。

(3) 在健身训练中,他每天所消耗的热量大约是 16cal/kg 乘以他的体重(kg)。

(4) 假设以脂肪形式贮藏的热量 100% 有效,而且 1kg 脂肪含热量 10000cal。

(5) 设体重是时间 t 的函数 $w(t)$,假定 $w(0)=w_0$。

3. 模型的建立

考虑在 $[t,t+\Delta t]$ 时间内能量的改变：

$$10000[w(t+\Delta t)-w(t)]=[2500-1200-16w]\Delta t$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{13}{100}-\frac{16}{10000}w$$

于是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\dfrac{16}{10000}w=\dfrac{13}{100}\\ w(0)=w_0\end{cases}$$

4. 模型求解

这是一个一阶线性微分方程初值问题,很容易求得该问题的解

$$w(t)=\frac{1300}{16}+\frac{16w_0-1300}{16}\mathrm{e}^{-\frac{16}{10000}t}$$

当 $t\to\infty$ 时,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}w(t)=\dfrac{1300}{16}$,记 $w^*=\dfrac{1300}{16}$。因此,人体的体重随着时间的变化能达到平衡状态,平衡状态的体重为 $w^*=\dfrac{1300}{16}$kg。

5. 结果分析

由于平衡状态的体重为 $w^*=\dfrac{1300}{16}=\dfrac{2500-1200}{16}$,因此,人体的体重与以下三方面因素有关：

(1) 每天的进食量。进食量越大,体重越大。

(2) 自身的基本的新陈代谢。基本的新陈代谢越旺盛,体重越小。

(3) 劳动和体育锻炼强度。强度越大,体重越小。

6. 减肥的方法

减肥的方法包括控制饮食、加强体育锻炼和增强新陈代谢。

1.4.3 人口问题[1]

人类社会进入 20 世纪以来,世界人口空前增长。表 1.1 是 1625 年—1999 年世界人口统计数据。

表 1.1　1625 年—1999 年世界人口统计

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

在20世纪的一段时间内,我国人口的增长速度飞快。表1.2是20世纪我国人口统计数据。

表 1.2　20 世纪我国人口统计

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	2000
人口(亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.95

人口问题是当今世界人们最关心的问题之一。一些发展中国家的出生率过高,越来越严重地威胁着人类的正常生活。有些发达国家的自然增长率趋于零,甚至变负,也使他们大伤脑筋。我国是世界第一人口大国,因此,建立人口模型,研究人类和自然的关系,研究人口的变化规律,将有利于人口的预测和控制人口过快增长,为我国人口政策提供科学依据。

下面介绍两个最简单、最典型的人口模型,并利用表1.3所给出的近两个世纪的美国人口统计数据(以百万为单位),对模型作检验,最后用它所预报的2010年美国的人口与实际人口相比较,感受模型准确度。

表 1.3　美国人口统计

年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
人口	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4
年	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
人口	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7
年	1950	1960	1970	1980	1990	2000		
人口	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4		

1. 指数增长模型—马尔萨斯(Malthus)模型

最简单的人口增长模型是由下面的常用公式给出的:记今年人口数为 x_0,k 年后的人口为 x_k,年增长率为 r,则

$$x_k = x_0(1+r)^k \tag{1-1}$$

显然,这个公式的基本条件是年增长率 r 保持不变。

二百多年前英国人口学家马尔萨斯(Malthus,1766—1834)根据英国百余年的人口统计资料,得出了人口增长率不变的假设,并据此于1798年提出了著名的人口指数增长模型,这个模型的基本假设是:人口的增长率是常数,或者说,单位时间内人口的增长量与当时人口成正比,比例系数为 r 。

1) 模型建立

以 $x(t)$ 表示 t 时刻的人口数,当考察一个国家或一个较大地区的人口时,$x(t)$ 是一个很大的整数。为了以微积分作为工具,假设 $x(t)$ 是连续、可微分函数。记初始时刻($t=0$)的人口数为 x_0,人口增长率为 r,单位时间内 $x(t)$ 的增量等于 r 乘以 $x(t)$。考虑在 $[t,t+\Delta t]$ 时间人口的增量,则有

$$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com