概率统计卷

# 吴振奎高等数学解题真经

◎ 吴振奎 编著

考研复习——跋涉艰难
名师大家——仙人指路

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

概率统计卷

# 吴振奎高等数学解题真经

◎ 吴振奎 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 内容提要

高等数学是大学理工科及经济管理类专业的重要基础课，是培养学生形象思维、抽象思维、创造性思维的重要园地.

本书具有以下特点：广泛使用表格法，使有关内容、解题方法和技巧一目了然；从浩瀚的题海中归纳、总结出的题型解法，对同学们解题具有很大的指导作用；用系列专题分析对教材的重点、难点进行了诠释，对同学们掌握这方面知识起到事半功倍的效果.

本书是针对考研，参加数学竞赛的同学撰写的，对在读的本科生、专科生及数学教师同仁也具有很高的参考价值.

**图书在版编目(CIP)数据**

吴振奎高等数学解题真经．概率统计卷/吴振奎编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5603-3363-2

Ⅰ．①吴…　Ⅱ．①吴…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—题解②概率论—高等学校—题解③数理统计—高等学校—题解Ⅳ．① O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 161884 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘　瑶　杨万鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 18.5　字数 543 千字
版　　次　2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3363-2
定　　价　38.00 元

# ⊙ 前言

怎样解(数学)题? 这是一个十分沉重,而又不得不去面对的话题,尤其是对青年学生.

我们熟知:干活不能光凭手巧,还要借助家什;做数学题也不能只凭借聪明,还要注意(掌握运用)方法.数学中的“方法”正如干活的“家什”、过河的“船”和“桥”.

面对浩瀚的题海,不少人(特别是初学者)会觉得茫无所措、叫苦不迭.要学好数学,除了掌握基础知识外,更重要的是做题,可关键是怎样去做.是就题论题、按部就班、多多益善? 还是择其典型、分析实质、积累经验、掌握方法? 当然应取后者.因为只有掌握了方法,才能做到融会贯通、举一反三;只有掌握了方法,才能学以致用、应付万变.

多年的学习与教学实践使我体会到:“方法”对于数学学习的重要,它像天文学中的望远镜,物理学中的实验、观察设备,化学中的试剂、仪器等.应该看到:如果不掌握方法,即使你熟悉解答个别类型问题的手段,纵然你所遇到的是似曾相识的题型,可一旦题目稍稍改动,你也将会一筹莫展——因为你没能了解问题的实质,没有掌握独立解决新问题的本领.

在学习数学的过程中你会发现:看十道题,不如做一道题;而做十道题,不如分析透一道题.只要细心、认真,你在求解任何问题过程中,都会有点滴体会,细微发现.把这些点点滴滴的东西积累起来,去分析、去筛选、去归纳、去总结,你也就得到了方法.

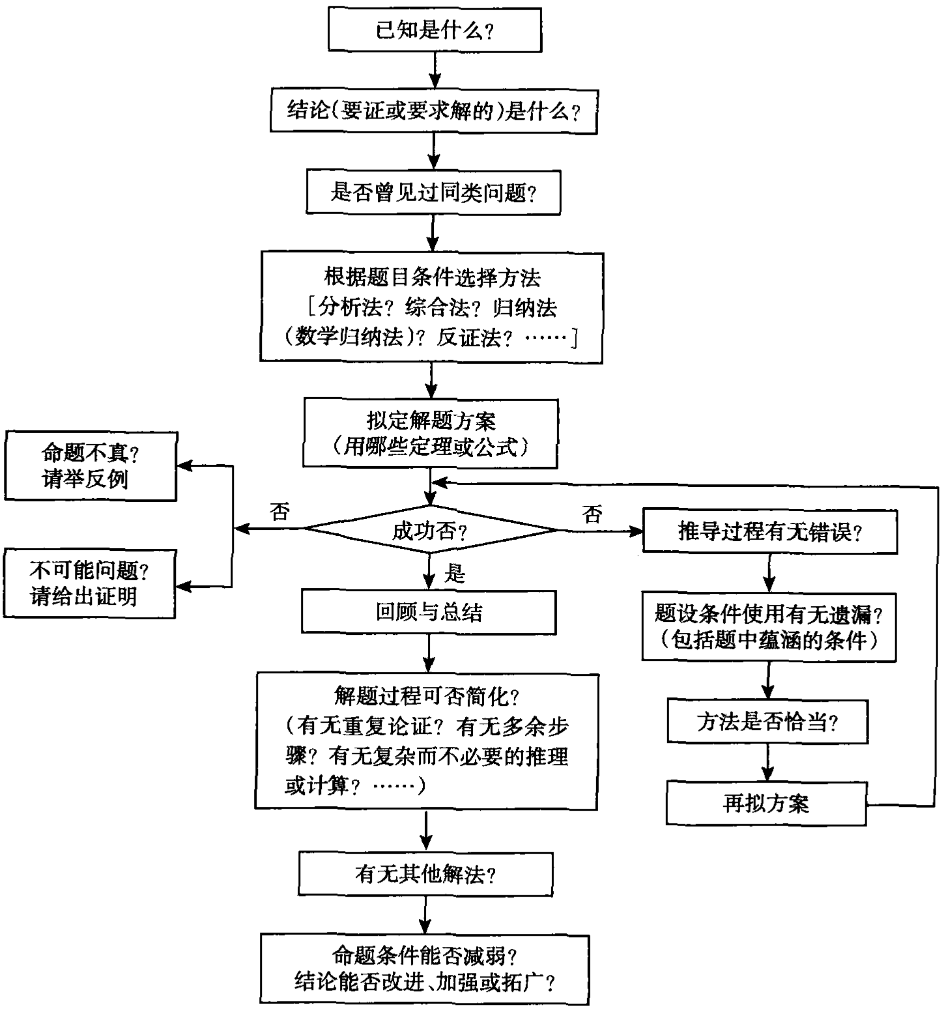
俗话说“熟能生巧”.在熟练掌握了方法的同时,你也就有了技巧.正是:方法源于实践,技巧来自经验.把经验的涓涓细流汇聚起来,便能涌出技巧的小溪——这恰是智慧江河的源头.

笔者几十年来的经历:学数学、练解题、读文章、做数学、教数学……无论成功与失败、经验与教训、顺利与挫折……它们都成了宝贵的财富.

本书奉献给读者的正是这些.

当然，解数学问题绝对没有什么普遍的、万能的模式，但它仍然存在着某些规律、方法和技巧，掌握了它们，至少可以在大的方向上有所选择，这势必会大大加快解题速度，这对学好数学无疑是重要的. 但愿这些能给读者带来益处，这正是笔者撰写本书的目的与愿望.

话再讲回来，方法虽然千变万化、五彩缤纷，但解题步骤却大多雷同. 下面给出一个解题步骤的框图——其实你在解题过程中正在或已经自觉不自觉地履行它，不是吗？




诚挚的批评与指教正是笔者所期待的.

吴振奎

2011 年 5 月于天津

# 目　录

## 第 1 章　随机事件和概率



## 第 2 章　随机变量及其分布

## 专题 1　概率论与数理统计中的填空题解法



## 专题 2　概率论与数理统计中选择题解法



## 专题 3　概率论与数理统计中的反例

# 第 1 章 随机事件和概率

**概率论**起源于博弈(赌博、下棋)问题.概率(曾称或然率)是一个事件发生、一种情况出现可能性大小的数量指标(值介于0与1之间).

文艺复兴前,概率(或机遇)还是一个非数学概念.

15~16世纪,意大利的帕里奥西(L. Pacioli)、塔尔塔利亚(Tartaglia)、卡尔丹(G. Cardano)和法国的帕斯卡(B. Pascal)、费马(P. de Fermat)等人皆对赌博问题中的某些现象做过数学分析,且结合组合方法讨论(解决)合理分配赌资(赌博提前结束情况下)问题.

1657年,荷兰数学家惠更斯(C. Huygens)出版了《论赌博中的计算》系"概率论"学科的开山之作.稍后,雅各·伯努利(J. Bernoullis)《猜度术》的出版,奠定了"概率论"这门学科的基础.

尔后,棣莫弗(A. De. Moivre)、蒲丰(L. Buffon)、拉普拉斯(P. Laplace)和高斯(C. F. Gauss)等对该学科做了大量工作.

1812年出版的拉普拉斯所著《概念的分析理论》一书,已将这门学科系统化,他提出"**事件 $A$ 的概率** $P(A)$等于一次试验中有利于事件 $A$ 的可能结果数与该试验中所有可能的结果数之比"的概率古典定义.

## 内 容 提 要

## 一、随机事件

### 1. 随机事件

**随机试验** 可以在相同条件下重复的试验,且试验所有可能发生的结果是已知的,但每次试验到底是其中哪种结果预先不能确定.

**随机事件** 在随机试验中可能出现也可能不出现的事件,通常用 $A,B,C,\cdots$ 表示.

**必然事件** 在每次试验中必须出现的事件,通常用 $U$ 或 $\Omega$ 表示.

**不可能事件** 在每次试验中必然不出现的事件,通常用 $\varnothing$ 表示.

随机事件、必然事件、不可能事件等通称事件.

### 2. 事件间的关系及运算

事件间的关系见下表.

| 关系 | 定义 | 记号 |
|---|---|---|
| 包含(子事件) | 若事件 $A$ 出现必须导致事件 $B$ 出现,则称 $B$ 包含 $A$ 或 $A$ 含于 $B$,且称 $A$ 是 $B$ 的子事件 | $A \subset B$ 或 $B \supset A$ |
| 相等(等价) | 若 $A \subset B$(或 $A \subseteq B$) 且 $B \subset A$(或 $B \subseteq A$),则称事件 $A,B$ 相等(等价) | $A = B$ |

**注** 关于包含关系规定:对任何事件 $A$,有 $\varnothing \subset A, A \subset U$.

事件间的运算见下表.

| 运算 | 定义 | 记号 |
|---|---|---|
| 和事件 | 事件 $A,B$ 至少有一个出现的事件叫做 $A,B$ 的和事件 | $A \cup B$ |
| 积事件 | 事件 $A,B$ 同时出现的事件叫做 $A,B$ 的积事件 | $A \cap B$ 或 $AB$ |
| 差事件 | 出现事件 $A$ 而不出现事件 $B$ 的事件叫做 $A,B$ 的差事件 | $A - B$ 或 $A \backslash B$ |
| 余事件(补、逆事件) | 事件 $A,B$ 满足 $A \cup B = U, AB = \varnothing$,则 $A,B$ 互称另一事件的余事件 | $B = \overline{A}, A = \overline{B}$ |

互斥事件与互逆事件见下表.

| 关系 | 定义 | 记号 |
|---|---|---|
| 互斥事件(互不相容事件) | 若事件 $A,B$ 的积事件为不可能事件,则 $A,B$ 互为互斥事件 | $AB = \varnothing$ |
| 互逆(余)事件(对立事件) | 若事件 $A,B$ 满足 $A \cup B = U, AB = \varnothing$,则称 $A,B$ 为互逆事件 | $A \cup B = U, AB = \varnothing$ |

### 3. 基本空间

由随机事件可能发生的结果组成的集合叫做基本空间,常用 $U$ 表示.

从集合论角度,还可以重新定义随机事件等.

**随机事件** 若 $D$ 是基本空间的一个子集,则称"试验结果属于 $D$"为一个随机事件.

**基本事件** 基本空间中的单个元素组成的事件.

事件间关系及运算与集合的关系及运算对照见下表.

| 记号 | 集合 | 事件 |
|---|---|---|
| $U, \Omega$ | 空间 | 必然事件、基本空间 |
| $\varnothing$ | 空集 | 不可能事件 |
| $a, b, \cdots$ | 元素 | 基本事件 |
| $A \subset B$ | $A$ 是 $B$ 的子集 | $A$ 是 $B$ 的子事件 |
| $A \cup B$ | $A,B$ 的并集 | $A,B$ 的和事件 |
| $A \cap B$ | $A,B$ 的交集 | $A,B$ 的积事件 |
| $A - B$ | $A,B$ 的差集 | $A,B$ 的差事件 |
| $\overline{A}$ | $A$ 的余集 | $A$ 的逆(余)事件 |

事件间运算的算律见下表.

| 运　　算 | 算　　律 | |
|---|---|---|
| 和 | $A \cup B = B \cup A$ | （交换律） |
| | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | （结合律） |
| 积 | $A \cap B = B \cap A$ | （交换律） |
| | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | （结合律） |
| 和、积 | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | （分配律） |
| 和、积、余 | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | （对偶律） |
| 和、积 | $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ | （吸收律） |

## 二、随机事件的概率

### 1. 概率的定义

概率的定义见下表.

| 方　　式 | 内　　容 |
|---|---|
| 古典定义 | 对古典概型所有可能试验结果全体 $U = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，事件 $A = \{e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_r}\}$（$k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为 1 ～ $n$ 中 $r$ 个不同的数），事件 $A$ 的概率为<br>$$P(A) = \frac{r}{n}$$ |
| 几何概率 | 即借助几何上的度量定义的概率<br>$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(U)}$$<br>这里 $\mu(A)$，$\mu(U)$ 表示 $A, U$ 的测度（如长度、面积、体积等） |
| 统计定义 | 随着试验次数 $n$ 的增大，事件 $A$ 出现的频率 $r/n$ 在区间 $[0,1]$ 上某个数字 $p$ 附近摆动，则事件 $A$ 的概率为 $P(A) = p$ |
| 公理化定义 | 设函数 $P(A)$ 的定义域为所有随机事件组成的集合，且满足：<br>(1) 对任一随机事件 $A$，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；<br>(2) $P(U) = 1, P(\varnothing) = 0$；<br>(3) 对两两互斥的可数多个随机事件 $A_1, A_2, \cdots$ 有<br>$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$<br>则称函数 $P(A)$ 为事件 $A$ 的概率 |

### 2. 概率的性质

(1) 设随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

(3) 若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$；

(4)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$(广义加法定理),且可推广为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

一般地

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_n)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

### 3. 条件概率

设 $A,B$ 为两随机事件,且 $P(A)>0$,则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的条件概率.

于是可有下面两个乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),\quad P(A)>0$$
$$P(AB)=P(B)P(A\mid B),\quad P(B)>0$$

类似地可推广为:$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$,这里 $P(AB)>0$.

一般地,$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$,这里$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$.

### 4. 几个公式

**全概率公式** 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,且事件 $B$ 为事件$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 的子事件,则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

**贝叶斯(Bayes)公式** 若事件 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 两两互斥,且事件 $B$ 为事件$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 的子事件,又 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,$P(B)>0$,则

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(B)}=P(A_i)P(B\mid A_i)\Big/\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

### 5. 事件的独立性

**独立事件** 若事件 $A,B$ 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 $A,B$ 为独立事件.

若 $A,B;\overline{A},\overline{B};\overline{A},B;A,\overline{B}$ 中有一对是相互独立的,则另外 3 对也相互独立.

又设 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若对任一组 $k_1,k_2,\cdots,k_s(2\leqslant s\leqslant n$,且 $k_i$ 取不同的值,$i=1,2,\cdots,s)$,等式

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_s})=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_s})$$

总成立,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 总体独立,简称相互独立.

两两独立与相互独立是两个不同的概念.

互斥、互逆及独立事件的比较见下表.

| 事　件 | 定　　义 | 概率性质 |
|---|---|---|
| 互斥事件 | $A\cap B=\varnothing$,则 $A,B$ 为互斥事件 | $P(A+B)=P(A)+P(B)$ |
| 互逆事件 | $A\cup B=U$,且 $A\cap B=\varnothing$,则 $A,B$ 为互逆事件 | $P(B)=1-P(A)$　(注意到 $B=\overline{A}$) |
| 独立事件 | $P(AB)=P(A)P(B)$,则 $A,B$ 为独立事件 | ①$P(AB)=P(A)P(B)$;<br>② 事件 $A,B;\overline{A},\overline{B};\overline{A},B;A,\overline{B}$ 每对两两独立 |

一些基本公式的联系见图 1.1.

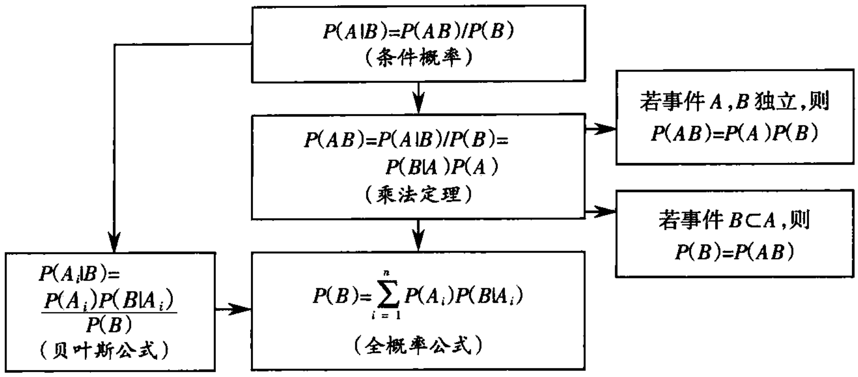



图 1.1

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则有

$$P(\bigcap_{k=1}^{n}A_k)=\prod_{k=1}^{n}P(A_k),\ P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=1-\prod_{k=1}^{n}[1-P(A_k)]$$

### 6. 二项概率公式

**(1) 独立重复试验**

指完全重复,且相互独立的试验.

**伯努利(Bernoulli)试验**　在相同条件下独立重复的试验中,试验结果只有两个($A$ 和 $\overline{A}$),则称此试验为伯努利试验(概型).

在一次伯努利试验中,若 $P(A)=p,P(\overline{A})=q$,其中 $p>0,q>0$,有 $p+q=1$.

**(2) 二项概率公式(伯努利定理)**

每个试验中,事件 $A$ 出现的概率为 $p$,则 $n$ 次独立重复试验中 $A$ 出现 $k$ 次的概率(今记 $q=1-p$)为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n$$

## 例　题　分　析

## 一、随机事件及其概率问题

下面的例子涉及随机事件性质,包括它们的概率.

### 1. 随机事件及运算

解随机事件问题首先要掌握事件的运算律,由于其过于抽象,有时常用文氏图帮助分析和理解.

**例 1**　若 $A,B$ 为两事件,试证:若 $A$ 与 $\overline{A}B$ 互不相容,则 $A\cup B=A\cup\overline{A}B$.

**证 1**　由 $B\Omega=B$,其中 $\Omega=A\cup\overline{A}$ 及 $A\cup AB=A$,有

$$A\cup B=A\cup B\Omega=A\cup B(A\cup\overline{A})=A\cup AB\cup\overline{A}B=(A\cup AB)\cup\overline{A}B=A\cup\overline{A}B$$

**证 2**　若任一 $e\in A\cup B$,有 $e\in A$ 或 $e\notin A$,而 $e\in B$,即 $e\in\overline{A}B$,有 $e\in A\cup\overline{A}B$,故 $A\cup B\subset A\cup\overline{A}B$.

反之,任一 $e\in A\cup\overline{A}B$,有 $e\in A$ 或 $e\in\overline{A}B$,无论何种情况均有 $e\in A\cup B$,可见

$$A\cup\overline{A}B\subset A\cup B$$

综上,$A\cup B=A\cup\overline{A}B$.

**例 2** 证明下列结论或举反例否定之:(1) 若 $A,B$ 相互独立,且 $B,C$ 相互独立,则 $A,C$ 相互独立;(2) 若 $A,B$ 相互独立,且 $C\subset A$ 及 $D\subset B$,则 $C,D$ 相互独立.

**证** (1) 不一定.如盒中有标号分别为 1,2,3,4 的 4 个球,每次从中摸 1 个(有放回),则摸到每个标号球的概率均为$\frac{1}{4}$.

令 $A=C=\{$摸到标号是 1 或 2 的球$\}$,$B=\{$摸到标号是 1 或 3 的球$\}$,则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$.又 $P(AB)=P(BC)=\frac{1}{4}$,知 $A,B$ 相互独立,$B,C$ 相互独立,但 $A,C$ 相互不独立(因为 $P(AC)\neq P(A)P(C)$).

(2) 不一定.比如事件 $A,B,C$ 同上,且令 $D=\{$摸到标号是 1 的球$\}$.

由上知 $A,B$ 相互独立,且 $C\subset A,D\subset B$,但 $C,D$ 相互不独立,因为

$$P(CD)=\frac{1}{4},\quad P(C)P(D)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

**例 3** 若事件 $A,B,C$ 相互独立,则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 也相互独立.

**证** 由题设及事件、余事件的关系可知

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=$$
$$1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

同理可证

$$P(\overline{B}\overline{C})=P(\overline{B})P(\overline{C}),\quad P(\overline{A}\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{C})$$

又

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=$$
$$1-[P(A)+P(B)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]=$$
$$1-[P(A)+P(B)-P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(A)P(C)+P(A)P(B)P(C)]=$$
$$[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

故事件 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 相互独立.

**例 4** 甲、乙、丙、丁 4 人玩扑克牌,甲、丙为一家,乙、丁为一家,假定把 52 张牌随机地分给每人 13 张,且定义事件

$$B_1=\{\text{甲、丙两人共拿到 3 张 A}\}$$
$$B_2=\{\text{乙、丁两人共拿到 3 张 A}\}$$
$$C=\{\text{玩牌者有一家(两人)拿到 3 张 A}\}$$

试问:(1)$B_1,B_2$ 是否是互斥事件?(2)$B_1,B_2$ 是否是独立事件?(3) 求概率 $P(C)$(以组合数表示即可,不必求出最后数值).

**解** (1) 一副扑克牌只有 4 张 A,故事件 $B_1,B_2$ 不可能同时产生,即 $B_1,B_2$ 为互斥事件.

(2) 由(1) 知 $P(B_1\cap B_2)=0$.

事件 $B_1$ 可以看作是事件:{一家拿 26 张牌得到 3 张 A},故所有可能得牌的情形共有 $C_{52}^{26}$ 种,而 $B_1$ 发生的有 $C_4^3C_{52-4}^{26-3}=C_4^3C_{48}^{23}$ 种.这样

$$P(B_1)=C_4^3C_{48}^{23}/C_{52}^{26}=4C_{48}^{23}/C_{52}^{26}>0$$

而 $B_2$ 与 $B_1$ 是对称的,则 $P(B_1)=P(B_2)$,因而 $P(B_1)P(B_2)>0$,而 $P(B_1\cap B_2)=0$.

故 $P(B_1\cap B_2)\neq P(B_1)P(B_2)$,即 $B_1,B_2$ 不是独立事件.

(3) 由题设有 $C=B_1\cup B_2$,又 $B_1,B_2$ 互斥,因而

$$P(C)=P(B_1)+P(B_2)=2P(B_1)=8C_{48}^{23}/C_{52}^{26}$$

应该注意到:随机事件的互斥(积事件为空集,又称不相容)与独立(两件事件发生的概率彼此互不影响)是两个不同的概念,必须善于区分.再请看:

**例5** 试证：若 $P(A)>0$，且 $P(B)>0$，则随机事件 $A,B$ 相互独立与 $A,B$ 互不相容不能同时成立.

**证**（反证法） 若事件 $A,B$ 相互独立与互不相容同时成立，则有

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AB)=0 \end{cases}$$

于是由 $A,B$ 的独立性有 $P(A)P(B)=P(AB)=0$.

这样 $P(A),P(B)$ 中至少有一个为0，这与题设 $P(A)>0,P(B)>0$ 相抵！

故前设不真，从而命题结论正确.

**注** 例4(2)的问题是本命题的特例.

**例6** 设事件 $A,B$ 相互独立，且 $P(A)>0$. 试证：事件 $A,B,A\cup B$ 相互独立 $\Leftrightarrow P(A\cup B)=1$.

**证** 证明"$\Leftarrow$". 若事件 $A,B$ 相互独立，有 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. 今若 $P(A\cup B)=1$，有

$$P[A\cap(A\cup B)]=P(A)=P(A)P(A\cup B)$$

及

$$P[B\cap(A\cup B)]=P(B)=P(B)P(A\cup B)$$

和

$$P[A\cap(A\cup B)\cap B]=P(A\cap B)=P(A)P(B)=P(A)P(A\cup B)P(B)$$

由以上诸式可知事件 $A,B,A\cup B$ 相互独立.

证明"$\Rightarrow$". 若事件 $A,B,A\cup B$ 相互独立，则 $P[A\cap(A\cup B)]=P(A)P(A\cup B)$. 而 $P[A\cap(A\cup B)]=P(A)$，从而 $P(A)P(A\cup B)=P(A)$，由 $P(A)>0$，故 $P(A\cup B)=1$.

**例7** 若对于事件 $A,B,C$ 有 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，能否推出 $P(AB)=P(A)P(B)$？

**解** 不一定. 若 $P(C)=0$，则对互相不独立的事件 $A,B$ 来讲，也有 $P(ABC)=0$，从而 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，但这时 $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

即使 $P(C)>0$，上面关系也不一定成立. 来看个反例：

若有一均匀的正八面体，在其第1,2,3,4面染上红色（不一定将整个面全染）；在第1,2,3,5面染上白色；第1,6,7,8面染上蓝色.

今设事件

$$A=\{\text{抛1次正八面体朝下的面出现红色}\}$$
$$B=\{\text{抛1次正八面体朝下的面出现白色}\}$$
$$C=\{\text{抛1次正八面体朝下的面出现蓝色}\}$$

显然

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

又 $P(ABC)=\frac{1}{8}$，$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$，有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

但 $P(AB)=\frac{3}{8}$，而 $P(A)P(B)=\frac{1}{4}$，故

$$P(AB)\neq P(A)P(B)$$

从而，若 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则不一定有 $P(AB)=P(A)P(B)$.

**注** 此命题的"反问题"即：

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，且 $P(AC)=P(A)P(C)$，又 $P(BC)=P(B)P(C)$，试问 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 成立否？

答案也是不一定，例如：

若在一个均匀四面体的第 1 面涂上红色,在第 2 面涂上蓝色,在第 3 面涂上白色,在第 4 面则涂上红、蓝、白 3 色.

今令

$$A=\{\text{抛 1 次四面体底面出现红色}\}$$
$$B=\{\text{抛 1 次四面体底面出现蓝色}\}$$
$$C=\{\text{抛 1 次四面体底面出现白色}\}$$

则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,又

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

同理

$$P(AC)=P(A)P(C),\quad P(BC)=P(B)P(C)$$

但 $P\{ABC\}=\frac{1}{4}$,而 $P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$. 故 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$.

另一个例子由伯恩斯坦(S. Bernstein) 给出:

考虑掷两骰子的试验,设 $A=\{$第 1 颗骰子出现奇数点$\}$,$B=\{$第 2 颗骰子出现奇数点$\}$,$C=\{$两颗骰子点数和是奇数$\}$,且设样本空间有 36 个样本点,则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},\quad P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$$

知 $A,B,C$ 两两独立.

但 $P(ABC)=0\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$,因而事件 $A,B,C$ 不相互独立.

**例 8** 若 $0<P(A)<1$,且 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$,试证 $A,B$ 独立.

**证 1** 由题设有事件 $A\neq\Omega$,且 $A\neq\varnothing$,则

$$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid\overline{A})P(\overline{A})=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A)P(\overline{A})=$$
$$P(B\mid A)[P(A)+P(\overline{A})]=P(B\mid A)$$

故由乘法定理有 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(A)P(B)$,即 $A,B$ 相互独立.

**证 2** 由题设 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$,有

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

则

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$$

注意到 $P(A)>0$,故 $P(AB)=P(A)P(B)$.

**注** 上述条件是充要的. 事实上,若 $A,B$ 独立,知 $\overline{A},B$ 亦独立.

故 $P(B\mid A)=P(B)$,$P(B\mid\overline{A})=P(B)$,从而 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$.

**例 9** 若知 $P(A),P(B),P(C),P(AB),P(BC),P(ABC)$,求(1)$P(\overline{A}BC)$;(2)$P(\overline{AB}C)$;(3)$P(\overline{ABC})$.

**解** (1) 注意到 $\overline{A}=\Omega-A$,又 $\Omega BC=BC$,则

$$P(\overline{A}BC)=P(BC-ABC)=P(BC)-P(ABC)$$

(2) 因为 $C=\Omega-\overline{C}$,故

$$P(\overline{AB}C)=P(\overline{AB}-\overline{ABC})=P(\overline{AB})-P(\overline{ABC})=P(\overline{A\cup B})-P(\overline{A\cup B\cup C})=$$
$$[1-P(A)-P(B)+P(AB)]-[1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+$$
$$P(BC)+P(AC)-P(ABC)]=$$
$$P(C)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

(3) 由事件概率运算有

$$P(\overline{ABC}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(ABC) =$$
$$1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)] =$$
$$1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(BC) + P(AC) - P(ABC)$$

**注** 由于关系是对称的，还相应地求出 $P(A\overline{B}C)$，$P(AB\overline{C})$，$P(A\overline{B}\overline{C})$，$P(\overline{A}B\overline{C})$ 等表达式.

对于事件的概率计算或证明，首先要记熟公式，其中比较重要的有：

① 对任意事件 $A$，总有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

② 对于必然事件 $\Omega$，$P(\Omega) = 1$.

③ 若 $A \cap B = \varnothing$，则 $P(AB) = P(A)P(B)$.

④ 对任意事件 $A$，$B$ 总有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$；若 $A$，$B$ 互斥，则 $P(AB) = 0$.

⑤ 对任意事件 $A$，$P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

⑥ 对于条件概率而言，若 $P(A) > 0$，则有 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 或 $P(A)P(B \mid A) = P(AB)$.

特别地，若 $A$，$B$ 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$.

⑦ $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$.

若知 $P(B \mid A)$ 或 $P(B \mid \overline{A})$ 要求 $P(B)$，根据 $A$ 发生与否区分 $A$，$\overline{A}$，则 $B$ 可分成两不相容部分 $AB$ 和 $\overline{A}B$.

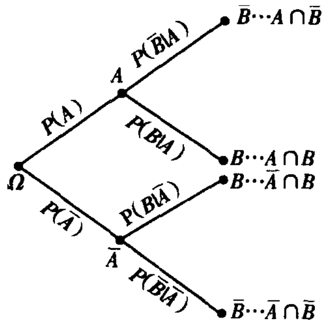



图 1.2

$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$ 的思维模式见图 1.2.

**2. 随机事件的概率**

现在来看几个涉及随机事件概率问题.

**例 1** 设 $A$，$B$ 是两独立事件，又 $P(A) = \dfrac{1}{3}$，$P(B) = \dfrac{1}{2}$. (1) 若 $A$，$B$ 互斥，求 $P(A \mid B)$；(2) 若 $A$，$B$ 相互独立，求 $P(\overline{B} \mid \overline{A})$；(3) 若 $A \subset B$，求 $P(\overline{A}B)$.

**解** (1) 设 $AB = \varnothing$，则 $P(AB) = 0$. 故 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = 0$.

(2) 因由题设知 $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{2}{3}$，且 $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{1}{2}$，又 $A$，$B$ 互相独立，则 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 亦相互独立. 从而

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{3}$$

故

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{1}{2}$$

(3) 由 $A \subset B$，知 $P(AB) = P(A) = \dfrac{1}{3}$，则有 $P(\overline{A}B) = P\{(\Omega - A)B\} = P(B) - P(AB) = \dfrac{1}{6}$.

**例 2** 若随机事件 $A$，$B$ 互不相容，且 $P(A) = p$，$P(B) = q$. 试求以下概率：$P(A \cup B)$，$P(\overline{A} \cup B)$，$P(\overline{A} \cap B)$ 和 $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

**解** 注意到，$A$，$B$ 互不相容，再由题设、事件运算及其概率性质可有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = p + q$$

又由 $A$，$B$ 不相容，有 $AB = \varnothing$，知 $B \subset \overline{A}$，有

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$$

由 $AB = \varnothing$ 知 $P(A \cap B) = 0$，且 $P(\overline{A} \cap B) = P(B) = q$. 从而