新课标·重点难点系列

第二版

初中数学重点难点16讲

总策划　邓建烈
主　编　田　华
　　　　史建伟

上海交通大学出版社

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

责任编辑／陶善工
冯 勤
封面设计／朱 懿

新课标·难题新题系列

初中数学难题新题精讲精练300例
初中物理难题新题精讲精练300例
初中化学难题新题精讲精练300例

新课标·重点难点系列

初中数学重点难点16讲
初中物理重点难点16讲
初中化学重点难点16讲
初中语文重点难点16讲
初中英语重点难点16讲

新课标·小题库系列

初中数学解法小题库
初中物理解法小题库
初中化学解法小题库

ISBN 978-7-313-03982-8
9 787313 039828
定价:20.00元

新课标·重点难点系列

初中数学重点难点16讲

（第二版）

总策划 邓建烈

主　编 田　华　史建伟

编　写 毛贵娥　徐炳生
陈剑钰　杨玉芬
潘红英　贾理云
杨玉梅　王翰林
印佐平　卞秀芳
江多娇

上海交通大學出版社

内 容 提 要

本书是初中数学全程复习用书。全书分为两编。第一编为“知识梳理，精题点拨”，共设有16讲，每讲一个专题，细致讲述各知识模块中的重点难点、典型例题。第二编为“中考冲刺，考题突破”，帮助学生提高应试解题技巧。

本书初版后，深受广大师生欢迎，此次根据教材变化情况和中考命题新思路，全面重新改写了全书。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学重点难点16讲/田华，史建伟主编. —2版.
上海：上海交通大学出版社，2009
(新课标·重点难点系列)
ISBN 978-7-313-03982-8

Ⅰ.初… Ⅱ.①田…②史… Ⅲ.数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第077359号

初中数学重点难点16讲
(第二版)
田 华 史建伟 主编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路951号 邮政编码200030)
电话：64071208 出版人：韩建民
昆山市亭林印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
开本：787mm×1092mm 1/16 印张：13.25 字数：322千字
2005年5月第1版 2009年5月第2版 2009年5月第5次印刷
印数：1~5030
ISBN 978-7-313-03982-8/G 定价：20.00元

编写说明

《初中数学重点难点16讲》是一本实用性强的初中数学复习用书，它将为你升学复习助一臂之力。本书2005年初版以后，深受师生欢迎，已重印多次。这次根据教材变化情况和中考命题新思路，重新编写第二版。

本书特点：

第一编：知识梳理，精题点拨。

共有16讲，每一讲中设有重点难点、例题精讲、效果验收和参考答案。

重点难点：对概念和知识点内容给予剖析、归纳相应的知识网络及知识的重难点。

例题精讲：精选典型题，突出重点，剖析难点，通过思路点拨，提高学生解题能力。

效果验收：选编一定量的习题，帮助学生提高学习成绩和应考能力。

参考答案：配有详细的解题过程，以适应各个层次的学生使用。

第二编：中考冲刺，考题突破。

共有4个专题，每专题依据考纲及新课标要求，精选中考的最新题型，以专题形式分析解读，为备考奠定良好的应变能力。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请广大师生批评指正。

编　者

目　录

第一编　知识梳理　精题点拨

第二编　中考冲刺　专题突破

第一编　知识梳理　精题点拨

第1讲　实　数

重点难点

一、实数的分类

1. 根据实数的定义分类

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{matrix}\text{正整数}\\ \text{零}\end{matrix}\right\}\text{自然数}\\ \text{负整数}\end{cases}\\
\text{分数}\left\{\begin{matrix}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}
\end{cases}\\
\text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}
\end{cases}
$$

2. 根据实数的符号分类

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{正无理数}\end{cases}\\
\text{零(既不是正数也不是负数)}\\
\text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\\ \text{负无理数}\end{cases}
\end{cases}
$$

二、实数的有关概念

1. 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线，叫做数轴. 其中“原点、正方向和单位长度”是数轴的“三要素”. 数轴上的点与实数之间是一一对应的.

2. 相反数

实数 a 的相反数为 $-a$；a 与 b 互为相反数 $\Leftrightarrow a+b=0$；相反数的几何意义：在数轴上，表示相反数的两个点位于原点的两侧，且到原点的距离相等.

3. 倒数

若两个数的积等于 1，则这两个数互为倒数. 零没有倒数.

4. 绝对值

$$|a|=\begin{cases}a\ (a>0),\\0\ (a=0),\\-a\ (a<0),\end{cases}\quad 即\ |a|\geqslant 0.$$

绝对值的几何意义：一个数的绝对值，就是在数轴上表示这个数的点到原点的距离.

5. 算术平方根

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a>0),\\0\ (a=0),\\-a\ (a<0).\end{cases}$$

$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$.

6. 零指数幂、负整数指数幂

$a^0=1\ (a\neq 0)$；

$a^{-P}=\dfrac{1}{a^P}$ ($a\neq 0$，P 为正整数).

7. 科学记数法

$a\times 10^n$(其中 $1\leqslant |a|<10$，n 为整数).

8. 近似数与有效数字

常见的近似数一般是按某种近似程度采用四舍五入法所得的数，一个近似数从左边第一个不是 0 的数字起，到精确到的数位止，所有的数字都叫做这个近似数的有效数字.

9. 常用的几个特殊整数

(1) 最小的自然数是零；最小的正整数是 1；最大的负整数是 -1；绝对值最小的数是零，同时，零也是最小的非负整数.

(2) 1 既不是质数也不是合数；2 是最小的质数，也是唯一的偶质数.

10. 三种重要的非负数

(1) 实数 a 的绝对值，记作 $|a|$；

(2) 实数 a 的偶次方，记作 a^{2n}(n 为正整数)；

(3) 实数 a ($a\geqslant 0$) 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$.

在解题中，常用到它们的性质：

① 如果一个非负数不大于零，那么此非负数必等于零；

② 如果几个非负数的和为零，那么每个非负数一定等于零.

11. 常见的几种无理数

(1) 根号型. 如 $\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{25}$ 等开方开不尽的数.

(2) 三角函数型. 如 $\cos 30°$，$\tan 30°$，$\cot 60°$ 等(但 $\sin 30°$，$\tan 45°$ 不是无理数).

(3) 构造型. 如 0.112 111 211 112…(1 的个数依次增加 1 个)等无限不循环小数.

(4) 用 π 这个数表示的圆周率等.

12. 求近似值的一种特殊方法

当把一个数精确到十位、百位、千位、万位等时，先用科学记数法表示，再根据精确度四舍五入取近似值；保留的有效数字个数比准确数的整数部分的位数少时也如此.

例题精讲

【例题1】 下列各数中：$-\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{27}$，3.141 592 6，$\sin 60°$，$\frac{22}{7}$，$0.\dot{3}1\dot{2}$，0.101 001 000 1…（每两个1之间依次多1个0），$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0$，$\frac{1}{2}\pi$，无理数为________________，有理数为________________.

【思路点拨】 判定一个数是否为有理数、无理数，首先应化简、计算，从结果上判定，不能看原型. 如 $\sqrt[3]{27}=3$，$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0=1$，而$\frac{22}{7}$显然是分数.

解 无理数为 $-\sqrt{5}$，$\sin 60°$，0.101 001 000 1…（每两个1依次多1个0），$\frac{1}{2}\pi$；有理数为 $\sqrt[3]{27}$，3.141 592 6，$\frac{22}{7}$，$0.\dot{3}1\dot{2}$，$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0$.

【例题2】 已知实数 a，b 在数轴上对应点的位置如图1-1所示，化简下式：$b-|a+b|-\sqrt{(b-a)^2}+|a|$.

【思路点拨】 观察图形，不难得出 $a<0<b$，且 $|a|>|b|$，从而得 $a+b<0$，$b-a>0$，故可运用 $\sqrt{x^2}=|x|$ 去掉根号及绝对值的符号，达到化简目的.

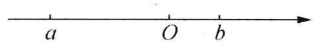

图1-1

解 观察数轴，得 $a<0<b$ 且 $|a|>|b|$，所以 $a+b<0$，$b-a>0$.

$$\begin{aligned}&b-|a+b|-\sqrt{(b-a)^2}+|a|\\=&b-|a+b|-|b-a|+|a|\\=&b-[-(a+b)]-(b-a)+(-a)\\=&b+a+b-b+a-a\\=&a+b.\end{aligned}$$

【评注】 数形结合是解题中常用的方法，应掌握好.

【例题3】 已知 m 与 n 互为相反数，a 与 b 互为倒数，x 的平方为4，y 的倒数等于它本身，求式子 $2\,008(m+n)+(2\,007^a)^b+y^x$ 的值.

【思路点拨】 m 与 n 互为相反数 $\Leftrightarrow m+n=0$；a 与 b 互为倒数 $\Leftrightarrow ab=1$；x 的平方为4，则 $x=2$ 或 $x=-2$；y 的倒数等于它本身，则 $y=\pm 1$.

解 由题意可得 $m+n=0$，$ab=1$，$x=\pm 2$，$y=\pm 1$.

当 $x=2$，$y=\pm 1$ 时，$y^x=(\pm 1)^2=1$.

当 $x=-2$，$y=\pm 1$ 时，$y^x=(\pm 1)^{-2}=\frac{1}{(\pm 1)^2}=1$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\,008\times 0+2\,007^{ab}+y^x\\&=0+2\,007^1+1\\&=2\,008.\end{aligned}$$

【评注】 本题运用了“整体代入”的解题方法，在今后的整式运算中“整体代入”是常用方法，应熟练掌握.

【例题 4】 观察下列各等式：$1\times3=1^2+2\times1$，$2\times4=2^2+2\times2$，$3\times5=3^2+2\times3$，…请你将猜想的规律用正整数 n 表示出来为________.

【思路点拨】 观察可发现，各等式左边是两个正整数的积，其中第二个因数比第一个大2，所以若设第一个因数为 n，则第二个就为 $n+2$；右边则为 n^2+2n，故猜想有 $n(n+2)=n^2+2n$（n 是正整数).

解 猜想规律为

$$n(n+2)=n^2+2n\ (n\text{ 是正整数}).$$

【评注】 对于规律性问题，对猜想必须进行验证，即分别取 $n=1, 2, 3, \cdots$，验证猜想是符合条件的.

【例题 5】 计算

$$(-0.125)^8\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-12}-(\sqrt{2}-1)^4\times(\sqrt{2}+1)^5+\sqrt{8}-\sqrt[3]{-8}\div|-2|-\left(2\,008-\frac{\pi}{3}\right)^0.$$

【思路点拨】 $\because (-0.125)^8=\left(\frac{1}{8}\right)^8=\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{-12}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-24}=2^{24}$，

$\therefore (-0.125)^8\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-12}=\left(\frac{1}{2}\right)^{24}\times2^{24}=\left(\frac{1}{2}\times2\right)^{24}=1.$

又 $(\sqrt{2}-1)^4\times(\sqrt{2}+1)^5=[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^4(\sqrt{2}+1)=1^4\times(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}+1$，

解 原式 $=\left(\frac{1}{2}\right)^{24}\times2^{24}-[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^4(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}+2\div2-1$

$$\begin{aligned}&=1-(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}+1-1\\&=1-\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

【评注】 应用实数的运算律，有时可简化运算，解题时要注意分析数的特征，寻求合理的计算方法，以提高计算的准确性和速度.

效果验收

一、填空题

1. 地球绕太阳每小时转动通过的路程约是 1.1×10^5 公里，用科学记数法表示地球一天（以24小时计）转动通过的路程约是________.

2. $\sqrt{81}$ 的平方根是________，64 的算术平方根是________，-27 的立方根是________.

3. 若 x 的相反数是 3，$|y|=5$，则 $x+y$ 的值是________.

4. 比较实数的大小：-3 ________ -2；$-3\frac{2}{3}$ ________ $-3\frac{3}{4}$；

$-3\sqrt{2}$ ________ $-2\sqrt{3}$（填“>”“=”“<”号）

5. 若 $(a-2)^2+\sqrt{b+3}+|c-5|=0$，则 $(a+b)^{-c}=$ ________.

6. 如图 1－2 所示，点 A，B 在数轴上对应的实数分别为 m，n，则 A，B 两点间的距离是________.（用含 m，n 的式子表示）.

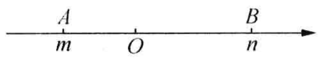

图 1－2

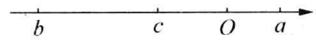

图 1－3

7. 在实数 π，$\frac{22}{7}$，$\sin 60°$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，0.101 001 000 1…（两 1 之间依次增加一个零）中，属于无理数的是________________.

8. 实数 a，b，c 在数轴上的对应点如图 1－3 所示，$|a+b|+|a-c|-\sqrt{c^2}=$________.

9. 计算：$-2^2+|-3|+8^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=$________.

10. 按一定规律排列的一列数依次为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{26}$，$\frac{1}{35}$，…. 按现规律排列下去，这列数中的第 7 个数是________.

二、选择题

11. 下列说法错误的是（　　）

(A) 0 没有倒数　　(B) $-(-1)$是-1 的相反数

(C) $\because a+b=0$，$\therefore |a|=|b|$　　(D) $\sqrt{(-1)^2}=\pm 1$

12. 用四舍五入法，求 1 206 000 的近似数，保留三个有效数字为（　　）

(A) 121　　(B) 1.20×10^6　　(C) 1.21×10^6　　(D) 121×10^4

13. 计算 $\dfrac{-2^2+(-\sqrt{3})^0+(-1)^{13}}{(-3)^2\times\left(-\frac{11}{9}\right)-(-7)}$ 的结果为（　　）

(A) 1　　(B) -1　　(C) 4　　(D) $-\frac{1}{4}$

14. 比较 2.5，-3，$\sqrt{7}$ 的大小，正确的是（　　）

(A) $-3<2.5<\sqrt{7}$　　(B) $2.5<-3<\sqrt{7}$

(C) $-3<\sqrt{7}<2.5$　　(D) $\sqrt{7}<2.5<-3$

三、解答题

15. 计算：(1) $-1^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)\times(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-\sqrt{(-5)^2}+(1-\sqrt{3})^0$.

(2) $-3^2+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}-\sqrt[3]{-27}+(-2)^3$.

(3) $\left(-\frac{1}{16}\right)^{-4}\times(0.125)^5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^7(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6+\frac{3}{\sqrt{3}}$.

16. 已知$A=\sqrt[m-n]{m+n+10}$是$m+n+10$的算术平方根，$B=\sqrt[m-2n+3]{4m+6n-1}$是$4m+6n-1$的立方根，求$B-A$的立方根.

17. 已知a与b互为相反数，且$3b^2-4a-3=3a(b+1)$，求a和b的值.

18. 设m、n为实数，且$m^2+n^2-2m+4n+5=0$，求$2m+3n$的值.

19. 已知$\triangle ABC$的三边a，b，c满足等式：$a^2+b+|\sqrt{c-1}-2|=6a+2\times\sqrt{b-3}-7$，试判断$\triangle ABC$的形状.

20. 某股民上星期六买进某公司股票1 000股，每股27元，下表为本周内每日该股票的涨跌情况(单位：元)：

星　期	一	二	三	四	五	六
每股涨跌	+4	+4.5	−1	−2.5	−6	+2

(1) 星期三收盘时，每股是多少元？

(2) 本周内最高价每股是多少元？最低价每股是多少元？

(3) 已知该股民买进股票时付了1.5‰的手续费，卖出时需付成交额1.5‰的手续费和1‰的交易税，该股民如果在星期六收盘前将全部股票卖出，他的收益情况如何？

参考答案与提示

一、填空题

1. 2.64×10^6公里. **2.** ±3，8，−3. **3.** 2或−8. **4.** <，>，<. **5.** −1. **6.** $n-m$. **7.** π，sin 60°，0.101 001 000 1…(两1之间依次增加一个零). **8.** $-b$. **9.** −1. **10.** $\frac{1}{50}$ 观察：当n为奇数时，可表示为

$\frac{1}{n^2+1}$,当 n 为偶数时,可表示为$\frac{1}{n^2-1}$.

二、选择题

11. D. **12.** C. **13.** A. **14.** A.

三、解答题

15. (1) -17. (2) -9.

(3) 原式$=\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{-4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^5-[(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^6(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{3}$

$=2^{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{15}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{3}$

$=2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$=2+\sqrt{2}$.

16. 由题意,得$\begin{cases}m-n=2,\\m-2n+3=3;\end{cases}$解得$\begin{cases}m=4,\\n=2.\end{cases}$

$\therefore A=\sqrt{4+2+10}=\sqrt{16}=4$. $B=\sqrt[3]{4\times4+6\times2-1}=\sqrt[3]{27}=3$.

$\therefore \sqrt[3]{B-A}=\sqrt[3]{3-4}=\sqrt[3]{-1}=-1$.

故 $B-A$ 的立方根为 -1.

17. $\because$ a 与 b 互为相反数. $\therefore a=-b$.

$\because 3b^2-4a-3=3a(b+1)$,

$\therefore 3b^2+4b-3=-3b^2-3b$. $\therefore 6b^2+7b-3=0$.

解方程,得 $b=\frac{1}{3}$ 或 $b=-\frac{3}{2}$.

当 $b=\frac{1}{3}$ 时,$a=-\frac{1}{3}$;当 $b=-\frac{3}{2}$ 时,$a=\frac{3}{2}$.

18. 因为 $m^2+n^2-2m+4n+5=0$. $\therefore m^2-2m+1+n^2+4n+4=0$.

$\therefore (m-1)^2+(n+2)^2=0$. $\therefore m=1$, $n=-2$.

$\therefore 2m+3n=2\times1+3\times(-2)=2-6=-4$. 故 $2m+3n$ 的值为 -4.

19. 由已知得:$a^2-6a+9+(\sqrt{b-3})^2-2\sqrt{b-3}+1+|\sqrt{c-1}-2|=0$.

即 $(a-3)^2+(\sqrt{b-3}-1)^2+|\sqrt{c-1}-2|=0$.

$\therefore a-3=0$, $\sqrt{b-3}-1=0$, $\sqrt{c-1}-2=0$.

$\therefore a=3$, $b=4$, $c=5$.

$\because a^2+b^2=3^2+4^2=25$, $c^2=25$, $\therefore a^2+b^2=c^2$.

所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

20. (1) $27+4+4.5-1=34.5$(元),故星期三收盘时,每股是 34.5 元.

(2) 从星期一到星期六,每日股价分别为 31 元,35.5 元,34.5 元,32 元,26 元,28 元.

故本周内最高价每股 35.5 元,最低价每股 26 元.

(3) $[(27+4+4.5-1-2.5-6+2)\times(1.5‰+1‰)]\times1\,000+27\times1\,000\times1.5‰$

$=28\times1\,000\times\frac{2.5}{1\,000}+27\times1\,000\times\frac{1.5}{1\,000}$

$=28\times2.5+27\times1.5$

$=70+40.5$

$=110.5$(元).

又 $(28-27)\times1\,000=1\,000$(元),

$1\,000-110.5=889.5$(元).

故他赚了 889.5 元.

第2讲　整式与分式

重点难点

一、代数式相关的概念

1. 代数式

用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子，叫做代数式，单独的一个数或一个字母也叫代数式，如 $3x+2$，$(a+b)^2$，$1-\frac{3}{x}$，$-2x$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，π 等都是代数式.

2. 代数式的值

用数值代替代数式中的字母，并按代数式指定的运算顺序计算得出的结果叫做代数式的值.

3. 整式

(1) 单项式

由数与字母的乘积组成的代数式叫做单项式，单独的一个数或一个字母也是单项式，如 $-3x^2y^3$，m，$-\pi$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 等都是单项式.

(2) 多项式

几个单项式的和叫做多项式，如 $-y+7$，$a^2-2ab-3b^2$ 等.

(3) 次数、系数、项

① 单项式的数字因数叫做单项式的系数，单项式中各字母的指数和叫做单项式的次数，如 $-\frac{3x^2y^3z}{4}$ 的系数是 $-\frac{3}{4}$，次数是 6，即 $2+3+1=6$.

② 多项式中，每个单项式叫做多项式的项，不含字母的项叫常数项，多项式中次数最高的项的次数叫做这个多项式的次数. 如 a^2-3b^3+1 的项是 a^2，$-3b^3$，1；1 为常数项，它是三次三项式.

(4) 排列

按某个字母的指数从大到小的顺序排列，叫做这个多项式按这个字母的降幂排列(若按某个字母从小到大的顺序排列叫按这个字母的升幂排列). 如 $-2x^2y+3xy^3-1$ 是按字母 x 的降幂排列，而 $-1-2x^2y+3xy^3$ 是按字母 y 的升幂排列.

单项式和多项式统称为整式.

4. 整式的运算

(1) 整式的加、减法

① 同类项

所含字母相同，且相同字母的指数也相同的项叫做同类项，所有的常数式都是同类项.

② 合并同类项的法则

把同类项的系数相加，所得的结果作系数，字母和字母的指数都不变.

③ 去(添)括号法则

$+(a+b-c)=a+b-c$；$-(a+b-c)=-a-b+c$.

整式的加减法实质是合并同类项(有括号的可先去括号).

(2) 整式的乘法

① 幂的运算

$a^m a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^n b^n$($a\neq 0$，$b\neq 0$，m、n 为整数).

$a^m\div a^n=a^{m-n}$($a\neq 0$，m、n 为整数，且 $m>n$).

② $a^0=1$ ($a\neq 0$)，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ($a\neq 0$，n 是正整数).

③ 单项式乘以单项式，把系数、同底数幂分别相乘，作为积的因式；只有一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.

④ 单项式乘以多项式，即根据分配律用单项式去乘以多项式的每一项，再把所得的积相加，如 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$.

⑤ 多项式乘以多项式，即先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加，如 $(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$.

(3) 整式的除法

① 单项式除以单项式，即把系数、同底数幂相除，作为商的因式；对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式. 如

$$\begin{aligned}(-6x^3y^2z^2)\div(2xy^2)&=(-6\div 2)(x^3\div x)(y^2\div y^2)z^2\\&=-3x^2y^0z^2\\&=-3x^2z^2\end{aligned}$$

② 多项式除以单项式，即把这个多项式的每一项除以这个单项式，然后把所得的商相加，如 $(-28x^3y^2-8x^2yz)\div(-4xy)=-28x^3y^2\div(-4xy)-8x^2yz\div(-4xy)=7x^2y+2xz$.

(4) 乘法公式

① 平方差公式

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差，即 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

② 完全平方公式

两数和(或差)的平方，等于它们的平方和加上(或减去)它们的乘积的 2 倍，即 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

③ 三个特殊公式

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab\ (a，b\ 为常数).$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2.$$

5. 因式分解

(1) 因式分解

把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种式子的变形叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

(2) 因式分解的基本方法

① 提取公因式

如果多项式的各项有公因式,可以把这个公因式提到括号外面,将多项式写成因式乘积的形式,即

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

② 运用公式法

用乘法公式反过来对某些多项式分解因式,如

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),\ a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2.$$

③ 十字相乘法

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)\text{(适用于二次三项式)}.$$

④ 分组分解法

利用分组来分解因式的方法,叫做分组分解法.

(a) 分组后直接提取公因式.

(b) 分组后能直接运用公式.

(c) $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$.

(3) 利用因式分解和整式乘法(互为逆变形),考查学生的逆向思维能力

解决的方法是根据恒等式的性质,把乘法运算的展开式与原式比较,对应项的系数相等(值得注意的是,因式分解是恒等变形).

(4) 因式分解的应用

① 使一些较复杂的计算简便;

② 求一些无法直接求解的代数式的值;

③ 判断多项式的整除性;

④ 与几何中的三角形三边关系结合起来解决一些综合性问题;

⑤ 给出一组数字或图形,观察后找出其规律,并用代数式表示出来.

二、分式

1. 分式

用 A, B 表示两个整式,$A\div B$ 就可以表示成$\dfrac{A}{B}$的形式,如果 B 中含有字母,式子$\dfrac{A}{B}$就叫做分式. 分式中字母取值必须使分母的值不为零,否则无意义.

2. 分式的基本性质

分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变. 该性质叫做分式的基本性质,用式子表示为 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{AM}{BM}$, $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div M}{B\div M}$(其中 M 是不等于零的整式).

3. 分式的符号法则

分式的分子、分母和分式本身的符号,改变其中任何两个,分式的值不变,即

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{b}.$$

4. 分式的运算

(1) 分式的加减法

① 同分母的分式相加减，分母不变，只需把分子相加减，即 $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$.

② 异分母的分式相加减，先通分(根据分式的基本性质，把异分母的分式化成与各自原来的分式相等的同分母的分式)，变为同分母的分式，然后相加减，即 $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

(2) 分式的乘除法

① 分式乘以分式　用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母.

② 分式除以分式　把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘，即

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\ \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

(3) 分式的混合运算

在分式的混合运算中，应先算乘方，再将除法化为乘法，进行约分化简，最后进行加减运算. 遇到有括号的，先算括号里面的. 注意：在运算中要正确运用运算法则，灵活运用运算律，运算结果必须是最简分式或整式(其方法为根据分式的基本性质，把分式的分子和分母的公因式约去，即约分).

5. 求最简公分母

求最简公分母的方法：(1)将各个分母分解因式；(2)找各分母系数的最小公倍数；(3)找出各分母中不同的因式，相同的因式中取次数最高的，满足(2)(3)的因式之积即为各分式的最简公分母(求最简公分母在分式的加减运算和解分式方程中起着非常重要的作用).

例题精讲

【例题 1】 填空题：

1. “a 与 b 的和的平方减去 a 与 b 的平方和的差”，列代数式是________________.

2. 图 2－1 是一个运算的流程图，若输入的数 $x=-45$，则输出的数 $y=$________.

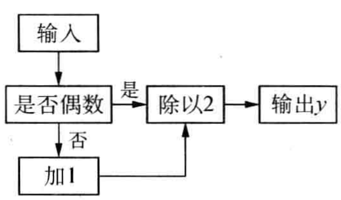

图 2－1

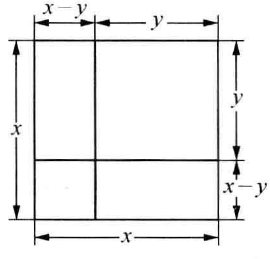

图 2－2

3. 若分式 $\frac{1-|x|}{x+1}$ 的值为 0，则 $x=$________；

若分式 $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ 有意义，则 x 的范围是________.

4. 请观察图 2－2，依据图形面积间的关系，不需要添加辅助线，可得到的熟悉的公式是____________.