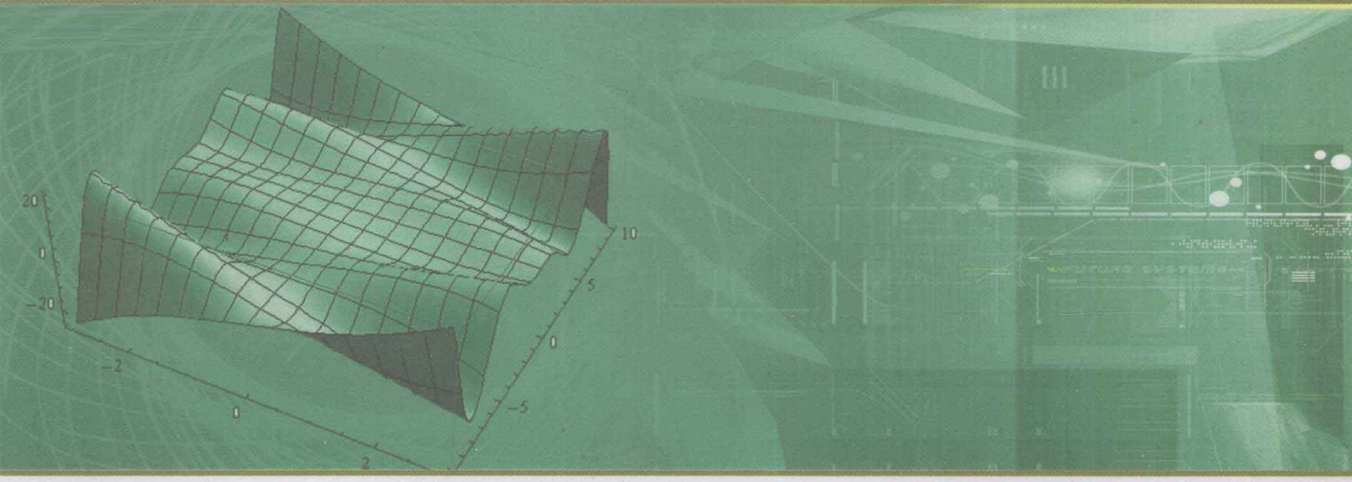

普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

李晓培　齐春燕　邱建军　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十二五"规划教材

线性代数

主编　李晓培　齐春燕　邱建军

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本书是根据教育部教学指导委员会制订的线性代数教学基本要求，充分汲取近年来线性代数课程的教学改革研究成果而编写的。本书共分六章，包括行列式、矩阵、n 维向量及矩阵的秩、线性方程组、特征值与矩阵的对角化、二次型。

全书内容、体系新颖，叙述简明扼要，层次清楚，重点突出，例题全面，便于教学。

本书适合作为高等院校理工科及经管类各专业线性代数课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 李晓培，齐春燕，邱建军主编. —北京：中国铁道出版社，2010.8

普通高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-113-11585-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… ②齐… ③邱 Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 150152 号

书　　名：线性代数

作　　者：李晓培　齐春燕　邱建军　主编

策划编辑：严晓舟　唐　旭

责任编辑：李小军　　　读者热线电话：400-668-0820

编辑助理：何红艳

封面设计：付　巍　　　封面制作：李　路

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　邮政编码：100054)

印　　刷：北京市彩桥印刷有限责任公司

版　　次：2010 年 8 月第 1 版　　2010 年 8 月 1 次印刷

开　　本：787mm×960mm　1/16　印张：12　字数：248 千

书　　号：ISBN 978-7-113-11585-2

定　　价：20.00 元

前　　言

线性代数是理工科、经济管理等学科大学生的一门重要的数学基础课，是学习后续课程的工具，对于培养大学生的计算和抽象思维能力十分必要，它的理论和方法已成为当今科学研究和处理工程技术领域问题的有力工具。本教材在传统线性代数教材的基础上，结合教育部教学指导委员会制定的新的基本要求、编者多年的教学实践及近年来线性代数课程的教学改革研究成果，对传统的教学内容、教材体系作了一些改革。主要体现在：本书叙述简明扼要、层次清楚、重点难点突出、例题全面，每章均配备有较多的例题和习题，特别是为了满足分层次教学的需要，每章均配有典型例题精选，并附有较详细的习题解答。此外，还注意到文、理、工、管的结合与交叉，渗入了现代数学的思想，对传统教材中较烦琐的理论部分作了简化的处理，使学生易于掌握。

本书由李晓培、齐春燕、邱建军主编，乐茂华教授审订了全书。

借此机会衷心感谢湛江师范学院副院长刘周堂教授及教务处、数学与计算科学学院有关教师对本书的编写给予的支持和帮助。由于水平有限，书中难免有不妥及疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2010 年 6 月

目　　录

第1章
行 列 式

行列式是由解线性方程组的需要而产生并发展起来的，它是一个重要的数学工具，不仅在线性代数和数学的其他分支中广泛应用，而且在工程技术和管理科学中也有重要应用．本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质、计算方法及行列式在解 n 元线性方程组中的应用．

1.1 n 阶行列式的定义与性质

在中学数学里，已经学习过二阶、三阶行列式的定义、性质和计算，现在讨论 n 阶行列式．在线性代数中，关于 n 阶行列式的定义可以有多种不同的方法，这里我们采用递归法．

先看二阶、三阶行列式的结构.

二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} a_{21}.$$

若引入记号：$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|$，$A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|$，其中$|a_{22}|$，$|a_{21}|$是一阶行列式．我们称 A_{11}，A_{12}分别为元素 a_{11}，a_{12}对应的**代数余子式**，于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

即二阶行列式可以按第一行展开，通过一阶行列式来定义二阶行列式．

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

若引入记号：

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

把 A_{11},A_{12},A_{13} 分别称为元素 a_{11},a_{12},a_{13} 对应的代数余子式，从而有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

即三阶行列式可以按第一行展开，并通过二阶行列式来定义三阶行列式.

由此可以看出二阶、三阶行列式虽然阶数不同，但它们的定义都遵循同一规律，即通过低阶的行列式来定义高一阶的行列式.

可由此给出 n 阶行列式的递归法定义.

1.1.1 n 阶行列式的定义

定义 1.1 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-1}$$

是一个数.

当 $n=1$ 时， $D=|a_{11}|=a_{11}$，

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 是元素 a_{1j} 对应的代数余子式，M_{1j} 是元素 a_{1j} 所对应的余子式，是在 D 中把元素 a_{1j} 所在的行和所在的列的元素划掉，其余元素按原来顺序所构成的 $n-1$ 阶行列式，

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式(1-1)中的元素 a_{ij} 的下标 i,j 分别称为该元素的行标和列标，a_{ij} 说明其处于第 i 行、第 j 列的交叉点的位置.

在 D 中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为 D 的**主对角线**，相应地 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角元**，而另一条对角线称为 D 的**次对角线**.

由定义可知，行列式是其元素 a_{ij} 的乘积构成的和式，称为**行列式的展开式**，展开式共有 $n!$ 项，每一项都是取自不同的行、不同的列的元素的乘积，展开式中带正负号的项各占一半.

例 1.1 利用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&1&1\end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开得，$D=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}$$
$$=-1+2+1=2.$$

例 1.2 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}&&&\lambda_1\\&&\lambda_2&\\&\iddots&&\\\lambda_n&&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中次对角线上方、下方的元素全为 0.

证 应用行列式的定义可得

$$D_n=(-1)^{n+1}\lambda_1\begin{vmatrix}&&&\lambda_2\\&&\lambda_3&\\&\iddots&&\\\lambda_n&&&\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{n+1}\lambda_1D_{n-1}=(-1)^{n-1}\lambda_1D_{n-1}.$$

又
$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}&&&\lambda_2\\&&\lambda_3&\\&\iddots&&\\\lambda_n&&&\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1+1}\lambda_2\begin{vmatrix} & & & \lambda_3 \\ & & \lambda_4 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\lambda_2 D_{n-2}=(-1)^{n-2}\lambda_2 D_{n-2}.$$

于是利用递推关系可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1}\lambda_1 D_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}\cdot\lambda_1\cdot(-1)^{n-2}\cdot\lambda_2 D_{n-2} \\ &\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \end{aligned}$$

例 1.3 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中主对角线上元素全为 0,即当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$,称其为下三角行列式.

证 对 n 应用数学归纳法,当 $n=2$ 时,结论显然成立.假设对于 $n-1$ 也成立,则由 n 阶行列式的定义有

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端为 $n-1$ 阶行列式,由数学归纳法假设有 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

1.1.2 n 阶行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

则行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的**转置行列式**，并记为 D^{T}.

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

该性质说明行列式中的行与列具有同等的性质，对于行所具有的性质，对列也成立.

性质 1.2 行列式 D 按任一行展开，其值相等，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 所对应的**代数余子式**.

以上两条性质的证明可用数学归纳法得证，这里从略.

推论 1.1 某行全为零的行列式其值为零.

性质 1.3(齐次性) 用数 k 乘行列式的某行的所有元素，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用性质 1.2，将上式的左端按第 i 行展开，立即可得等号右端的结果.

性质 1.4(可加性) 若行列式的某行的元素都是两数之和，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用性质 1.2 将上式的左端按第 i 行展开，即可得等号右端的结果.

性质 1.3 和性质 1.4 合起来称为**行列式的线性性质**.

推论 1.2 行列式某行的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

性质 1.5 互换行列式的两行，行列式变号.

证 应用数学归纳法证明，对于二阶行列式结果显然成立. 假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立，对 n 阶行列式，按未被换行的第 k 行展开，有

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}.$$

由于 $M_{kl}(l=1,2,\cdots,n)$ 是 $n-1$ 阶行列式，且其中有两行互换，所以 $M_{kl}(l=1,2,\cdots,n)$ 改变符号，故得 D 也改变符号.

推论 1.3 行列式两行对应元素相等，则该行列式的值为零.

推论 1.4 若行列式中两行对应元素成比例，则该行列式的值为零.

性质 1.6 把行列式的某行各元素分别乘以 k，再加到另一行的对应元素上去，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用性质 1.4 和推论 1.3，可证上式成立.

性质 1.7 行列式某行的元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于零，即

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0,(i\neq j).$$

证 由性质 1.2，将行列式(1-1)按第 i 行展开，有

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

又将行列式(1-1)中的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 换成 $a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn}$ 后所得的行列式值为零(由推论 1.3 可知)，而其展开式即为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}A_{ik}=0$，故 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}A_{ik}=0$.

综合性质 1.2 和 1.7 得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}. \tag{1-2}$$

以上各条性质，对列作讨论也成立.

1.2 n 阶行列式的计算

本节将通过例题来说明，利用行列式的定义和性质计算或展开 n 阶行列式的方法. 为计算方便，引入以下记号：r_i 表示行列式的第 i 行，c_i 表示第 i 列，交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列)，记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$，第 i 行(列)乘以数 $k(k\neq 0)$ 记作 $kr_i(kc_i)$，用数 k 乘以第 i 行(列)加到第 j 行(列)记作 $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$.

例 1.4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[(i=2,3,4)]{r_i+r_1}\begin{vmatrix}8&8&8&8\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,4)]{(-1)r_1+r_i}8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=8\times4\times4\times4=512,$$

这里运用了$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$的性质.

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&-1&-1&2\\1&-1&0&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(-2)r_1+r_4]{r_1+r_3}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&1&-1&2\\0&3&1&-4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[3r_2+r_4]{r_2+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(-1)r_3+r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

以上两例是利用行列式的定义和性质，将行列式化为三角行列式的处理方法．亦可采用降阶的方法计算行列式的值，如下例．

例 1.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 第 1 列和第 4 行均只有一个非零元素，可按第 1 列(或第 4 行)展开，依此逐级降阶．

$$D \xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } r_3 \text{ 展开}} 2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-\frac{3}{2}r_2+r_3} -2\begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_3 \text{ 展开}} -2\times(-2)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -\frac{13}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$=-4\times(-3+52)=-196.$$

例 1.7 证明：$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$

证明

$$
\text{左式}=\underset{①}{\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}}+\underset{②}{\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}}
$$

$$
\xlongequal[\text{取公因数}]{\text{①、②式}:c_1\text{ 分别提}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{②式}:-ac_1+c_2]{\text{①式}:-bc_1+c_3} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{②式}:c_2\text{ 提出 }b]{\text{①式}:c_3\text{ 提出 }a} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{②式}:-ac_2+c_3]{\text{①式}:-bc_3+c_2} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[c_2\leftrightarrow c_3]{\text{②式}:c_1\leftrightarrow c_3} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=\text{右式}.
$$

例 1.8 计算行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},
$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解

$$
D_n\xlongequal[\text{出 }a_1,a_2,\cdots,a_n]{\text{每行分别提}} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}
$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{r_i+r_1} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \cdots & 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\text{ 提出 }1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{-\frac{1}{a_i}r_1+r_i} a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

例 1.9 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解 方法 1:把 D_n 按第一列展开,有

$$D_n=(-1)^{1+1}xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}$$

$$=xD_{n-1}+a_n,$$