FUBIANHANSHU QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

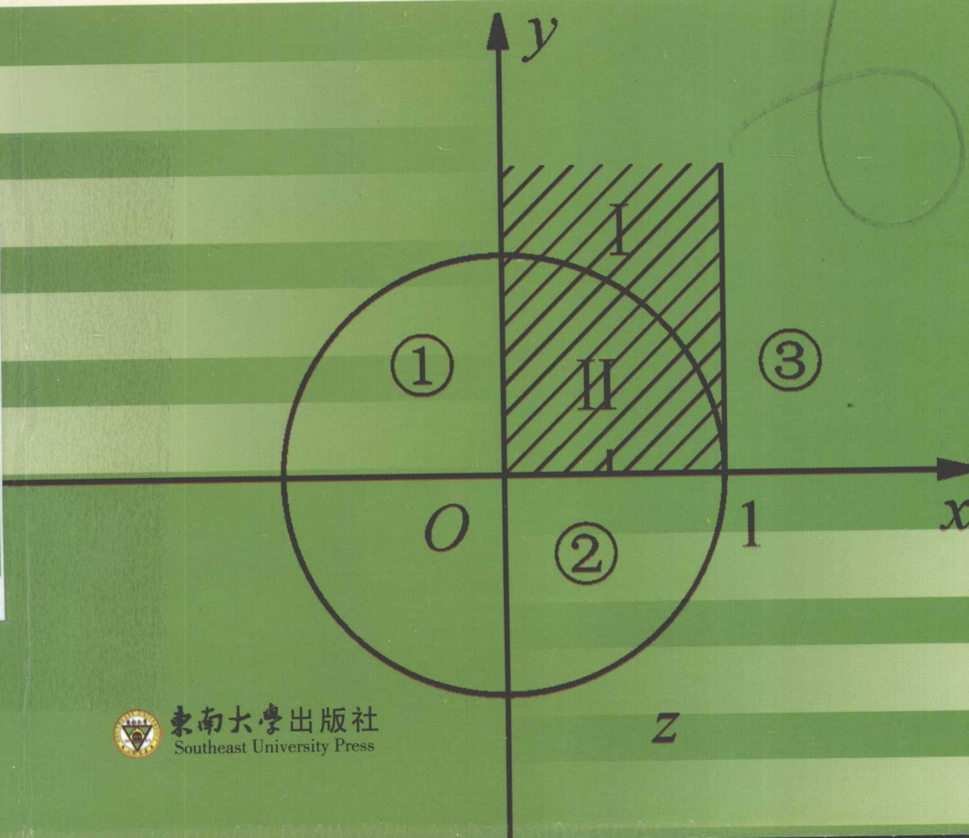
智文天下 ZHIWENTIANXIA

复变函数

全程学习指导与习题精解

（西安交大第四版）

主编 ◎ 寇冰煜　毛　磊



东南大学出版社
Southeast University Press

[redacted]数

全程学习指导与习题精解

（西安交大第四版）

主　编　寇冰煜　毛　磊

编　著　寇冰煜　毛　磊　滕兴虎

　　　　张　瑰　张　燕　陆小庆

东南大学出版社

·南京·

图书在版编目(CIP)数据

复变函数全程学习指导与习题精解:寇冰煜,毛磊主编.—南京:东南大学出版社,2011.9
ISBN 978-7-5641-3015-2

Ⅰ.①复… Ⅱ.①寇… ②毛… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 192564 号

复变函数全程学习指导与习题精解(西安交大第四版)

主　　编	寇冰煜　毛　磊	责任编辑	刘　坚　戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	杨传兵		
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32	印　　张	7.5　字　数　200 千字
版　　次	2012 年 1 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-3015-2		
定　　价	18.00 元		

前 言

《复变函数》是物理、数学及通信等各专业必修的一门重要的基础课。为了帮助广大学生扎实地掌握复变函数的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据西安交通大学高等数学教研室主编的《复变函数》(第四版)以及西安交通大学王绵森主编的《复变函数》编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：列出相应各章应掌握的知识点以及重点、难点内容；

2. 主要概念与公式：列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或在考试中出现频率较高的内容；

3. 重、难点解答：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了相应的解释说明，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻；

4. 典型例题分析：精选一些具有代表性的例题进行了详细的分析及解答，这些例题涉及内容广、技巧性强，可以使广大同学举一反三、触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握复变函数的基本内容和解题方法；

5. 课后习题全解：教材课后习题丰富、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论，因此我们对课后的全部习题给出了详细的解答。

本书由寇冰煜、毛磊、滕兴虎、张瑰、张燕、陆小庆、滕加俊等同志编写，张纯、张晓蓉、吴欧、杨传兵、胡俊、王浩等也参加了本书的编写工作，全书由滕加俊、滕兴虎统稿。在本教材的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不妥之处敬请广大同学和读者加以批评指正。

编 者

目　录

第五章　留数及其应用

第六章　共形映射

第一章　复数与复变函数

基本要求、重点与难点

基本要求：

1. 熟练掌握复数的各种表示法及其互相转化.会用复数的各种表示法进行运算.

2. 理解复平面上的简单曲线，区域，单连通域与多连通域等基本概念.

3. 知道复变函数的有关概念，运算，极限，连续，密切注意以上概念与相应实变函数概念的异同.

重点：用复数的各种表示法进行运算，实变与复变函数的各种概念的异同.

难点：复数的辐角，多值函数，复变函数的几何意义的应用.

主要概念与公式

1. 复数

(1) 复数

设 x, y 为实数，我们称形如 $z = x + iy$ 为复数，其中 i 为虚数单位，且规定 $i^2 = -1$.（x 称为此复数的实部，记为 $\mathrm{Re}(z)$；y 称为此复数的虚部，记为 $\mathrm{Im}(z)$）

(2) 共轭复数

设 $z = x + iy$，则称 $\bar{z} = x - iy$ 为 z 的共轭复数.

若 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 为复数 z 的实系数多项式，则

$$\overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)} = \frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})}$$

2. 复平面

(1) 复数的坐标表示

每一个复数 $z = x + iy$ 确定平面上一个坐标为 (x, y) 的点，反之亦然，这意味着复数集与平面上的点之间存在一一对应.由于这个特殊的一一对应存在，我们常把以 x 为实轴，y 为虚轴的平面称之为复平面.(x, y) 为复数 $z = x + iy$ 的坐标表示形式，称为点 z.

(2) 复数的向量表示

记复数 $z = x + iy$ 在平面上确定的点为 P，原点为 O.设复数 z 对应向量 $\overrightarrow{OP}$，这也是一个特别的一一对应.为此我们称向量 $\overrightarrow{OP}$ 为复数 z 的向量表示式.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值，记为 $|z|$，我们有结论：

$$z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|$$

当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边所确定的角 θ 称为复数 z 的辐角，记为

$$\operatorname{Arg} z = \theta$$

$z=0$ 时，辐角不确定.

$\operatorname{Arg} z$ 是一个多值函数，称满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 为辐角的主值，记为 $\arg z$，从而有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(利用复数的向量表示法)对任意复数 z_1，z_2，三角不等式

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

的意义为三角形的一边不大于两边之和，不等式

$$|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||$$

表示三角形的一边不小于两边之差的绝对值.

(3) 复数的三角(极坐标)表示

设复数 $z=x+iy$

根据直角坐标与极坐标的转换关系

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

称 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 为复数的三角表示式，其中 r 为 z 的模，θ 为 $\operatorname{Arg} z$.

(4) 复数的指数表示

由欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

代入复数的三角表示式，得到

$$z = re^{i\theta}$$

称为复数 z 的指数表示式.

3. 复球面

一个球与复平面相切于原点 S，过原点作垂直于复平面的直线交球于 N 点，则 S、N 分别称为球的南极与北极. 由于这样的球与扩充的复平面存在特别的一一对应，常称此球为复球面.

扩充复平面是指在复平面中加进无穷点∞后的集合.

4. 复数的乘幂与方根

利用复数的三角表示法或指数表示法来表示复数的乘法和除法.

(1) 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \\ &= re^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (z_2\neq 0) \end{aligned}$$

(2) z 的 n 次幂

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$ 为自然数，则

$$\begin{aligned} z^n &= r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \\ &= r^n e^{in\theta} \end{aligned}$$

令 $r=1$，则有棣莫弗公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(3) 方根

$$\begin{aligned} w=\sqrt[n]{z} &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \\ &= r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,\cdots,n-1) \end{aligned}$$

5. 简单曲线

自身不相交的连续曲线称为简单曲线(除起点和终点相交外). 起点与终点相交的简单曲线称为简单闭曲线.

6. 区域

一般来说连通的开集称为区域，区域加上边界称为闭域.

通常一条简单闭曲线把复平面分成三部分，内部、外部与曲线本身. 对于一个区域，若其内部的任意一条简单闭曲线所围的内部总在此区域内，则称此区域为单连通区域，直观说是此区域内没有不在区域中的“点”、“线”、“洞”等，不是单连通的区域称为多连通区域.

7. 映射

设复函数 $w=f(z)$ 的定义域为 G，值域为 G^*，则可说复函数 $w=f(z)$ 是 z 平面上图形 G 到 w 平面上图形 G^* 的映射，且这个映射的逆映射(可能多值)称为函数 $w=f(z)$ 的反函数.

8. 函数的极限与连续

设

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$
$$A=u_0+iv_0,\ z_0=x_0+iy_0$$

则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件为：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$$

存在.

函数

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

在点 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件为 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

重、难点解答

1. 在复数的表示法中要特别注意三角表示法和指数表示法. 它们有时使要解决的问题简化. 一般来讲，复数的加减法用代数表示法计算较简单.

2. 两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部都相等，但任意两个不为实数的复数不能比较大小.

3. 实变函数的定义域、值域都在实直线上的某个集合中，而复变函数的定义域，值域都在复平面上的某个集合上，实、复两种函数相关概念与性质的异同全在上面区别中.

4. 复数 z 的辐角 $\operatorname{Arg} z$ 借助于复数 z 的向量表示式知有无穷多个，它们相差 2π 的整数倍. 称位于区间$(-\pi, \pi]$中的角 θ 为辐角的主值，记为 $\arg z$，有时称为主辐角.

5. 确定复数 z 的辐角，一般利用 z 的向量表示确定 z 在坐标系中的位置，再利用反正切公式确定 z 的辐角主值.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & z \text{ 位于右半平面}(x > 0) \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & z \text{ 位于第二象限与负半 } x \text{ 轴}(x < 0,\ y \geqslant 0) \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & z \text{ 位于第三象限}(x < 0,\ y < 0) \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{正半 } y \text{ 轴}(x = 0,\ y > 0) \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{负半 } y \text{ 轴}(x = 0,\ y < 0) \end{cases}$$

6. 在复变函数中，我们第一个遇到的多值函数是复数 z 的辐角 $\operatorname{Arg} z$，其他遇到的一些多值函数基本上与这个多值函数有关.

7. 设复函数 $w = f(z)$ 定义域 G，值域 G^*.

问题是在已知 $w = f(z)$，$B \subset G$，确定 $f(B)$；或已知 $B^* \subset G^*$，$w = f(z)$，求 $f^{-1}(B^*)$；或已知 G，G^*，求 $W = f(z)$.

典型例题分析

【例题 1】 求下列复数的辐角

(1) $2+i$　(2) $-2+i$　(3) $-2-i$　(4) $2-i$

【分析】 求复数的辐角首先确定复数所在的象限，然后利用反正切函数确定辐角的主值，从而确定辐角.

解　(1) $2+i$ 位于第一象限

$$\arg(2+i) = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Arg}(2+i) = \arctan \frac{1}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ 为整数}).$$

(2) $-2+i$ 位于第二象限

$$\arg(-2+i) = \arctan \frac{y}{x} + \pi = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi,$$

$$\mathrm{Arg}(-2+i)=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+(2k+1)\pi\quad(k\text{ 为整数}).$$

(3) $-2-i$ 位于第三象限

$$\arg(-2-i)=\arctan\frac{y}{x}-\pi=\arctan\frac{1}{2}-\pi,$$

$$\mathrm{Arg}(-2-i)=\arctan\frac{1}{2}+(2k-1)\pi\quad(k\text{ 为整数}).$$

(4) $2-i$ 位于第四象限

$$\arg(2-i)=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathrm{Arg}(2-i)=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+2k\pi\quad(k\text{ 为整数}).$$

【例题 2】 设 $z_1=1+i$，$z_2=\sqrt{3}+i$，试求 z_1z_2 及 $\frac{z_1}{z_2}$ 的指数形式.

【分析】 先把 z_1，z_2 化成指数形式，然后再作积与商.

解

$$\begin{aligned}z_1&=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\\z_2&=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=2e^{\frac{\pi}{6}i}\end{aligned}$$

所以

$$z_1z_2=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot 2e^{\frac{\pi}{6}i}=2\sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{6}i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$$

【例题 3】 将复数 $\dfrac{(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^5}$ 化为指数式和三角式.

【分析】 解此类题的要点是利用复数的三角表示式的乘方法则及商法则.

解　由 $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$，

$$\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}=\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)$$

得

$$(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)^2=\cos 8\varphi+i\sin 8\varphi$$

$$(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^5 = [\cos(-3\varphi) + i\sin(-3\varphi)]^5 = \cos(-15\varphi) + i\sin(-15\varphi)$$

所以

$$\frac{(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^5} = \frac{\cos 8\varphi + i\sin 8\varphi}{\cos(-15\varphi) + i\sin(-15\varphi)} = \cos 23\varphi + i\sin 23\varphi = e^{23\varphi i}$$

【例题 4】 求 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$ 的值.

【分析】将括号内的复数化为三角形式或指数形式可简化计算.

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

所以

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8 = (\sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i})^8 = 16e^{\frac{10}{3}\pi i} = 16\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i\sin\frac{10}{3}\pi\right) = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

【例题 5】 设 z_1，z_2 为复平面上任意两点，证明不等式

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$$

【分析】这个不等式的几何意义为以 z_1，z_2，$z_1 - z_2$ 为边的三角形，一边的长度（$|z_1 - z_2|$）不小于两边的长度之差的绝对值（$||z_1| - |z_2||$）.

证 证明这个不等式可利用书中已证的三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

由

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$$

得

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \qquad ①$$

同理，得

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2| \qquad ②$$

由①与②，得

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$$

【例题 6】设 $|z|=1$，试求 $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$ (a，b 不同为零).

【分析】用分析法来证明，利用复数模的概念.

证　要证

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$$

只要证

$$|az+b|=|\bar{b}z+\bar{a}|$$

即要证

$$|az+b|^2=|\bar{b}z+\bar{a}|^2$$

即

$$(az+b)(\overline{az+b})=(\bar{b}z+\bar{a})\,\overline{(\bar{b}z+\bar{a})}$$

即

$$(az+b)(\bar{a}\,\bar{z}+\bar{b})=(\bar{b}z+\bar{a})(b\bar{z}+a) \qquad ①$$

由于

$$|z|=1$$

即

$$z\bar{z}=1$$

所以

$$\begin{aligned}(az+b)(\bar{a}\,\bar{z}+\bar{b})&=z\bar{z}(az+b)(\bar{a}\,\bar{z}+\bar{b})\\&=\bar{z}(az+b)z(\bar{a}\,\bar{z}+\bar{b})\\&=(a+b\bar{z})(\bar{a}+\bar{b}z)\end{aligned}$$

这说明①式成立，所以原等式成立.

【例题 7】求下列关系式所表示的图形

(1) $|z+1|=|z-1|$；

(2) $|z+1|+|z-1|\leqslant 4$；

(3) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$ 且 $2\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant 3$；

(4) $\mathrm{Im}\,z>1$ 且 $|z|<2$.

【分析】设 $z=x+iy$，将各式化为关于 x，y 的二元函数，再由平面解析几何即可知是何图形.

解　(1) 等式 $|z+1|=|z-1|$ 的几何意义为动点 z 到点 -1 的距离等于到点 1 的距离，这样的点 z 的轨迹为连接点 -1 与 1 的线段的中垂线.

令

$$z=x+iy$$

则由

$$|z+1|=|z-1|$$

得

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

即 $$x=0$$

(2) 等式 $|z+1|+|z-1|=4$ 的几何意义为:动点 z 到定点 -1 的距离与到定点 1 的距离之和为 4,这表示以 -1, 1 为焦点,4 为长轴长度的椭圆,所以 $|z+1|+|z-1|\leqslant 4$ 表示这个椭圆的内部及边界所成的闭区间域.

设 $z=x+iy$,则

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

两边平方后化简,得

$$3x^2+4y^2=2$$

即

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

所以

$$|z+1|+|z-1|\leqslant 4$$

为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\leqslant 1$$

(3) 令 $z=x+iy$,则 $\mathrm{Re}\,z=x$

由 $2\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant 3$ 知 $2\leqslant x\leqslant 3$, $z-1=x-1+iy$ ①

由

$$0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4},\ \arg(z-1)=\arctan\frac{y}{x-1}$$

即

$$0<\arctan\frac{y}{x-1}<\frac{\pi}{4}$$

所以

$$0<\frac{y}{x-1}<1$$

由于

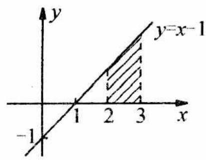
$$x-1>0$$

所以

$$0<y<x-1 \qquad ②$$

由①②式知,所求图形为

$$\begin{cases}0<y<x-1\\2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$



(4) 令

$$z = x + iy$$

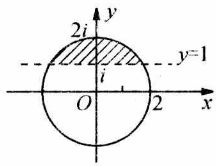
由

$$\operatorname{Im} z > 1,\ |z| < 2$$

得

$$y > 1,\ x^2 + y^2 < 4$$

图形如下图所示



【例题 8】 函数 $w = \dfrac{1}{z+1}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线？

(1) $x^2 + y^2 = 1$；(2) $y = x + 1$；(3) $y = 1$

【分析】解此题主要利用 $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y = \dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$及题中映射 $w = \dfrac{1}{z+1}$

解　设 $w = u + iv$，由 $w = \dfrac{1}{z+1}$，得 $z = \dfrac{1}{w} - 1$.

(1) 由 $x^2 + y^2 = 1$，有

$$\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2 - \frac{1}{4}(z-\bar{z})^2 = 1$$

即

$$z\bar{z} = 1$$

$$\left(\frac{1}{w} - 1\right)\left(\frac{1}{\bar{w}} - 1\right) = 1$$

所以

$$(1-w)(1-\bar{w}) = w\bar{w}$$

即

$$w + \bar{w} = 1$$

所以

$$u = \frac{1}{2}$$

即圆 $x^2 + y^2 = 1$ 映成了直线 $u = \dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $y=x+1$，知

$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{1}{2}(z+\overline{z})+1$$

所以

$$(1-i)z-(1+i)\overline{z}-i=0$$

代入 $z=\dfrac{1}{w}-1$，得

$$(1-i)\left(\frac{1}{w}-1\right)-(1+i)\left(\frac{1}{\overline{w}}-1\right)-i=0$$

即

$$w\overline{w}-(1+i)w-\overline{(1+i)w}+2=0$$

所以

$$u^2+v^2-u+v+2=0$$

即直线 $y=x+1$ 映成了圆 $u^2+v^2-u+v+2=0$

(3) 由 $y=1$，知

$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=1$$

所以

$$z-\overline{z}=2i$$

代入 $z=\dfrac{1}{w}-1$，得

$$\frac{1}{w}-1-\left(\frac{1}{\overline{w}}-1\right)=2i$$

所以

$$\overline{w}-w=2i\overline{w}w$$

即

$$u^2+v^2+v=0$$

所以直线 $y=1$ 映成了圆 $u^2+v^2+v=0$

【例题 9】 令

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

试证 $f(z)$ 在原点不连续.

【分析】 利用连续的定义，若 $f(z)$ 在 $z=0$ 点连续，则有 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=f(0)$，否则不连续.

解 令 $z=x+ix$，则

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

令 $z=iy$，则

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot y}{0+y^2} = 0$$

两个极限不相等，所以$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$不存在，$f(z)$在原点不连续.

【例题 10】 试证两向量$\overrightarrow{Oz_1}$与$\overrightarrow{Oz_2}$互相垂直的充要条件为

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0$$

【分析】 利用等式验证向量$\overrightarrow{Oz_1}$与$\overrightarrow{Oz_2}$夹角为$\frac{\pi}{2}$，即夹角余弦值为 0.

解　设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

则

$$\begin{aligned} z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{-i\theta_2} + r_1 e^{-i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 (e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{i(\theta_2-\theta_1)}) \\ &= 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

必要性. 若$\overrightarrow{Oz_1}$与$\overrightarrow{Oz_2}$垂直，则 $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$，$k$ 为整数

因此

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

所以

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0$$

充分性. 若 $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0$，即 $2r_1 r_2\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

所以

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

所以

$$\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

即向量$\overrightarrow{Oz_1}$与$\overrightarrow{Oz_2}$垂直.

课后习题全解

1. 求下列复数 z 的实部与虚部，共轭复数、模与辐角：

(1) $\dfrac{1}{3+2i}$；　　(2) $\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$；

(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$；　　(4) $i^8 - 4i^{21} + i$.

[解]　把题中所给复数化成 $x+iy$ 形式.

(1) $z = \dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{3-2i}{13} = \dfrac{3}{13} - \dfrac{2}{13}i$

故

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{3}{13}$，$\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{2}{13}$，$\bar{z} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$.