皇朝經世文續編

皇朝經世文續編卷六目錄

學術六 文學二附算學

數學跋

顧觀光

上海葛士濬子源輯

學術六 文學二附算學

新譯幾何原本序 代曾文正公

張文虎

幾何原本前六卷明徐文定公受之西洋利瑪竇氏同時李涼庵彙入天學初函而圜容較義測量法義諸書其引幾何頗有出六卷外者學者因以不見全書爲憾咸豐閒海甯李壬叔始與西士偉烈亞力續譯其後九卷復爲之訂其舛誤此書遂爲完帙松江韓綠卿嘗刻之印行無幾而板燬於寇壬叔從余安慶軍中以是書眎予曰此算學家不可少之書失今不刻行復絕矣會余移駐金陵因屬壬叔取後九卷重校付刊繼思無前六卷則初學無由得其蹊徑而亂後書籍蕩泯天學初函世亦稀覯近時廣東海山仙館刻本紕繆實多不足貴重因并取六卷者屬校刊之蓋我中國算書以九章分目皆因事立名各爲一法學者泥其迹而求之往往畢生習算知其然而不知其所以然遂有苦其繁而視爲絕學者無他徒眩其法而不知求其理也傳曰物生而後有象象而後有滋滋而後有數然則數出於象觀其象而通其理然後立法以求其數則雖未覩前人已成之法搆而設之若合符契至於探賾索隱推廣古法之所未備則益遠而無窮也幾何原本不言法而言理括一切有形而概之曰點線面體點線面體者象也點相引而成線線相遇而成面面相疊而成體而線與線面與面體與體其形有相兼有相似其數有和有較有有等有無等有有比例有無比例洞悉乎點線面體而御之以加減乘除譬諸閉門造車出門而合轍也奚敝敝然逐物而求之哉然則九章可廢乎非也學者通乎聲音訓詁之端而後古書之奧衍者可讀也明乎點線面體之理而後數之繁難者可通也九章之法各適其

用幾何原本則徵乎九章立法之源而凡九章所未及者無不賅也致其知於此而驗其用於彼其如肄力小學而收效於羣籍者歟

象數一原序一　　項名達

方圜率古不相通也徑求周以勾股術算不易割圜弧矢率又甚疎西人八綫妙矣求八綫必資六宗三要二簡法非可徑求所以然者方有盡圜無窮勢難强合也自杜氏術出而方圜之率始通其術用連比例一率半徑二率通弦三率倍矢由是遞求諸率有徑即得周有弦矢即得弧有弧亦即得弦矣其算捷其數亦最眞顧是術也梅氏赤水遺珍載焉而未釋明靜庵先生捷法解釋焉而未抉其原當自爲一書非正釋也自董氏術出而方圜率相通之理始顯術凡四曰求倍分弦矢求析分弦矢審定乘除法以明率數倍分率圜所以通方也析分率方所以通圜也其釋倍分率以方錐堆而方錐堆實出於三角堆弦之二率即兩堆根相幷數四率即兩立積相幷數矢之三率即兩平積相幷數五率即兩三乘積相幷數四五率以下多乘積以還莫不如是故遞次乘除皆求堆積法也而即以之求弦矢弦之分有奇無偶矢之分奇偶俱全至析分率則三角堆無其數即假倍分之率較量而反釋之可爲獨具隻眼矣所疑者堆積旣與率數合何以有倍分無析分倍分中弦率又何以有奇分無偶分且弦矢綫聯於圜中於三角堆何與蓄是疑有年丁酉歸自茗南舟中偶念此恍然曰三角堆數起於一遞加一得堆根遞加根得平積遞加平積得立積蓋遞加數也弦矢率由圜中兩等邊三角挨次比例而生亦起於半徑之一半徑即一率遞加一率得二率遞加二率得三率遞加三率得四率亦遞加數也數有整必有零起整分者曰整數遞加祇一式即三角堆相連兩根積相幷與倍分矢率倍分中奇分弦率等數起零分者曰零數遞加有無量式不可以三角堆名依式推衍倍分中偶分弦率及析分弦矢率實

參列其間不惟若是倍分者一分弧之幾常以一爲分母析分者幾分弧之一常以一爲分子今得零分則分子母不必定一任設幾分弧之幾無不可求因立此弧求他弧兩術以補所未備又不惟若是分子母旣可任設則六十度通弦倍矢與半徑等諸率齊同取爲分母任設某度爲分子并諸率本數可省去不求但求遞加差數卽得逐度分秒之通弦倍矢亦卽得逐度分秒之正弦正矢因更立半徑求弦矢兩術以備製表之用似便於用弧約言之弦矢諸率其比例生於兩等邊三角其數本於遞加兩等邊三角尖象也遞加數尖數也通方圜必以尖故自來割圜術不離勾股而得其象未得其數取數不無繁重自有零整分遞加而後象與數會分於是定率亦於是通分卽遞加數之根率卽遞加數之積分以子母管乎外圜涵方也率以奇偶應乎內方就圜也割圜術至此始無餘蘊爰乘數月暇著爲圖說二卷友人王子琴逸嗜算術遍涉中西見是術愛之欲與杜董術合刊爲一冊囑余序其大意余因詳術所由不嫌辭費者亦以此通貫方圜之率非董氏理無自彰非杜氏法無自立非勾股割圜等法以爲之導亦無自察象稽數以底於至精然則古人創始之難其可忽哉

象數一原序二　　項名達

向玩弦矢諸率會得遞加數復析圜得兩等邊三角其象適與數會因草成圖解一冊聊自達意而疎脫甚多丙午冬謝去紫陽講席筆巢就閑漸編定整分半分起度兩種弦矢率而梁楚香中丞復以紫陽大小課藝囑選辭不獲遂又見阻楊緗芸農部在京見舊刻割圜捷術序中言及圖解亟思一見丁未冬來杭見訪因示以所編緗芸謂書未半而君年垂邁是書斷不可不成且不可緩成剋期以一載臨別尙諄切致囑余感其意爲之定書名曰象數一原卷一曰整分起度弦矢率論卷二曰半分起度弦矢率論卷三卷四曰零分起度弦矢率論卷五曰諸術通詮卷六曰諸術明變隨將卷三編定還課畢復阻於病今夏始將卷四著有六紙不料病

軀重感溼熱兼肝乘脾幾不可救醫治兩月無起色乃又重感燥火致臟腑無不病者遍體血脈不行醫盡束手自知殘燈微焰斷難久延而是書從此擱筆矣缺而不完世間事大都如是何必戀戀所歉者負細芸諄囑之心耳然書雖未完而零分各腰率零分遞加數卷三中已衍成其式惟義頤緒繁擬分條詳論於卷四業論至易率法之相當率寄分畢則論用率寄分論定率寄分皆宜分別奇偶論之而易率法畢次論衍遞加數法亦論寄分論子母論正負論奇行偶行積子母互異論直行併行積子母互異而遞加數畢次論遞加數即各形腰率而正負不同論心角形腰與腰較率正負相反論併積即弦矢率易正負有定法論矢率弦率子母至半之不同而弦矢率畢末乃依半分起度式分六術以明其算特彼論至半此論子母異同處略一分別可也至卷五卷六皆有舊稿且經編定只須照式錄之今將各卷總為一束設有本鄙意而續成者惟條論稍難六術則易於從事無續成者卷四作未完之書亦無不可

對數簡法跋　項名達

求對數舊法言之綦詳而數重積多初學恆未易了鄂士先生揭其精要而變通之著為對數簡法首論開方自淺入深而約以七術繼復立累除法省數十次開方用表已備極能事尤妙者捨開而求假設數夫對數折半眞數開方開至單一下空多位之零數於是眞數對數遂得其會通此開方所由重也顧必累開不已始得會通何如逕就會通處假一數以通之迨展轉相通而七十二對數之等差已備具於假設諸數中一比例而定準之數出矣以是知數之為用帶零求整難設整御零易憑所知課所求順推而入難借所求通所知逆轉而出易苟悟此可以得用數之方豈惟是對數一門有裨後學耶

對數簡法識　戴煦

對數以加減代乘除用之甚便而求之甚難舊法求諸對數皆先求自一至九遞至單一下九空位零一至九之九十九數而求之之法大略有三先定十百千萬之對數而其間之零數則用中比例累求而得以首率末率兩眞數相乘開方得中率之眞數以首率末率兩假數相加折半得中率之假數漸求漸近以至適合如舊法求九之假數用中比例求至二十六次而得八位之對數此一法也凡假數之首位因眞數之位數而遞加以眞數遞次自乘至多位而其位數卽假數首位以前之數然後以自乘第幾率除之卽得眞數第一率之假數如舊法求二之對數自乘至一千三百餘億率除自乘之位數四百十餘億位而得十二位之假數又一法也旣定十之對數爲一乃以眞數十開方五十四次三十三位以假數折半五十四次爲逐次假數列爲開方表乃以第五十四次眞假兩數比例得單一下十五空位零一之假數爲率於是以應求對數之眞數開方四五十次求得十五空位與爲比例然後以開方第幾次之率數乘之而得二十二位之假數或眞數開方二十餘次求得九空位與表內九空位開方數爲比例亦以率數乘之而得十三四位之假數如舊法求二與六之對數又一法也顧此數法布算極繁甚至經旬累月而不能竟求一數故言算者鮮不望之而生畏夫立法太繁則較算不易深慮寖久而失其眞也因復詳加探索始悟求十一二位之對數開方表祇須二十一次一十四位已屬敷用而旣有開方表則求諸對數可不必更開方較之舊法省算數倍且不特此也凡諸對數皆定於十之對數而實生於單一下五六空位零一之對數今欲以十之對數求單一下五六空位零一之對數勢不得不屢次開方若借一算爲單一下五六空位零一之對數轉求十之借數卽可得其比例之率知累除之法可代開方而用二十一次之開方表猶屬舍易求難然是術也立法殊簡用意非深西士若往訥白爾之徒旣能剏立對數慮無有不知此者意者彼時歐邏巴人故匿其易而衒其難以誇中土歟玆爲揭出俾求對數

者有取焉

續對數簡法

戴煦

前歲之秋予以對數簡法呈梅侶項先生翼日謂予曰遞求數可開平方亦可開諸乘方會得二術屬稿未定予歸而思之亦得二術以呈先生而先生亦以定稿見示其逐數皆正一術與予正負相閒者不同其第一數正而以下皆負一術則若合符節焉於是開諸乘方遂有三術予思既有三術必更有一術因補衍之將呈先生而先生適以補衍一術見示又若合符節焉惟先生以乘數加一爲廉率謂諸乘方第一廉與末一廉之數也而予以連比例率推之復一一脗合因以其法用代累乘求積亦無不可通乃知廉率本生於連比例率也夫對數開平方多次以開方舊法至十二乘已屬繁重斷難開至億兆乘故以平方代開耳今開諸乘方既通爲一法可不必代開由是因繁得簡復推得開極多位九乘方之法而對數之簡法出矣蓋前術用假設對數乃立天元一術卽西人之借根方但天元一可乘而不受除常寄除法爲母今須累除數百次則寄母極繁不可算不得不徑用除法既用除法則數百次之畸零累積其差甚大故難求至多位不如連比例遞求數之所造極微也至對數還原卽代累乘求積之法而變通之因亦類埘焉

對數生於連比例率如設一數爲本數第一率命爲方根則其自乘之積爲倍大第二率再自乘之積爲倍大第三率三自乘之積爲倍大第四率故以本數之對數二乘之卽自乘積之對數三乘之卽再乘積之對數四乘之卽三乘積之對數若反言之則設一數爲本數第一率命爲方積而其開平方之根爲折小第二率開立方之根爲折小第三率三乘方之根爲折小第四率故以本數之對數二除之卽平方根之對數三除之卽立方根之對數四除之卽三乘方根之對數推之多乘其倍大折小之率莫不皆然然倍大各率與連比例率相

應而折小各率不相應者（謂二率平方積自乘一率方根除之得三率立方積二三率平方立方二積相乘一率方根除之得四率三乘方積推之各率皆然折小各率則不然）蓋倍大之率率數也故求對數用乘法折小之率率分也故求對數用除法倍大不僅率數亦有率分如以二率之二除一率之一得〇五即倍大第二率之率分以三率之三除一率之一得〇三三三三零即倍大第三率之率分折小不僅率分亦有率數如〇五即折小第二率之率數〇三三三三零即折小第三率之率數其倍大折小同率之率分率數以兩兩反對共母率之率分率數恊與第一率之一爲三率連比例而必以一爲中率故以率分除之或以率數乘之得數必同且不特此也率有整亦有零整率者如倍大折小一二三四等率非率分爲整數即率數爲整數零率者如有一數較本數開平方根則不足較本數開立方根則有餘其率分必爲二而下帶畸零小餘或較本數自乘積則有餘較本數再乘積則不足其率數亦必爲二而下帶畸零小餘而以此種帶畸零之率分或率數爲首率一爲中率求其末率必仍帶畸零是此種倍大折小之率分率數皆帶畸零而成零率矣若今所用之對數正眞數之率數也（非率分）而其本數第一率爲一〇故一〇之對數爲一即一率之一而一〇〇爲本數倍大第二率其對數亦爲二一〇〇〇爲本數倍大第三率其對數亦爲三若一以上一〇以下（自二至九）則不滿一率故對數首位爲〇而下帶畸零一〇以上一〇〇以下（自十一至九十九）則不滿二率故對數首位爲一而下帶畸零此即所謂零率也知對數之爲連比例率數而求對數之法可得而言矣

倍大率

率數		率分
一〇〇〇	一率 方根	一〇〇〇
二〇〇〇	二率 平方積	〇五〇〇
三〇〇〇	三率 立方積	〇三三三
柳 四〇〇〇	四率 三乘方積	〇二五〇
五〇〇〇	五率 四乘方積	〇二〇〇
六〇〇〇	六率 五乘方積	〇一六六
七〇〇〇	七率 六乘方積	〇一四二
八〇〇〇	八率 七乘方積	〇一二五
九〇〇〇	九率 八乘方積	〇一一一
十〇〇〇	十率 九乘方積	〇一〇〇

折小率

率數	一率方積	率分
一〇〇〇	二率平方根	一〇〇〇
〇五〇〇	三率立方根	二〇〇〇
〇三三三	四率三乘方根	三〇〇〇
〇二五〇	五率四乘方根	四〇〇〇
〇二〇〇	六率五乘方根	五〇〇〇
〇一六六	七率六乘方根	六〇〇〇
〇一四二	八率七乘方根	七〇〇〇
〇一二五	九率八乘方根	八〇〇〇
〇一一一	十率九乘方根	九〇〇〇
〇一〇〇		十〇〇〇

以本數爲積求折小各率

第一術

法檢本率乘數之開方初商表取其較小於本數者以其根爲第一數正　次以本數爲除法以初商實減本數其減餘數爲乘法其所求第幾率名爲率分乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數正　以乘法乘第二數除法除之又以率分加一乘之二因率分除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之二因率分加一乘之三因率分除之爲第四數正　乘法乘第四數除法除之三因率分加一乘之四因率分除之爲第五數正　如是遞求至應求位數乃并諸正數得所求

按此術項氏所定

第二術

法檢本率乘數之開方初商表取其較小於本數者以其根爲第一數正　次以初商實爲除法以初商實減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數正　乘法乘第二數除法除之又以率分減一乘之二因率分除之爲第三數負　乘法乘第三數除法除之二因率分減一乘之三因率分除之爲第四數正　乘法乘第四數除法除之三因率分減一乘之四因率分除之爲第五數負　如是遞求至應求位數乃并諸正數并又諸負數減之得所求

按此術予所定

第三術

法檢本率乘數之開方初商表取其較大於本數者以其根爲第一數正　次以初商實爲除法初商實內減

本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數負　乘法乘第二數除法除之又以率分減一乘之二因率分除之爲第三數負　乘法乘第三數除法除之二因率分減一乘之三因率分除之爲第四數負　乘法乘第四數除法除之三因率分減一乘之四因率分除之爲第五數負　如是遞求至應求位數乃幷諸負數減第一正數得所求

按前開平方七術卽此法

第四術

法檢本率乘數之開方初商表取其較大於本數者以其根爲第一數正　次以本數爲除法初商實內減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率分除之爲第二數負　乘法乘第二數除法除之又以率分加一乘之二因率分除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之二因率分加一乘之三因率分除之爲第四數負　乘法乘第四數除法除之三因率分加一乘之四因率分除之爲第五數正　如是遞求至應求位數乃幷諸正數又幷諸負數減之得所求

按前二術予所定與項氏所定暗合

以本數爲根求倍大各率

第一術

法任截本數幾位依本率乘數取其乘之爲第一數正　次以本數爲除法本數內減截去數爲乘法其所求第幾率名爲率數乃以乘法乘第一數除法除之又以率數乘之爲第二數正　乘法乘第二數除法除之又以率數加一乘之二除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之率數加二乘之三除之爲第四數正　乘法

乘第四數除法除之率數加二三乘之四除之爲第五數正　如是遞求至單位下乃并諸正數得所求

第二術

法任截本數幾位依本率乘數累乘之爲第一數正　次以截去數爲除法本數內減截去數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率數乘之爲第二數正　乘法乘第二數除法除之率數減一乘之二除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之率數減二乘之三除之爲第四數正　乘法乘第四數除法除之率數減三乘之四除之爲第五數正　如是遞求至率數減盡而止乃并諸正數得所求

第三術

法任截本數幾位於末位加一依本率乘數累乘之爲第一數正　次以截去數加一爲除法截去數加一內減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率數乘之爲第二數負　乘法乘第二數除法除之率數減一乘之二除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之率數減二乘之三除之爲第四數負　乘法乘第四數除法除之率數減三乘之四除之爲第五數正　如是遞求至率數減盡而止乃并諸正數又并諸負數減之得所求

第四術

法任截本數幾位依前術加一依本率乘數累乘之爲第一數正　次之本數爲除法截去數加一內減本數其減餘數爲乘法乃以乘法乘第一數除法除之又以率數乘之爲第二數負　乘法乘第二數除法除之率數加一乘之二除之爲第三數正　乘法乘第三數除法除之率數加二乘之三除之爲第四數負　乘法乘第四數除法除之率數加三乘之四除之爲第五數正　如是遞求至單位下乃并諸正數又并諸負數減之

得所求

按有本數求倍大折小各率本適爲一法非有二義其第一數倍大用率數乘者緣率分率數與單一爲三率連比例率分爲首率則單一爲中率率數爲末率故以率分除之之數即同於率數乘之之數而折小各率率分整而率數零故用率分爲便倍大各率率數整而率分零故用率數爲便也其第三數以率數加減一乘之二除之者緣連比例首率與中率之比同於中率與末率之比前四術首率內加減中率乘之倍首率除之後四術中率內加減末率乘之倍中率除之其得數必同也以下各數義倣此其第二三術與前第二三術正負各異者緣乘法雖云率數內減一實一內減率數其減餘爲負算故乘爲負乘既爲負乘則乘後之正負必變故能變逐數皆負者爲正負相間變正負相間者爲逐數皆正也其率數減盡而止者凡算例以適足爲實任以正數負數乘除之必仍爲適足或正負數爲實以適足數乘除之亦爲適足故率數減盡則以下無數也

又按前四術可爲開方捷法後四術所求止須以本數累乘即得而挨次遞求似乎較煩然開方與累乘但能求倍大折小各整率若前八術則凡第一數可知者雖零率亦可求用之對數爲尤要也又按每數通用之乘法除法若先以除法除乘法用爲遞次乘法則一次乘可代一乘一除若先以乘法除除法用爲遞次除法則一次除可代一乘一除

論對數根

對數根者諸對數之所生即單一下無數空位零一之對數也舊法以一〇爲積開方五十四次以其方根單一下空位後所帶之零數爲一率單一折半五十四次即一兆八千餘億除單一之數爲二率單一下十五空位零一之一爲

三率求得四率爲對數根夫以一〇爲積開方五十四次即以一〇爲本數第一率求折小第一兆八千零一十四萬三千九百八十五億零九百八十四萬一千九百八十四率也今有本數即可求折小各率則是第五十四次開方數可以徑求矣既可徑求則求第一兆八千餘億率不如求第一無量數率一無量數猶云一千或一萬何也蓋一兆八千餘億率爲第五十四次開方數之率分其位數甚多用連比例求得率數亦有多位即第五十四次開方數之對數而布算甚繁一無量數雖極大而仍爲一不過一下有無數空位耳以爲首率用連比例求末率必爲單位下無數空位零一此即求對數根四率之二率數既爲一可省多位乘法一次且一無量數較一兆有零爲尤密也

今定一〇之對數爲單一求對數根

法先以一〇開平方五次或開平方三次三乘方一次或平方一次三乘方二次皆可但取其降位易而已得折小第三十二率一〇七四六〇七八二八三二一三一七四九七爲對數根之用數用數見後第三十二率以前各率爲用數則降位術雖若三十二率以後皆可爲用數不必定用三十二率也置用數減去首位單一以除用數得一四四〇三四一九二一一八八六八六五三九爲遞次除法用數爲通用除法用數減首位爲通用乘法此即前所云以乘法除除法爲遞次除法則一次除可代一乘一除也乃以除法除單一以折小率三十二乘之得二三一一六九四六九〇二一四九六三二一六六爲第一數正　除法除第一數一乘之二除之得七七一二三八六四〇一〇六七八三〇爲第二數正　除法除第二數二乘之三除之得三五六九七〇一六四九二五一二二一爲第三數正　除法除第三數三乘之四除之得一八五八七七八二一四九九八〇五爲第四數正　除法除第四數四乘之五除之得一〇三二四〇九四四二〇八三爲第五數正　如是遞求得五九七三一七三三七四一爲第六數正　三五五四六一六三一三爲第七數正　二一五九四一〇四六爲第八數正　一三三三一六五三〇爲第