高职高专

21世纪高等学校数学系列教材

（第三版）

高等数学（下册）

■ 主　编 孙旭东
■ 副主编 万　武 肖业胜

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高职高专

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

（第三版）

高等数学（下册）

■ 主　编　孙旭东

■ 副主编　万　武　肖业胜

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/孙旭东主编;万武,肖业胜副主编. —3版. —武汉:武汉大学出版社,2011.4
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-08667-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙… ②万… ③肖… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第065599号

责任编辑:李汉保　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:湖北省京山德兴印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:11　字数:233千字　插页:1
版次:2004年6月第1版　2006年7月第2版
2011年4月第3版　2011年4月第3版第1次印刷
ISBN 978-7-307-08667-8/O·449　定价:17.00元

21世纪高等学校数学系列教材

编　委　会

内容简介

本书是21世纪高等学校数学系列教材之一，全书遵循高等教育规律，突出高等职业教育的特点，注重对学生数学素养和应用能力的培养，体现数学建模思想。全书分为上、下两册共10章，内容包括：函数、极限与连续、导数的应用、一元函数的积分学、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数等。教材每章后附有历史的回顾与评述，主要介绍数学发展史与相关数学大师。

本书对于所涉及的若干定理、推论、命题等，既不追求详细的证明过程，又不失数学理论的严谨；注重将数学建模思想融入到教学中；结合数学软件，培养学生处理数据以及求解数学模型的能力。

与本书配套的辅助教材有《高等数学练习册》、《高等数学学习指导》。本书可以作为高职高专各类专业通用数学教材，也可以作为成人高校、网络教育及相关科技人员的高等数学自学教材。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版

社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作、力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

前　言

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。作为各门科学的重要基础，数学科学在许多重要的领域中已起到关键性甚至决定性的作用。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合华中科技大学、云南大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、福州大学、中国地质大学、孝感学院、武汉科技大学、华中师范大学、武汉工业职业技术学院、武汉工程职业技术学院、湖北轻工业职业技术学院等省内外20余所院校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本套教材根据国家教育部制定的高职高专教育高等数学课程基本要求，贯彻以"应用为目的，以够用为度"的原则编写而成，以"培养能力，强化应用"为出发点，满足专业对数学的基本要求并体现了高等职业教育的特点。着重培养以下四个方面的能力：一是用数学思维分析解决实际问题的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力；四是用数学知识解决所学专业上的一些问题的能力。本套教材具有以下特点：一是体现以必需、够用为度的原则，对于所涉及的若干定理、推论、命题等，既不追求详细的证明，又不失数学理论的严谨，适度淡化了难度较大的数学理论，加强了应用较强的数学方法；二是突出了能力培养，注重将数学建模思想融入到教学中，结合数学软件，培养处理数据以及求解数学模型的能力；三是突出数学知识与专业知识的衔接，增强针对性和实用性，提高学生学习数学的目的性；四是增强了可读性，提高学生学习数学的兴趣和积极性，教材每章后附有历史的回顾与评述材料；五是本套教材配有《高等数学学习指导》，对主教材的重点、难点逐一进行分析讲解，对典型例题进行归纳，着重理清解题的思路、方法和规律，以帮助学生正确地理解数学概念，提高学生的解题能力和数学素质，保持了主教材的体系并按主教材的章节编排，每章包括学习指导、典

型例题、同步训练、模拟试题和参考答案等。

本套教材包括《高等数学》上、下册共有10章和9个附录，每节后配有适量的习题，书后附有参考答案。打“*”号的内容供选学。本教材可以供高职高专各专业选用。

本套教材由孙旭东、肖业胜、万武担任主编。《高等数学》（上册）由肖业胜担任主编，孙旭东、万武担任副主编。《高等数学》（下册）由孙旭东担任主编；万武、肖业胜担任副主编。《高等数学学习指导》由万武担任主编；肖业胜、孙旭东担任副主编。为便于学生学习，本套教材还配有《高等数学练习册》。

本套教材得到武汉大学出版社、武汉工业职业技术学院、武汉工程职业技术学院、湖北轻工业职业技术学院等高等学校的大力支持，本套教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢！

由于作者水平所限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评建议，以便再版时修订，使本套教材日臻完善。

作　者

2010年3月

目　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

向量描述的是既有大小又有方向的量，空间解析几何研究的是空间中的点、线、面、体及其方程之间的关系.它们无论是在理论上，还是在工程技术实践中都有着重要的应用.本章主要研究空间直角坐标系、向量的概念及其运算、平面与直线、空间曲面与空间曲线等相关知识，为进一步研究多元函数微积分提供必要的基础.

§7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间点的直角坐标

过空间一定点 O，作三条互相垂直的直线 Ox、Oy、Oz，指定正向(其正向符合右手螺旋法则)并选定单位长度后，即在空间建立了直角坐标系 $Oxyz$. O 点称为坐标原点，Ox、Oy、Oz 称为坐标轴(分别称为 Ox 轴或横轴、Oy 轴或纵轴、Oz 轴或竖轴)，如图 7-1 所示.每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面. 三个坐标平面将空间分为八个部分，每个部分称为一个卦限，八个卦限的顺序如图 7-2 所示.

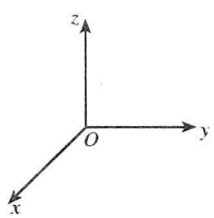

图 7-1

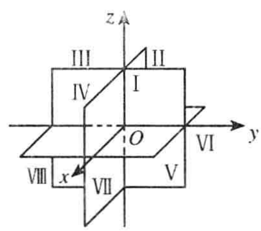

图 7-2

建立空间直角坐标系以后，空间内的一个点就可以用坐标来表示：设 M 是空间内一点，过 M 点作三个平面分别垂直于坐标轴，记它们与 Ox、Oy、Oz 轴的交点依次为 I、J、K 三点，如图 7-3 所示. 若 I、J、K 在对应坐标轴上的坐标分别为 x、y、z，则把 (x,y,z) 称为 M 点的直角坐标，记为 $M(x,y,z)$；x 称为横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖坐标.这样，空间内任意一点 M 都唯一地确定了一组有序实数 (x,y,z)；反之，任意给定一组有序实数 (x,y,z)，在空间也唯一地确定一点 M，其坐标是 (x,y,z).

由坐标的概念可以知道，原点的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别

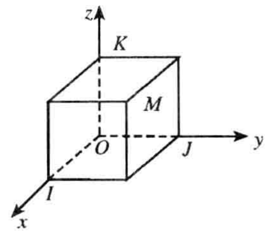

图 7-3

为$(x, 0, 0)$、$(0, y, 0)$、$(0, 0, z)$，坐标平面 xOy、yOz、xOz 上点的坐标依次为$(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

由平面解析几何中关于坐标轴的对称点的坐标和关于原点的对称点坐标的特征，可以列出在空间直角坐标系下，关于坐标轴、坐标平面、原点的对称点的坐标，留给读者去思考.

点所在卦限不同，其坐标值的正负也不同，各卦限中点的坐标，其正负如表 7-1 所示.

表 7-1

卦　限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

例 1. 已知点 $M(3, -1, 3)$，确定该点所在的卦限，并画出该点在空间的位置.

解　依据表 7-1 可知，该点在第 Ⅳ 卦限，如图 7-4 所示. 先在 xOy 平面画出横轴为 3，纵轴为 −1 的点 P，即 $P(3, -1, 0)$. 再由点 P 引垂线 PQ，在 PQ 上截取 PM 的长度为 3，所得点 $M(3, -1, 3)$ 即为所求.

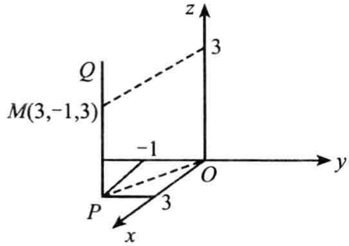

图 7-4

例 2. 写出点 $M(1,2,3)$ 关于原点、xOy 平面和 Ox 轴对称的点的坐标.

解　点 M 关于原点对称的点坐标为$(-1,-2,-3)$,关于 xOy 平面对称的点坐标为$(1,2,-3)$,关于 Ox 轴对称的点坐标为$(1,-2,-3)$.

7.1.2　空间两点间的距离

已知空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$,求该两点之间的距离 d.

如图 7-5 所示,$\triangle P_1AB$ 为直角三角形,所以由勾股定理,有

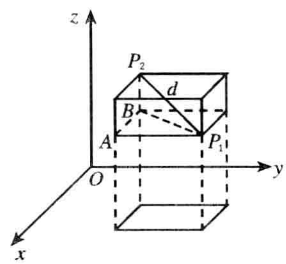

图 7-5

$$|P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2 \tag{7-1}$$

同理,在直角三角形 P_1P_2B 中,有

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{|P_1B|^2+|P_2B|^2} \tag{7-2}$$

将式(7-1)代入式(7-2),得

$$d=\sqrt{|P_1A|^2+|AB|^2+|P_2B|^2}$$

又因为

$$|P_1A|=|y_2-y_1|,\quad |AB|=|x_2-x_1|,\quad |P_2B|=|z_2-z_1|$$

从而得到 P_1、P_2 两点之间的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{7-3}$$

特别地,点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{7-4}$$

例 3. 求点 $M_1(0,1,-1)$、$M_2(2,3,-1)$ 之间的距离.

解　由两点间的距离公式(7-3),得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

例 4. 在 Oz 轴上求与两点 $A(-2,-1,3)$、$B(2,4,-2)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 Oz 轴上,故可以设该点为 $M(0,0,z)$,依题意有 $|AM|=|BM|$,即

$$\sqrt{(0+2)^2+(0+1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(0-4)^2+(z+2)^2}.$$

两边去根号，化简，得 $10z=-10$，$z=-1$，所以所求的点为 $M(0,0,-1)$.

习题 7-1

1. 试求点 $M(2,-3,-2)$ 关于各坐标平面的对称点的坐标，并指出这些点在哪一卦限.

2. 试求点 $P(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴之间的距离.

3. 证明以 $P_1(4,3,1)$、$P_2(7,1,2)$、$P_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

§7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的基本概念

在研究力学、物理学及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如力、位移、速度等. 这一类量称为向量.

在数学上，通常用一条有方向的线段、即有向线段来表示向量：有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 向量常记为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$. 起点为 A、终点为 B 的有向线段所表示的向量常记为$\overrightarrow{AB}$.

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小的数称为向量的模(或向量的长度)，记为$|\boldsymbol{a}|$. 模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的，零向量表示空间一点. 模等于1的向量称为单位向量. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示和向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，简称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量. 在空间直角坐标系中，如果以坐标原点为起点，向一个点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$，这个向量称为点 M 对于起点 O 的向径，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示. 于是，空间每一点 M，对应一个向径$\overrightarrow{OM}$；反之，每一个向径$\overrightarrow{OM}$对应着一个确定的点 M，如图 7-6 所示.

当两个向量的方向相同、模相等时，称它们为相等的向量，如图 7-7 中的 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 因此，任意一个向量经过平移后与原向量相等. 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，如图 7-7 中的 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$，记为 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}$.

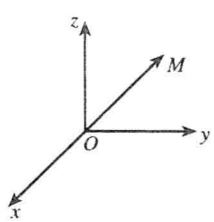

图 7-6

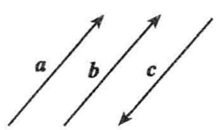

图 7-7

7.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加法与减法

(1) 向量的加法　两向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的和是以这两向量作相邻两边的平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}$(如图 7-8 所示),记为

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

或

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这一方法称为向量加法的平行四边形法则.

还可以这样作出两向量的和:作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,以$\overrightarrow{OA}$的终点 A 为起点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,连接 OC,就得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,如图 7-9 所示. 这一方法称为向量加法的三角形法则. 由

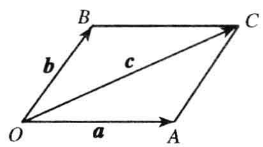

图 7-8

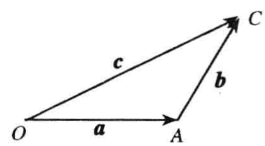

图 7-9

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC} \tag{7-5}$$

可以推广到更多向量相加的情形,即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD} \tag{7-6}$$

向量加法满足交换律、结合律. 如设有向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,即有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{7-7}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{7-8}$$

特别地,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(平行或在同一直线上),则规定它们的和是这样一个向量:当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 指向相同时,和向量的方向与原来向量方向相同,其模等于两向量的模的和;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的指向相反时,和向量的方向与模较大的向量的方向相同,而模等于较大向量的模减去较小向量的模.

(2) 向量的减法　由负向量的概念,规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \tag{7-9}$$

特别地

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \tag{7-10}$$

如图 7-10 所示,由三角形法则可以看出:要从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$,只要将与 $\boldsymbol{b}$ 长度相等而方向相反的向量 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去即可.

也可以用这样的方法作出两个向量的差. 将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 移到公共起点 O,设向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为 B,向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为 A,从 A 向 B 引向量$\overrightarrow{AB}$,即