应用型本科院校规划教材/工科数学学习指导丛书

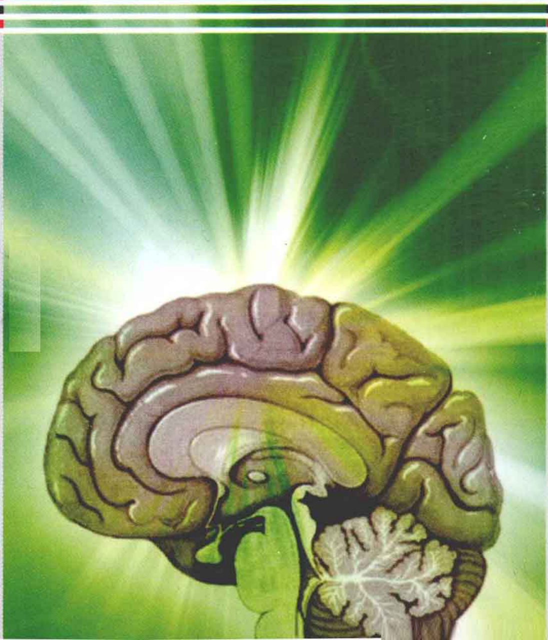
孔繁亮　主编

高等数学学习指导

下册

A Guide to the Study of Higher Mathematics

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业



哈爾濱工業大學出版社

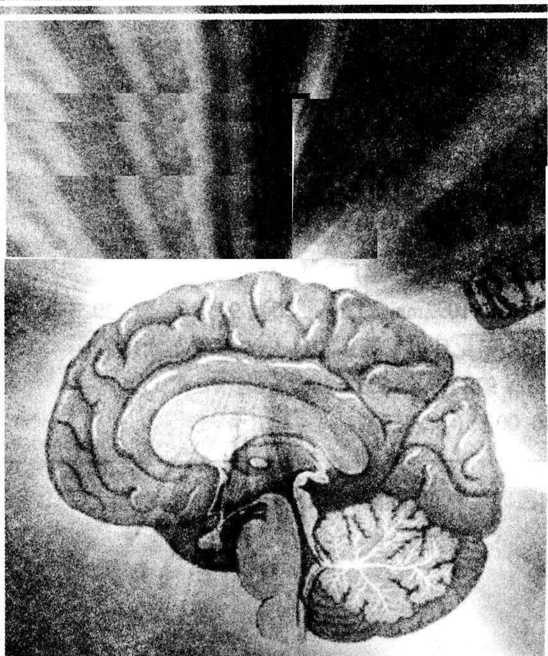
应用型本科院校规划教材/工科数学学习指导丛书

主　编　孔繁亮
副主编　王　萍　宋迎春　于莉琦

高等数学学习指导

下册

A Guide to the Study of Higher Mathematics



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书是应用型本科院校规划教材的学习指导丛书。该书与孔繁亮教授主编的《高等数学(下)》教材相配套。内容包括:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等。每章都包含以下五方面的内容:内容提要、典型题精解、同步题解析、验收测试题、验收测试题答案。在最后附有总复习题及六套考试模拟题,并附有答案。叙述详尽,通俗易懂。

本书可供应用型本科院校相关专业学生使用,也可作为教师与工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 下册/孔繁亮主编. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2011.6
(工科数学学习指导丛书)
应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-5603-2867-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孔… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 234809 号

策划编辑 赵文斌 杜 燕
责任编辑 尹 凡
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 东北林业大学印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 9.5 字数 220 千字
版 次 2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2867-6
定 价 80.00 元(共四册)

序

哈尔滨工业大学出版社策划的“应用型本科院校规划教材”即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的“应用型本科院校规划教材”，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

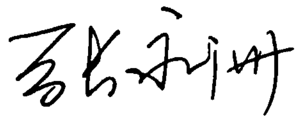
本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用

讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

“应用型本科院校规划教材”的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

黑龙江省教育厅厅长



2010 年元月于哈尔滨

前　　言

为了加强学生的自学能力、分析问题与解决问题能力的培养,加强对学生的课外学习指导,我们编写了这套工科数学学习指导丛书。这套学习指导丛书是与应用型本科院校数学系列教材相匹配的。

本书是与孔繁亮教授主编的《高等数学(下)》教材相配套的学习指导书。内容包括:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等。每章包含了以下五方面的内容:内容提要、典型题精解、同步题解析、验收测试题、验收测试题答案。在最后附有总复习题及六套考试模拟题,并附有答案。叙述详尽,通俗易懂。

本书由孔繁亮教授任主编,王萍、宋迎春、于莉琦任副主编,顾贞参编。在编写过程中参阅了我们以往教学过程中积累的资料以及兄弟院校的相关资料,在此一并表示感谢。

建议读者在使用本书时,不要急于参阅书后的答案,首先要独立思考,多做习题,尤其是多做基础性和综合性习题,这对于掌握教材的理论与方法有着不可替代的作用。希望本书能在你解题山穷水尽疑无路之时,将你带到柳暗花明又一村的境界,辅助你不断地提高自学能力及分析问题与解决问题的能力。

由于时间仓促,水平有限,书中难免存在一些不当之处,敬请广大读者不吝指教。

编　者

2011 年 5 月

目　录

第 6 章

向量代数与空间解析几何

6.1 内容提要

1. 向量代数

(1) 空间直角坐标系　右手系、原点、三条坐标轴、三个坐标面、八个卦限. 空间中的点 $M(x,y,z)$，两点间距离 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

(2) 向量的概念　向量又名矢量，是指既有大小，又有方向的量，记为 $\boldsymbol{a}$，大小称为向量的模，记为 $|\boldsymbol{a}|$. 还有一些其他基本概念：自由向量，单位向量，零向量，负向量，相等向量，平行向量，共线向量，基本单位向量，向径，方向角，方向余弦等.

向量的坐标分解式 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}$.

方向余弦 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)$.

(3) 向量的线性运算

加减法 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$：用平行四边形（或三角形）法则计算，向量的加减法有交换律与结合律；

数量乘法运算 $\lambda\boldsymbol{a}$：$\lambda>0$（或 <0）时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同（异）向，$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0$. 数量乘法有结合律与分配律.

(4) 坐标下向量的线性运算

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_k\pm b_k)\boldsymbol{k}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_k\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\{b_x,b_y,b_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}(\boldsymbol{a}\neq 0)$$

(5) 向量的投影　向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 及数轴 u，过点 A 与 B 向数轴 u 作垂线，设垂足分别为 A',B'，这两个点在数轴 u 上的坐标分别为 u_A 与 u_B，称 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=u_B-u_A$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴 u 上的投影.

投影的性质：① $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$,

$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}-\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$;

② 设 λ 是数量，则 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

2. 数量积与向量积

(1) 数量积(设 $\mathrm{Prj}_a \boldsymbol{b} \neq 0, \mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a} \neq 0$)

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot (\mu \boldsymbol{b}) = \lambda\mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

(2) 向量积

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,$\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,其指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 确定.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}), \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

3. 空间平面与直线

(1) 平面方程的三种形式

点法式:$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

一般式:$Ax + By + Cz + D = 0$;

截距式:$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;

两平面的夹角:$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;

$\Pi_1 \perp \Pi_2$ 的充分必要条件为 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;

$\Pi_1 /\!/ \Pi_2$ 的充分必要条件为$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

点到平面的距离:$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

(2) 直线方程的三种形式

对称式:$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$;

参数式:$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$;

一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$；

两直线的夹角：$\cos\varphi=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$；

$L_1\perp L_2$ 的充分必要条件是 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

$L_1\parallel L_2$ 的充分必要条件是 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

直线与平面的夹角：$\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$；

直线 L 与平面 Π 垂直的充分必要条件是：$\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$；

直线 L 与平面 Π 平行的充分必要条件是：$Am+Bn+Cp=0$.

4. 空间曲面与曲线

(1) 曲面的概念

二次曲面的概念：$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2yz+b_3zx+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$ 所确定的曲面称为二次曲面；

旋转曲面：一平面曲线 C 绕着它所在平面的一条直线 L 旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面(简称旋转面)，其中曲线 C 称为旋转曲面的母线，直线 L 称为旋转曲面的旋转轴.

常见的旋转曲面有圆锥面、旋转单叶双曲面、旋转双叶双曲面等.

母线平行于坐标轴的柱面：平行于定直线 L 并沿定曲线 C 移动的直线 l 所生成的曲面称为柱面. 动直线 l 在移动中的每一个位置称为柱面的母线，曲线 C 称为柱面的准线.

常见的柱面有圆柱面、椭圆柱面、抛物柱面、双曲柱面等.

常见的二次曲面还有椭球面、椭圆抛物面、椭圆锥面、单叶双曲面、双叶双曲面等.

(2) 空间曲线的一般式方程：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$；

空间曲线的参数方程：$C:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\quad(a\leqslant t\leqslant b)$.

(3) 空间曲线在坐标面上的投影：

$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\overset{\text{消去法}}{\Rightarrow}H(x,y)=0$ 得投影曲线 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$.

6.2　典型题精解

例 6.2.1　设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解　因为 P 在 x 轴上，设 P 点坐标为 $(x,0,0)$，则

$|PP_1| = \sqrt{(-x)^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11}$，$|PP_2| = \sqrt{(-x)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{x^2 + 2}$

因为
$$|PP_1| = 2|PP_2|$$
所以$\sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow x = \pm 1$，所求点为$(1,0,0)$，$(-1,0,0)$.

例 6.2.2 设$\boldsymbol{m} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$，求$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$在$y$轴上的分向量.

解 因为
$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} = 4(3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) + 3(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) - (5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) = 13\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$$
所以在y轴上的分向量为$7\boldsymbol{j}$.

例 6.2.3 已知两点$A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$，求与向量$\overrightarrow{AB}$平行的向量的单位向量$\boldsymbol{c}$.

解 所求向量有两个，一个与$\overrightarrow{AB}$同向，一个与$\overrightarrow{AB}$反向.

因为$\overrightarrow{AB} = \{7-4, 1-0, 3-5\} = \{3, 1, -2\}$，所以$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$，

故所求向量为$\boldsymbol{c} = \pm \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{14}}\{3, 1, -2\}$.

例 6.2.4 设点A位于第Ⅰ卦限，向径$\overrightarrow{OA}$与x轴，y轴的夹角依次为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$，且$|\overrightarrow{OA}| = 6$，求点$A$的坐标.

解 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$. 由关系式$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，得
$$\cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
由A在第Ⅰ卦限，知$\cos\gamma > 0$，故$\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$.

于是$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{OA}} = 6\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right\} = \{3, 3\sqrt{2}, 3\}$，点$A$的坐标为$(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

例 6.2.5 已知$\boldsymbol{a} = \{1, 1, -4\}$，$\boldsymbol{b} = \{1, -2, 2\}$，求(1)$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$；(3)$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影.

解 (1)$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = -9$.

(2)$\cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

(3)$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \operatorname{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，所以$\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = -3$.

例 6.2.6 设$\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$垂直，$\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$垂直，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的夹角$\theta$.

解 因$(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \perp (7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b})$，所以$(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \cdot (7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}) = 0$，即
$$7|\boldsymbol{a}|^2 - 15|\boldsymbol{b}|^2 + 16\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{1}$$
又$\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} \perp 7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}) \cdot (7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) = 0$，即
$$7|\boldsymbol{a}|^2 + 8|\boldsymbol{b}|^2 - 30\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{2}$$
联立方程(1)，(2)得

$$|a|^2=|b|^2=2a\cdot b$$

所以　$\cos<\hat{a,b}>=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{1}{2}$, $<\hat{a,b}>=\dfrac{\pi}{3}$.

例 6.2.7　求与 $a=3i-2j+4k, b=i+j-2k$ 都垂直的单位向量.

解　$c=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=10j+5k$

因为 $|c|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$, 所以 $c^{\circ}=\pm\dfrac{c}{|c|}=\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}j+\dfrac{1}{\sqrt{5}}k\right)$.

例 6.2.8　已知 $a=i, b=j-2k, c=2i-2j+k$, 求一单位向量 γ, 使 $\gamma\perp c$, 且 γ 与 a, b 共面.

解　设所求向量 $\gamma=\{x,y,z\}$. 依题意 $|\gamma|=1, \gamma\perp c, \gamma$ 与 a, b 共面, 可得

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{1}$$

$$\gamma\cdot c=0, \text{即 } 2x-2y+z=0 \tag{2}$$

$$(a\times b)\cdot\gamma=0, \text{即}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2y+z=0 \tag{3}$$

将式(1), 式(2) 与式(3) 联立解得 $x=\dfrac{2}{3}$ 或 $-\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$ 或 $-\dfrac{1}{3}$, $z=-\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{2}{3}$, 所以

$\gamma=\pm\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right\}$

例 6.2.9　求过点 $A(2,-1,4)$, $B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.

解　$\overrightarrow{AB}=\{-3,4,-6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,3,-1\}$, 取

$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14i+9j-k$$

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$, 化简得 $14x+9y-z-15=0$.

例 6.2.10　设平面过原点及点 $(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 求此平面方程.

解　设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$, 由平面过原点知 $D=0$, 由平面过点 $(6,-3,2)$ 知 $6A-3B+2C=0$.

因为 $\{A,B,C\}\perp\{4,-1,2\}$, 所以 $4A-B+2C=0\Rightarrow A=B=-\dfrac{2}{3}C$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

例 6.2.11　求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解　设平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, 因为 $V=1$, 所以 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}abc=1$.

由所求平面与已知平面平行得$\frac{\frac{1}{a}}{6}=\frac{\frac{1}{b}}{1}=\frac{\frac{1}{c}}{6}$,令$\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t\Rightarrow a=\frac{1}{6t},b=\frac{1}{t},c=\frac{1}{6t}$.

由$1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\Rightarrow t=\frac{1}{6}$. 所以$a=1,b=6,c=1$.

所求平面方程为$\frac{x}{1}+\frac{y}{6}+\frac{z}{1}=1$, 即$6x+y+6z=6$.

例 6.2.12 研究以下各组中两平面的位置关系:

(1)$\Pi_1:-x+2y-z+1=0,\Pi_2:y+3z-1=0$;

(2)$\Pi_1:2x-y+z-1=0,\Pi_2:-4x+2y-2z-1=0$.

解 (1)$\boldsymbol{n}_1=\{-1,2,-1\},\boldsymbol{n}_2=\{0,1,3\}$,且

$$\cos\theta=\frac{|-1\times0+2\times1-1\times3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{60}}$$

故两平面相交,夹角为$\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$.

(2)$\boldsymbol{n}_1=\{2,-1,1\},\boldsymbol{n}_2=\{-4,2,-2\}$,且$\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$,又$M(1,1,0)\in\Pi_1,M(1,1,0)\notin\Pi_2$,故两平面平行但不重合.

例 6.2.13 求平行于平面$\Pi_0:x+2y+3z+4=0$,且与球面$\Sigma:x^2+y^2+z^2=9$相切的平面Π的方程.

解 可利用条件$\Pi/\!/\Pi_0$,写出平面Π的一般式方程,再利用球心到平面的距离$d=3$来确定一般式方程中的特定系数.

由$\Pi/\!/\Pi_0$,可设平面Π的方程为$x+2y+3z+D=0$.

因为平面Π与球面Σ相切,故球心$(0,0,0)$到平面Π的距离为

$$d=\left.\frac{|x+2y+2z+D|}{\sqrt{1+2^2+3^2}}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}=3$$

得$|D|=3\sqrt{14}$,故所求平面Π的方程为

$$x+2y+3z+3\sqrt{14}=0\text{或}x+2y+3z-3\sqrt{14}=0$$

例 6.2.14 求过点$(-3,2,5)$且与两个平面$2x-y-5z=1$和$x-4z=3$的交线平行的直线的方程.

解 先求过点$(-3,2,5)$且与已知平面平行的平面

$$\Pi_1:2(x+3)-(y-2)-5(z-5)=0,\quad\Pi_2:(x+3)-4(z-5)=0$$

即

$$\Pi_1:2x-y-5z+33=0,\quad\Pi_2:x-4z+23=0$$

所求直线的一般方程为

$$\begin{cases}2x-y-5z+33=0\\x-4z+23=0\end{cases}$$

例 6.2.15 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$.

解　在直线上任取一点(x_0,y_0,z_0)，例如取

$$x_0=1\Rightarrow\begin{cases}y_0+z_0+2=0\\ y_0-3z_0-6=0\end{cases}\Rightarrow y_0=0,z_0=-2$$

得点坐标$(1,0,-2)$，因所求直线与两平面的法向量都垂直，可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=\{4,-1,-3\}$$

对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{-3}$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}$$

例 6.2.16　求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解　先作一过点 M 且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点 N，令

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=t\Rightarrow\begin{cases}x=3t-1\\ y=2t+1\\ z=-t\end{cases}$$

代入平面方程得 $t=\dfrac{3}{7}$，交点 $N\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$，取所求直线的方向向量为$\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\left\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right\}=\left\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\right\}$$

所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

例 6.2.17　设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi:x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角 φ.

解　$\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$，$\boldsymbol{s}=\{2,-1,2\}$

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}$$

所以所求夹角为

$$\varphi=\arcsin\frac{7}{3\sqrt{6}}$$

例 6.2.18 在一切过直线 $L:\begin{cases}x+y+z+4=0\\x+2y+z=0\end{cases}$ 的平面中找出平面 Π，使原点到它的距离最长.

解 设通过直线 L 的平面束方程为 $(x+y+z+4)+\lambda(x+2y+z)=0$，即

$$(1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+(1+\lambda)z+4=0$$

要使 $d^2(\lambda)=\dfrac{16}{(1+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2+(1+\lambda)^2}$ 为最大，即使 $(1+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2+(1+\lambda)^2=6\left(\lambda+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}$ 为最小，得 $\lambda=-\dfrac{2}{3}$，故所求平面 Π 的方程为

$$x-y+z+12=0$$

易知原点到平面 $x+2y+z=0$ 的距离为 0，故平面 $x+2y+z=0$ 非所求平面.

例 6.2.19 求与原点 O 及 $M_0(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的所有的点组成的曲面方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是曲面上任一点，根据题意有

$$\frac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{M_0M}|}=\frac{1}{2}$$

即

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2}$$

所求方程为

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}$$

例 6.2.20 方程组 $\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\\\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}\end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 表示上半球面，$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ 表示圆柱面，球面与柱面的交线如图 6.1 中曲线 C，

$$C:\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\\\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}\end{cases}$$

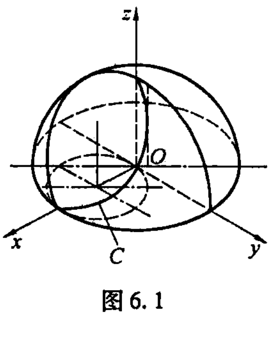


图 6.1

例 6.2.21 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\z=1/2\end{cases}$ 在坐标面上的投影方程.

解 (1) 消去变量 z 后得 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$，在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

(2) 因为曲线在平面 $z = \dfrac{1}{2}$ 上,所以在 xOz 面上的投影为线段,即

$$\begin{cases} z = 1/2 \\ y = 0 \end{cases}, |x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) 同理在 yOz 面上的投影也为线段,即

$$\begin{cases} z = 1/2 \\ x = 0 \end{cases}, |y| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6.3 同步题解析

习题 6.1 解答

1. 解 $$d_0 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}, d_x = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$d_y = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}, d_z = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

2. 解 设 x 轴上的点为 $(x,0,0)$,则

$$\sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

从而解得 $x_1 = -2, x_2 = -4$,即 x 轴上所求点为 $(-2,0,0)$ 及 $(-4,0,0)$.

3. 证明:因为 $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

4. 解 设点 A 的坐标分别为 x,y,z,则

$$x = 2 - 4 = -2, y = -1 + 4 = 3, z = 7 - 7 = 0$$

所以起点 A 为 $(-2,3,0)$

5. 解 $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(2-0)^2 + (2+2)^2 + (0-5)^2} = 3\sqrt{5}$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \cos\beta = \frac{4\sqrt{5}}{15}, \cos\gamma = -\frac{5\sqrt{5}}{15} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\alpha = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{15}, \beta = \arccos\frac{4\sqrt{5}}{15}, \gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

6. 解 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{3,1,5\}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{1,3,-3\}, 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = \{8,4,11\}$

7. 解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角分别为 α,β,γ,由题设知

$$\alpha = \beta = \gamma$$

则 $3\cos^2\alpha = 1, \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\pm\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

8. 解 因为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\left\{\dfrac{6}{11}, \dfrac{7}{11}, -\dfrac{6}{11}\right\}$,所以平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为