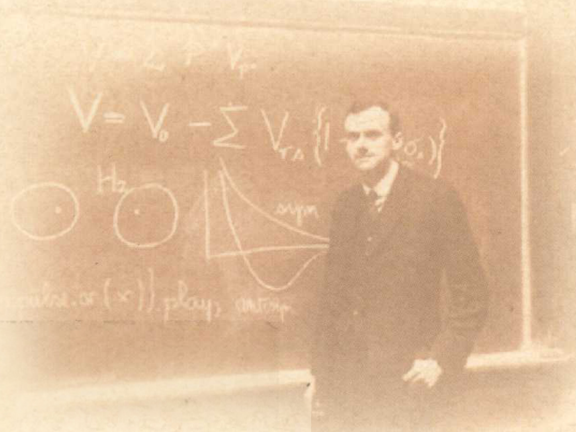
从相干态到压缩态

范洪义　袁洪春　著



中国科学技术大学出版社

从相干态到压缩态

范洪义　袁洪春　著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

相干态与压缩态是量子论中的两个重要概念. 本书用作者自己发明的有序算符内的积分(IWOP)技术以崭新的视角系统地阐述了与量子力学相干态有关的理论,并自然地过渡到压缩态;不但建立了多种有物理背景的广义相干态和形形色色的压缩态,讨论了其物理性质及应用,而且用量子纠缠的思想发展了纠缠相干态和多模压缩态. 作者还另辟蹊径地讨论了相干态、压缩态和混沌光场的退相干. 对于一些传统的基本课题,作者也以新观点和新方法作了分析.

本书可供高等院校物理学专业和光学专业的本科生和相关专业的研究生阅读,也可供从事量子光学以及基础物理研究和应用的科研人员参考与借鉴.

图书在版编目(CIP)数据

从相干态到压缩态/范洪义,袁洪春著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2012.3

ISBN 978-7-312-02802-1

Ⅰ.从…　Ⅱ.①范…②袁…　Ⅲ.①相干态—研究②量子光学—研究
Ⅳ.O431

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 016204 号

出版发行　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
印　　刷　安徽省瑞隆印务有限公司
经　　销　全国新华书店
开　　本　710 mm×960 mm　1/16
印　　张　19.25
字　　数　345 千
版　　次　2012 年 3 月第 1 版
印　　次　2012 年 3 月第 1 次印刷
定　　价　35.00 元

序

早在 1951 年, 爱因斯坦写道：“All the fifty years of conscious brooding have brought me no closer to the answer to the question: ‘what are light quanta?’ Of course today every rascal thinks he knows the answer, but he is deluding himself.” 爱因斯坦逝世后约 10 年, 伴随着激光器的制作成功, 诞生了量子光学. 顾名思义, 量子光学是涉及那些光学现象（光的非经典性质）—— 只能用光束是一串光子（光子小涓流）的理论（而非经典电磁波的理论）解释 —— 的一门学问,（涓流可以让人联想到这样一句英语所描写的场景：There was a stream of people coming out of the theatre.）而激光器在一定阈值发出的光展现了扑朔迷离的非经典性质, 人们用什么量子态来描写这种光场呢？这就是相干态. 那么为何称之为相干态呢？相干是描述光的稳定性的物理概念, 如同在声学中, 音叉被敲击时, 产生几乎纯质的音调, 其音量经久不衰（稳定）. 在经典电磁理论中, 光被视为电磁波, 人们自然认为最稳定的光是一束完全相干的光, 有确定的频率、振幅和位相. 激光是一束经典的单色电磁波的量子对应, 故而被称为相干态.

为了进一步理解相干态的意义, 首先要回顾一下经典光学中什么是光的相干. 例如, 人们看到的光的稳定的干涉现象是由光的相干性引起的, 相干分为时间相干和空间相干等等. 量子光学对光的分析主要针对时间相干而言. 光的时间相干性由“相干时间”而定量化. 相干时间 τ 由光的谱线宽度 $\Delta\omega$ 决定： $\tau=1/\Delta\omega$. 以一个放电管发光为例, 由于很多原子被随机地电激发而辐射出有一定位相的光, 原子间的相互碰撞使得位相不稳定, 所以带热噪声源发出的白光只有很短的相干时间, 而完全单色光是相干性最好的, 理论上有无限长的相干时间. 介于这两者之间的称为部分相干光, 例如由放电灯发出的单谱线（有限宽 $\Delta\omega$).

利用相干态, 物理学家们可以从理论上阐述光的非经典性质, 这正应了爱因斯坦早在撰写光电效应的论著时就指出的：“用连续空间函数进行工作的光的波

动理论, 在描述纯光学现象时, 曾显得非常合适, 或许完全没有用另一种理论来代替的必要, 但是必须看到, 一切光学观察都和时间平均值有关, 而和瞬时值无关, 而且尽管衍射、反射、折射、色散等理论完全为实验所证实, 但还是可以设想, 用连续空间函数进行工作的光的理论, 当应用于光的产生和转化等现象时, 会导致与经典相矛盾的结果. …… 在我看来 …… 有关光的产生和转化的现象所得到的各种观察结果, 如用光的能量在空间中不是连续分布的这种假说来说明, 似乎更容易理解." 爱因斯坦的这段话暗示了量子光学这门学科的必然诞生. 因此, 隶属于量子光学范畴的相干态理论应着重讨论它的光子数行为和统计规律. 根据量子力学对应原理, 也必定存在讨论量子光学与经典光学之间对应的可能性.

单色光波作为一个电磁场, 对仪器敏感的是电场, 把电场分解为两个正交分量, 分别比例于 $\cos\omega$ 和 $\sin\omega$. 作为单色光波的量子对应的相干态, 其两个正交分量的量子涨落相等且等于真空的零点涨落, 这说明即便是激光, 它也有量子噪声. 所以当人们用激光来传输信号时, 就会带来量子噪声, 零点涨落是降低信号中噪声的量子极限. 为了摆脱这个量子极限的限制, 从 20 世纪 70 年代起物理学家们就着手研究压缩态, 设计制作了压缩光. 处于压缩态的光场的一个正交分量的量子涨落减小 (其代价是另一个正交分量的量子涨落增大), 以及用压缩光量子涨落小的正交相来传递信息, 则可以降低量子噪声. 在本书中, 作者将在理论上给出如何从相干态过渡到压缩态的捷径.

相干态 [1~4] 最重要的功能是作为量子光学中的一个核心概念, 是激光理论的重要支柱, 而且是理论物理学中的一个有效方法. 但相干态的作用并不局限于此, 在其他物理分支中相干态也会应运而生, 例如, 它可以非常自然地解释一个微观量子系统怎样能够表现出宏观的集体模式, 从而给出经典力学和量子力学的对应, 也便利于启迪量子力学的经典直觉. 古人云: "万物各异理, 而道尽稽万物之理." 探寻各个物理分支中各种不同的相干态和压缩态的共性, 并用作者自己发明的有序算符内的积分技术 (the technique of integration within an ordered product of operators, 简称为 IWOP 技术) [5~7] 去发展这套理论, 是本书写作的动机.

相干态在群表示论中也十分有意义 [8,9], 例如, 著名的海森伯–外尔 (Heisenberg-Weyl) 代数的巴格曼 (Bargmann) 表示使得许多物理问题得以简化. 相干态在规范场理论中也日益受到重视. 例如, 可以用相干态来处理量子电动力学的红外发散. 现在相干态已被广泛地应用于物理学中的各个领域: 量子光学和量子信息、原子核物理、凝聚态、路径积分、夸克禁闭模型、统计物理与超

导等. 相干态的应用范围也不断扩大, 甚至在受人注目的超弦理论中也占有重要地位 [10]; 在其他学科, 例如生物医学、化学物理的研究中, 相干态的应用也得到了重视 [11].

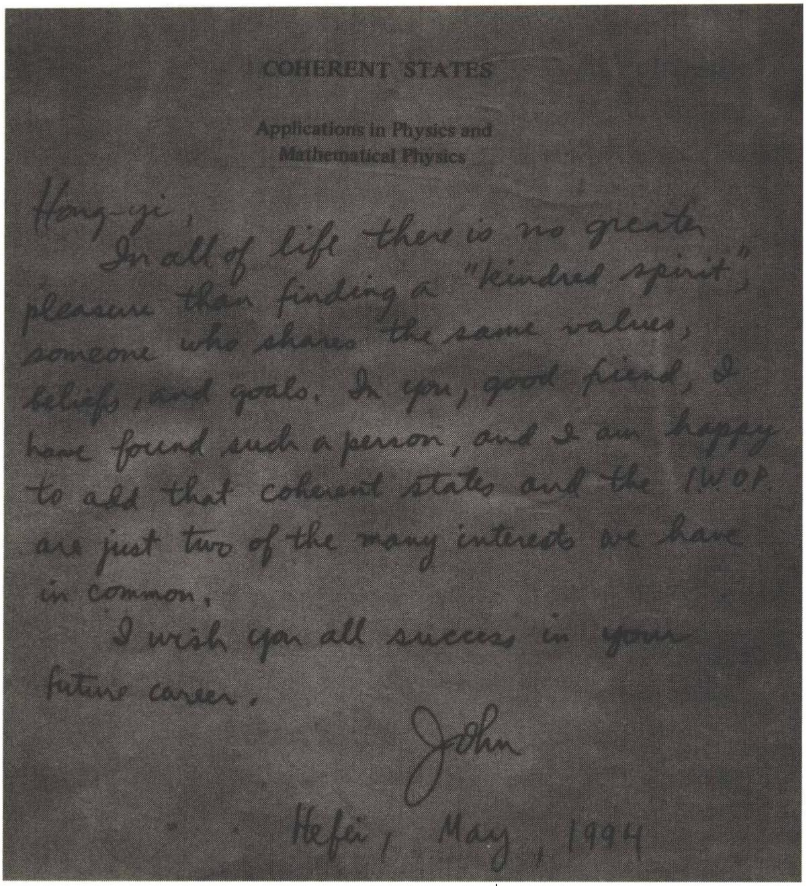
相干态这一物理概念最初是由薛定谔在 1926 年提出的 [12]. 他指出要在一个给定位势下找某个量子力学态, 这个态遵从与经典粒子类似的运动规律, 所谓最接近经典的态, 可以从海森伯的测不准不等式 $\Delta x \Delta p \geqslant \hbar/2$ 取等号来判别. 对于谐振子位势, 他找到了这样的态. 直到 60 年代初, 克劳德 (Klauder) 先从量子力学的数理基础考虑, 建立正则相干态 [1], 1963 年格劳伯 (Glauber) 等系统地建立起光子相干态 [13,14], 并研究它的相干性与非经典性, 开创了量子光学的先河. 接着, 人们又证明了相干态是谐振子湮灭算符的本征态, 而且是使测不准关系取极小值的态. 鉴于相干态固有的特点, 例如, 它是一个不正交的态, 因而具有过完备性 (overcompleteness), 于是从一个算符的相干态平均值就可以确定该算符本身; 又例如, 它是一个量子力学态, 而又最接近于经典情况, 因此人们对相干态理论的研究与应用的兴趣与日俱增, 对相干态概念的推广也做了多种尝试: 人们先后提出了角动量相干态 [15]、带电玻色子相干态 [16]、费米子相干态 [17]、一般位势下的相干态 [18]、有确定电荷与超荷的相干态 [19]、一般李群的相干态 [20]、非线性相干态 [21]、热不变相干态 [22] 等. 近年来, 作者发现, 相干态也可以与量子纠缠关联起来研究, 如建立相干纠缠态. 关于压缩态, 我们将介绍单 - 双模组合压缩态、平移和压缩参量关联的压缩态等. 本书的重点是向读者介绍构建新相干态和压缩态的方法, 至于如何用实验仪器制备它们, 请读者参看其他参考书.

本书的特色是利用范洪义创造的有序算符内的积分技术构建相干态和压缩态, 并给出其广泛的应用. 这是目前在量子光学领域一个最 “elegant” 和先进的方法, 因为它是推动发展狄拉克符号法的理论. 相干态理论的首创者之一约翰 · 克劳德也十分欣赏它, 他曾写道:

In all of life there is no greater pleasure than finding a “kindred spirit”, someone who shares the same values, beliefs, and goals. In you, good friend, I have found such a person, and I am happy to add that coherent states and the I.W.O.P. are just two of the many interests we have in common.

I wish you all success in your future career.

作者之一范洪义自 1978 年起开始自学相干态理论, 很快就发现这是一个既优美又有实际应用的理论, 并创造了 IWOP 技术, 从而推陈出新, 别开生面. 因此,



COHERENT STATES

Applications in Physics and
Mathematical Physics

Hong-yi,

In all of life there is no greater pleasure than finding a "kindred spirit," someone who shares the same values, beliefs, and goals. In you, good friend, I have found such a person, and I am happy to add that coherent states and the IWOP are just two of the many interests we have in common.

I wish you all success in your future career.

John

Hefei, May, 1994

本书得到了中国科学技术大学研究生教育创新计划项目的资助. 在写作过程中, 作者范洪义得到了中国科学技术大学校长侯建国、副校长张淑林和研究生院古继宝、倪瑞、万洪英的支持, 在此谨致谢意. 每当夜深人静, 身心疲倦想偷点儿懒时, 范洪义脑子里就会闪现慈母毛婉珍五十多年前在灯下为小学生批阅作文时边读边改时的情景, 她那清瘦的脸庞和慈祥的目光浮现在儿子眼前, 鞭策着他再打起精神, 坚持工作一会儿. 作者范洪义也感谢曾在门下求学的研究生们, “后生可畏” 对于师长也是一种鞭策. 另一作者袁洪春在写作过程中得到了常州工学院光电工程学院的支持和妻子李恒梅的帮助, 在此深表感谢.

我国历史上著名画家唐伯虎在 50 岁时曾有诗句: “诗赋自惭称作者, 众人多道我神仙. 些须做得功夫处, 莫损心头一寸天.” 惭愧称为本书作者的我们, 写作中

尽量学习唐寅作画时的认真, 穷研物理, 训练智慧, 追求学术境界, 但终受学识疏浅所囿, 有误之处, 望四方读者不吝指教.

参考文献

[1] Klauder J R, Skagerstam B S. Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics [M]. Singapore: World Scientific, 1985.

[2] Klauder J R, Sudarshan E C G. Fundamentals of Quantum Optics [M]. New York: Benjamin, 1968.

[3] Perelomov A M. Generalized Coherent States and Their Applications [M]. Berlin: Springer, 1986.

[4] Zhang W M. Coherent states: Theory and some applications [J]. Rev. Mod. Phys., 1990, 62 (4): 867~927.

[5] Fan H Y. Operator ordering in quantum optics theory and the development of Dirac's symbolic method [J]. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2003, 5: R147~R163.

[6] Fan H Y. Entangled states, squeezed states gained via the route of developing Dirac's symbolic method and their applications [J]. Int. J. Mod. Phys. B, 2004, 18 (10/11): 1387~1455.

[7] Fan H Y, Lu H L, Fan Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics and derivation of entangled state representations [J]. Ann. Phys., 2006, 321: 480~494.

[8] Onofri E. A note on coherent state representations of Lie groups [J]. J. Math. Phys., 1975, 16 (5): 1087~1089.

[9] Jurčo B, Štoviček P. Coherent states for quantum compact groups [J]. Comm. Math. Phys., 1996, 182: 221~251.

[10] Scherk J. An introduction to the theory of dual models and strings [J]. Rev. Mod. Phys., 1975, 47 (1): 123~164.

[11] Davies M J, Heller E J. Multidimensional wave functions from classical trajectories [J]. J. Chem. Phys., 1981, 75: 3919~3924.

[12] Schrödinger E. Quantization as a problem of eigenvalue [J]. Naturwissenschaften, 1926, 14: 664~666.

[13] Glauber R J. The quantum theory of optical coherence [J]. Phys. Rev., 1963, 130: 2529~2539.

[14] Glauber R J. Coherent and incoherent states of the radiation field [J]. Phys. Rev., 1963, 131: 2766~2788.

[15] Arecchi F T, Courtens E, Gilmore R, et al. Atomic coherent states in quantum optics [J]. Phys. Rev. A, 1972, 6 (6): 2211~2237.

[16] Bhaumik D, Bhaumik K, Dutta-Roy B. Charged bosons and the coherent state [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 1976, 9 (9): 1507~1512.

[17] Ohnuki Y, Kashiwa T. Coherent states of Fermi operators and the path integral [J]. Prog. Theor. Phys., 1978, 60 (2): 548~564.

[18] Michael M N, Simmons L M. Coherent states for general potentials. I. Formalism [J]. Phys. Rev. D, 1979, 20: 1321~1331.

[19] Fan H Y, Ruan T N. SU(3) charged and hypercharged coherent state and the color quantum number [J]. Commun. Theor. Phys. 1883, 2 (5): 1405~1417.

[20] Perelomov A M. Coherent states for arbitrary Lie groups [J]. Comm. Math. Phys., 1972, 26: 222~236.

[21] Sivakumar S. Studies on nonlinear coherent states [J]. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2000, 2: R61~R75.

[22] Xu X F, Fan H Y. On the thermo-invarant coherent state in thermo field dynamics [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2006, 21: 911.

目　次

第 1 章　从牛顿–莱布尼茨积分到对狄拉克符号的积分

1.1　从量子力学的表象完备性谈起

量子力学表象理论是狄拉克奠基的, 是符号法的核心 [1]. 狄拉克从工科教学中的投影矢量的方法得到启示, 把坐标空间薛定谔波函数 $\psi(x)$ 看做态矢量 $|\psi\rangle$ 在坐标空间中的一个投影, 表达为 $\langle x|\psi\rangle$, $\langle\,|\,\rangle$ 是普通数 (c 数), 而 $|\,\rangle\langle\,|$ 就是一个算符 (狄拉克称之为 q 数). 注意, 这样一来就引入了坐标 x 表象. 另一方面, 让右矢 $|\,\rangle$ 代表列矩阵, $\langle\,|$ 代表行矩阵, 用狄拉克符号就可把海森伯矩阵算符简化为 $|\,\rangle\langle\,|$, 而 $\langle x|p\rangle$ 即代表表象变换. 如果说物理学家玻恩为了实现使粒子和波两种描述自洽起来, 他在概率波概念中发现了衔接的桥梁, 那么狄拉克就是用符号法把薛定谔形式和海森伯形式两者衔接起来的.

表象 (representation) 原指客观事物在人类大脑中的映象, 用以描述不同 "坐标系" 下微观粒子体系的状态和力学量的具体表示形式. 狄拉克把抽象空间中的态矢量用一组 "坐标系" 基矢和相应的展开系数表示, 系统状态的波函数看成态矢量在某一 "坐标系" 中的投影, 从而成功地引入了 q 数和表象理论, "用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量", 使得贴切地表达量子物理中的一系列新概念并进一步加以运算成为可能. 狄拉克符号业已成为量子力学的标准语言, 它既能深刻反映物理概念, 又能节约人们的脑力.

完备性是基矢成为表象的必要条件, 但完备性的证明则因其烦琐和缺乏普适而有力的积分方法而成为历来困扰物理学家的一个难题, 极大地限制了量子力学新表象的发现. 虽然针对不同的问题选取适当的表象进行求解往往可以达到事半

功倍的效果, 但新表象的缺乏也使得对量子力学中某些问题的探讨变得异常困难. 范洪义提出的有序算符内积分 (IWOP) 技术 (国际同行称为范氏方法 [2]), 恰恰提供了证明完备性的简捷方法. 它赋予基本的坐标、动量表象的完备关系以清晰的数学内涵并将其化为某种算符排序的纯高斯积分的形式; 它也可以简化相干态完备性的证明, 人们因此得到启发, 如何引入可以反映量子纠缠的连续变量的纠缠态表象; 它也为找到多粒子系统的新表象开辟了路径. 在介绍 IWOP 技术之前, 我们需要回顾一些原有的基本的量子力学表象基础知识.

令 $\hat{X},\hat{P}$ 分别为厄米 (Hermite) 坐标和动量算符, 它们满足海森伯正则对易关系 ($\hbar$ 为普朗克常数)

$$[\hat{X},\hat{P}]=\mathrm{i}\hbar. \tag{1.1}$$

记 $\hat{X}$ 和 $\hat{P}$ 的本征态分别是 $|x\rangle$ 和 $|p\rangle$, 则有

$$\begin{aligned}&\hat{X}\,|x\rangle=x\,|x\rangle,\quad \langle x|\,x'\rangle=\delta(x-x'),\\&\hat{P}\,|p\rangle=p\,|p\rangle,\quad \langle p|\,p'\rangle=\delta(p-p'),\end{aligned} \tag{1.2}$$

且

$$\langle x|\,\hat{P}=-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x|,\quad \langle p|\,\hat{X}=\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\langle p|. \tag{1.3}$$

狄拉克指出 $\langle x|$ 与 $|p\rangle$ 的内积是

$$\langle x|\,p\rangle=(2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}xp}. \tag{1.4}$$

这恰是傅里叶 (Fourier) 变换的核. 在这里, 我们进一步看到狄拉克符号法的优点:

(1) $|x\rangle\langle x|$ 是一个纯态密度算符, 为今后量子统计中混合态的引入作了铺垫.

(2) $|x\rangle\langle x|$ 是一个测量算符, 将它作用于 $|\psi\rangle$ 而得到 $\psi(x)|x\rangle$, 所以狄拉克记号可以简洁地描述量子测量.

(3) 全体测量是完备的, 故有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\,\langle x|=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\,|p\rangle\,\langle p|=1. \tag{1.5}$$

狄拉克给出的完备性关系也可理解为在全空间找到粒子的概率为 1 的物理要求.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\,\langle x|=1$ 的使用十分方便, 它可以插入到任意其他态矢量的前后, 相当于表象变换. 表象不但起到“坐标系”的作用, 而且对不同的动力学问题,