


最优控制理论与系统

胡寿松

王执铨

胡维礼



*OPTIMAL
CONTROL
THEORY AND SYSTEMS*

东南大学出版社

最优控制 理论与系统

胡寿松 王执铨 胡维礼

东南大学出版社

(苏)新登字第 012 号

内 容 简 介

本书从理论及工程应用的角度,系统地介绍了最优控制理论及最优控制系统的各个基本方面。全书共分 10 章。第 2~4 章 介绍变分法、极小值原理及动态规划的基本内容、方法及应用;第 5~6 章 对状态调节器、输出调节器以及跟踪系统进行了较为深入的讨论;第 7~9 章 介绍了最优控制理论中较为新颖的分支——鲁棒最优控制,奇异最优控制以及随机最优控制;第 10 章介绍各种典型的实用最优控制系统。

本书深入浅出,结构严谨,实例丰富,便于自学。可作为高等院校自动控制专业研究生教材和自动化类专业高年级本科生教材,亦可供从事自动控制、信息处理、系统工程及计算机应用等专业的有关科研人员和工程技术人员参考。

责任编辑: 陈天授

最 优 控 制 理 论 与 系 统

胡寿松 王执铨 胡维礼

*

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210018)

江苏省新华书店经销 南京邮电学院印刷厂印刷

*

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 18.5 字数 479 千

1994 年 12 月第 1 版 1995 年 3 月第 1 次印刷

印数:1-3000 册

ISBN 7-81023-999-6/TP·62

定价: 15.50 元

(凡因印装质量问题,可直接向承印厂调换)

前 言

20世纪60年代初,由于空间技术的迅猛发展和数字计算机的广泛应用,动态系统的优化理论得到了迅速发展,形成了最优控制理论这一重要的学科分支。时至今日,动态系统优化理论不仅有了许多成功的应用,而且远远超出了自动控制的传统界限,在系统工程、经济管理与决策、人口控制等许多领域都有越来越广泛的应用,取得了显著的成效。同时,最优控制理论自身在不断完善和充实的过程中,又产生了许多需要解决的理论和实践问题。也许,正是因为这些原因,最优控制目前仍然是一个相当活跃的学科领域。

本书试图从理论及工程应用的角度,系统地介绍最优控制理论的各个基本方面。全书共分10章:第2~4章,系统介绍变分法、极小值原理及动态规划的基本内容、方法及应用;第5~6章对状态调节器、输出调节器以及跟踪系统进行较为深入的讨论;第7~9章介绍了最优控制理论中较为新颖的分支——鲁棒最优控制、奇异最优控制、随机最优控制;第10章集中介绍各种典型的实用最优控制系统。

在编著过程中,我们在注重理论的严谨性,保持内容的先进性、完整性和系统性的同时,力求深入浅出,便于读者自学。书中编入了相当数量的例题、习题和应用实例,以利于深入理解和应用最优控制理论。

本书由胡寿松教授、王执铨教授、胡维礼教授编著,史维教授主审。刘士中教授仔细通读了样稿并提出一些有益的建议。马苏女士为本书精心描绘了全部插图。对此,我们表示衷心感谢。

本书是编著者在多年教学和科研的基础上,经充实和提高而写成的,其中大部分内容都已为控制专业研究生、高年级本科生以

及有关工程技术人员多次讲授过，但由于编著者水平所限，书中疏漏和不妥之处在所难免，殷切希望广大读者不吝指正。

编著者

1993年12月

目 录

1 导论	
1-1 引言	(1)
1-2 最优控制问题	(2)
1-3 性能指标类型	(11)
2 最优控制中的变分法	
2-1 泛函与变分	(14)
2-2 欧拉方程	(24)
2-3 横截条件	(35)
2-4 用变分法解最优控制问题	(45)
2-5 角点条件与内点约束	(66)
习 题	(71)
3 极小值原理及其应用	
3-1 连续系统的极小值原理	(76)
3-2 离散系统的极小值原理	(119)
3-3 时间最优控制	
3-4 燃料最优控制	(167)
3-5 时间-燃料最优控制	(182)
习 题	(191)
4 动态规划	
4-1 多级决策问题	(202)
4-2 离散动态规划	(216)
4-3 连续动态规划	(226)
4-4 动态规划与极小值原理和变分法	(236)
习 题	(243)

5	线性最优状态调节器	
5-1	线性二次型问题	(249)
5-2	状态调节器	(254)
5-3	具有给定稳定度的状态调节器	(277)
5-4	逆最优调节器	(283)
5-5	离散状态调节器	(290)
	习 题	(296)
6	线性最优输出调节器与跟踪系统	
6-1	输出调节器	(302)
6-2	离散输出调节器	(319)
6-3	跟踪系统	(325)
	习 题	(342)
7	鲁棒最优控制	
7-1	鲁棒控制问题	(346)
7-2	鲁棒控制的基本概念与数学基础	(351)
7-3	H^∞ 最优控制理论	(356)
7-4	H^∞ 最优控制的直接状态空间法	(393)
	习 题	(404)
8	奇异最优控制	
8-1	最优控制问题的奇异解	(406)
8-2	线性系统的奇异最优控制	(415)
8-3	非线性系统的奇异最优控制	(432)
8-4	奇异最优调节器	(440)
8-5	奇异最优控制的应用	(451)
	习 题	(455)
9	随机最优控制	
9-1	随机噪声作用下的状态响应	(458)
9-2	随机状态反馈调节器	(466)
9-3	随机输出反馈调节器	(479)

9-4	离散系统的随机最优控制·····	(492)
	习 题·····	(508)
10	实用最优控制系统	
10-1	直流拖动系统能耗最小的最优控制 ·····	(511)
10-2	终端时间不固定的电力拖动最优控制 ·····	(541)
10-3	高速高精度数字伺服系统的时间次优控制 ···	(527)
10-4	用 ITAE 性能指标设计 实现最优Ⅲ型数字伺服系统 ·····	(559)
10-5	造纸机烘缸表面温度最佳分布和最优控制 ···	(568)
	参考文献·····	(576)

1 导 论

1-1 引 言

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分,其形成与发展奠定了整个现代控制理论的基础。早在 20 世纪 50 年代初,就开始了最短时间控制问题的研究;随后,由于空间技术的发展,越来越多的学者和工程技术人员投身于这一领域的研究和开发,逐步形成了一套较为完整的最优控制理论体系。

最优控制理论研究的主要问题是:根据已建立的被控对象的时域数学模型或频域数学模型,选择一个容许的控制律,使得被控对象按预定要求运行,并使给定的某一性能指标达到最优值。从数学观点来看,最优控制理论研究的问题是求解一类带有约束条件的泛函极值问题,属于变分学的理论范畴。然而,经典变分理论只能解决容许控制属于开集的一类最优控制问题,而工程实践中所遇到的多是容许控制属于闭集的一类最优控制问题。对于这一类问题,经典变分理论变得无能为力,因而为了适应工程实践的需要,50 年代中期出现了现代变分理论。在现代变分理论中,最常用的两种方法是动态规划和极小值原理。

动态规划是美国学者 R. E. 贝尔曼于 1953~1957 年为了优化多级决策问题的算法而逐步创立的。贝尔曼依据最优性原理,发展了变分学中的哈密顿-雅可比理论,解决了控制有闭集约束的变分问题。极小值原理是前苏联科学院院士 Л. С. 庞特里亚金于 1956 年至 1958 年间逐步创立的。庞特里亚金在力学哈密顿原理启发下,进行推测,并证明了极小值原理的结论,同样解决了控制有闭集约束的变分问题。动态规划与极小值原理是现代变分理论中的两种

卓有成效的方法,推动了最优控制理论的发展。

近年来,由于数字计算机的飞速发展和完善,逐步形成了最优控制理论中的数值算法。当性能指标比较复杂,或者不能用变量显函数表示时,可以采用直接搜索法,经过若干次迭代,搜索到最优点。常用的数值算法有邻近极值法、梯度法、共轭梯度法及单纯形法等。同时,由于可以把计算机作为控制系统的组成部分,以实现在线控制,从而使最优控制理论的工程实现成为现实。因此,最优控制理论提出的求解方法,既是一种数学方法,又是一种计算机算法。

时至今日,最优控制理论的研究,无论在深度和广度上,都有了很大的发展,并日益与其他控制理论相互渗透,形成了更为实用的学科分支。如:鲁棒最优控制,随机最优控制,分布参数系统的最优控制及大系统的最优控制等。可以说,最优控制理论目前仍然是正在发展中的、极其活跃的学科领域之一。

1 — 2 最优控制问题

1 — 2 — 1 最优控制实例

例 1 — 1 最大面积问题

设一渔轮进行围网作业,如图 1 — 1 所示。已知渔轮相对海流的速度为 v ,其大小不变。作业区海流速度 w 的大小和方向一定。求渔轮方位角 $\theta(t)$ 的最优变化律,使渔轮在给定时间 t_f 内所围的海域面积 A 最大。

选海流速度 w 的方向为 x 轴,垂直方向为 y 轴,则渔轮的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v \cos \theta(t) + w \\ \dot{y}(t) &= v \sin \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

初始条件与末端条件为

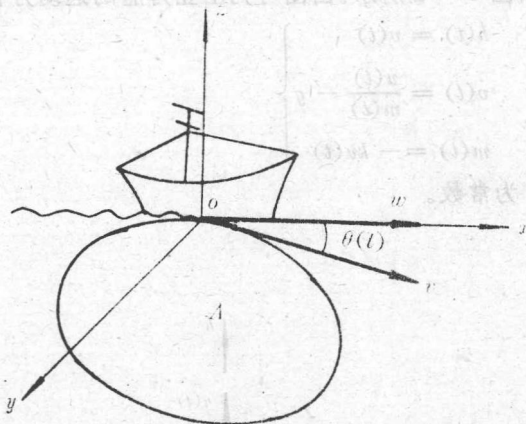


图 1-1 渔轮围网作业图

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x(t_f) = x_0 \\ y(0) &= y(t_f) = y_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

要求确定最优控制律 $\theta^*(t)$, 使下列代表面积的性能指标为最大

$$\begin{aligned} J &= \oint y(t) dx(t) = \int_0^{t_f} y(t) \dot{x}(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} y(t) [v \cos \theta(t) + w] dt \end{aligned} \quad (1-3)$$

例 1-2 最小燃耗问题

为了使宇宙飞船登月舱在月球表面实现软着陆, 即登月舱到达月球表面时的速度为零, 要寻求登月舱发动机推力的最优变化律, 使燃料消耗最少, 以便在完成登月考察任务后, 登月舱有足够燃料离开月球与母船会合, 从而返回地球。

设飞船登月舱质量为 $m(t)$, 高度为 $h(t)$, 垂直速度为 $v(t)$, 发动机推力为 $u(t)$, 月球重力加速度为常数 g , 飞船登月舱不含燃料时的质量为 M , 登月舱所载燃料质量为 F 。已知登月舱登月时的初

始高度为 h_0 , 初始垂直速度为 v_0 。登月舱在月球上实现软着陆的示意图如图 1-2 所示。由图可列出登月舱的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{u(t)}{m(t)} - g \\ \dot{m}(t) &= -ku(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中 k 为常数。

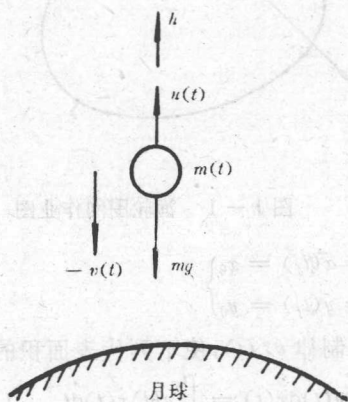


图 1-2 登月舱软着陆示意图

初始条件为

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= h_0 \\ v(0) &= v_0 \\ m(0) &= M + F \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

末端条件为

$$\left. \begin{aligned} h(t_f) &= 0 \\ v(t_f) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中 t_f 为登月舱发动机工作的末端时刻。

控制约束条件

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (1-7)$$

式中 u_{\max} 为登月舱发动机最大推力。

性能指标取为表征燃料消耗量的登月舱着陆时的质量,即

$$J = m(t_f) \quad (1-8)$$

最优控制任务是:在满足控制约束条件下,寻求发动机推力最优变化律 $u^*(t)$,使登月舱由已知的初态(初始状态)转移到要求的末态(末端状态),并使所示的式(1-8)为最大,从而使登月过程中燃料消耗量最小。

例 1-3 最快拦截问题

设空中有一枚敌方导弹 M (称为目标)和一枚我方反导弹导弹 L (称为拦截器)。已知目标 M 以 v_M 作等速飞行,其重力加速度为 g ;拦截器 L 的质量为 $m(t)$,满载燃料时的质量为 m_0 ,燃料消耗完毕时的质量为 m_e ,发动机推力为 $p(t)$,单位推力的燃料消耗率为常数 k ,推力的方位角为 $\theta(t)$,发动机的最大推力限额为 p_M 。作战任务要求确定拦截器 L 推力及其方位角的最优变化律 $p^*(t)$ 和 $\theta^*(t)$,以便在空中尽快摧毁目标 M 。

为便于研究起见,假定 L 与 M 在同一平面内运动,如图 1-3 所示。由图可列出目标 M 的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_M(t) &= v_{Mx}(t) \\ \dot{y}_M(t) &= v_{My}(t) \\ \dot{v}_{Mx}(t) &= 0 \\ \dot{v}_{My}(t) &= -g \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

其中, (x_M, y_M) 表示平面上目标 M 的位置, (v_{Mx}, v_{My}) 表示目标 M 的速度。

若以 (x_L, y_L) 表示平面上拦截器 L 的位置, (v_{Lx}, v_{Ly}) 表示拦截器 L 的速度,则拦截器 L 的运动方程为

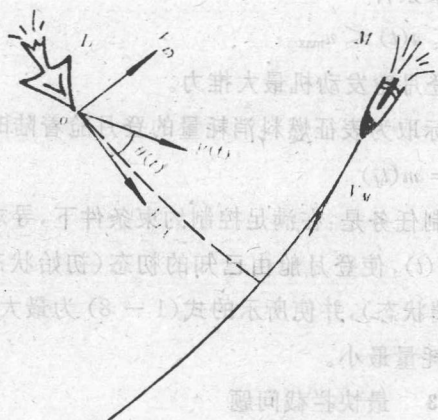


图 1-3 最快拦截问题示意图

$$\left. \begin{aligned}
 x_L(t) &= v_{Lx}(t) \\
 y_L(t) &= v_{Ly}(t) \\
 \dot{v}_{Lx}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \cos \theta(t) \\
 \dot{v}_{Ly}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \sin \theta(t) - g \\
 \dot{m}(t) &= kp(t)
 \end{aligned} \right\} (1-10)$$

为了进一步简化运动方程,取相对运动坐标系。令拦截器与目标的相对位置及相对速度为

$$\left. \begin{aligned}
 x(t) &= x_L(t) - x_M(t) \\
 y(t) &= y_L(t) - y_M(t) \\
 v_x(t) &= v_{Lx}(t) - v_{Mx}(t) \\
 v_y(t) &= v_{Ly}(t) - v_{My}(t)
 \end{aligned} \right\} (1-11)$$

于是,拦截器与目标的相对运动方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \\ \dot{v}_x(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \cos\theta(t) \\ \dot{v}_y(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \sin\theta(t) \\ \dot{m}(t) &= -kp(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

初始状态:

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= x(0), \quad y(t_0) = y(0), \quad m(t_0) = m(0) \\ v_x(t_0) &= v_x(0), \quad v_y(t_0) = v_y(0) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中 t_0 为初始时刻。

末态要求为

$$\left. \begin{aligned} x(t_f) &= y(t_f) = 0 \\ m(t_f) &\geq m_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

其意义是要求拦截器在燃料消耗完毕前击中目标。

控制约束为

$$\left. \begin{aligned} |p(t)| &\leq p_M \\ \theta(t) &\text{ 不限} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

性能指标取为

$$J = \int_0^{t_f} dt \quad (1-16)$$

最优控制任务是:在容许控制中确定 $p^*(t)$ 和 $\theta^*(t)$, 使拦截器 L 从已知初态转移到要求的末态, 并使给定的性能指标极小(时间最短)。

例 1-4 最大半径轨道转移问题

已知宇宙飞船沿环形地球轨道飞行, 现要求用有限推力的小火箭发动机在预定时间 t_f 内, 使飞船转移到最大半径的环形火星轨道上, 试确定小火箭发动机推力方位角的最优变化律。

设宇宙飞船小火箭发动机的推力为 p , 其大小恒定; 推力方位角为 $\theta(t)$, 宇宙飞船到引力中心的径向距离为 $r(t)$, 地球轨道的径

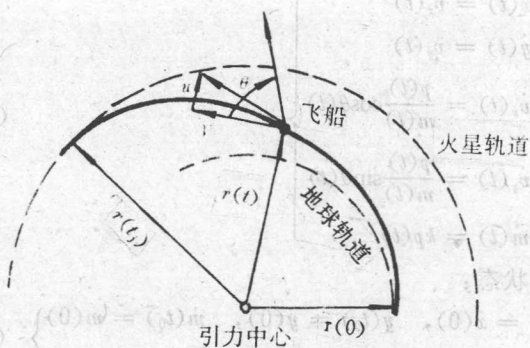


图 1-4 最大半径轨道转移示意图

向距离为 $r(0)$, 火星轨道的径向距离为 $r(t_f)$, 宇宙飞船速度向量的径向分量为 $u(t)$, 切向分量为 $v(t)$, 宇宙飞船的质量为 m , 燃料消耗率为常数 \dot{m} , 引力中心的引力常数为 λ . 低推力最大半径轨道转移问题如图 1-4 所示。

根据力学规律, 可以列出系统的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}(t) &= u(t) \\ \dot{u}(t) &= \frac{v^2(t)}{r(t)} - \frac{\lambda}{r^2(t)} + \frac{p \sin \theta(t)}{m - |\dot{m}|t} \\ \dot{v}(t) &= -\frac{u(t)v(t)}{r(t)} + \frac{p \cos \theta(t)}{m - |\dot{m}|t} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

初始状态为

$$r(0) = r_0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = \sqrt{\frac{\lambda}{r_0}} \quad (1-18)$$

末态要求为

$$u(t_f) = 0, \quad v(t_f) = \sqrt{\frac{\lambda}{r(t_f)}} \quad (1-19)$$

性能指标为

$$J = r(t_f) \quad (1-20)$$

最优控制任务是确定 $\theta^*(t)$, 使宇宙飞船在预定时间 t_f 内, 由已知初态转移到要求的末态, 并使性能指标(轨道转移半径)最大。

1-2-2 最优控制问题的基本组成

从上述几个最优控制的实例可见, 任何一个最优控制问题均应包含以下四个方面内容。

(1) 系统数学模型

在集中参数情况下, 被控系统的数学模型通常以定义在时间间隔 $[t_0, t_f]$ 上的状态方程来表示:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \quad t \in [t_0, t_f] \quad (1-21)$$

其中 $x \in R^n$, 为系统状态向量; $u \in R^m$, 为系统控制向量。在确定的初始状态 $x(t_0) = x_0$ 情况下, 若已知控制律 $u(t)$, 则状态方程(1-21)有唯一解 $x(t)$ 。

(2) 边界条件与目标集

动态系统的运动过程, 归根结底是系统从其状态空间的一个状态到另一个状态的转移, 其运动轨迹在状态空间中形成一条轨线 $x(t)$ 。为了确定要求的轨线 $x(t)$, 需要确定轨线的两点边界值。因此, 要求确定初始状态和末端状态, 这是求解状态方程(1-21)所必需的边界条件。

在最优控制问题中, 初始时刻 t_0 及初始状态 $x(t_0)$ 通常是已知的, 但末端时刻 t_f 和末端状态 $x(t_f)$ 则视具体问题而异。例如, 末端时刻 t_f 可以是固定的(如例 1-1, 例 1-2 和例 1-4), 也可以是自由的(如例 1-3); 末端状态 $x(t_f)$ 可以是固定的(如例 1-1 和例 1-2), 也可以是自由的(如例 1-3), 或者是部分固定、部分自由的(如例 1-4)。一般, 可用如下目标集加以概括:

$$\Psi[x(t_f), t_f] = 0 \quad (1-22)$$

其中, $\Psi \in R^r, r \leq n; x(t_f) \in \Psi(\cdot)$ 。若末端状态 $x(t_f) = x_f$, 为一固定向量, 则目标集 $\Psi(\cdot)$ 仅有一列元素 x_f ; 若 $x(t_f)$ 应满足某些约束条件, 则目标集 $\Psi(\cdot)$ 为 n 维空间中的 r 维超曲面; 若 $x(t_f)$ 自由, 则