

高等学校教材

大学数学 线性代数

(第二版)

上海交通大学数学系
线性代数课程组 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

大学数学 线性代数

Xianxing Daishu

(第二版)

上海交通大学数学系
线性代数课程组 编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书以较高的观点,系统介绍了线性代数的基本概念、基础理论和主要方法,着重指出各基本概念和基础理论之间的本质联系,注重学生思维能力和数学建模能力的训练和培养。

本书内容包括矩阵与行列式、线性方程组理论、相似矩阵、二次型与对称矩阵、线性空间与线性变换等五章,可用作对线性代数有较高要求的非数学类各专业的本科生教材或教学参考书,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 线性代数 / 上海交通大学数学系线性代数课程组编. -- 2 版. -- 北京: 高等教育出版社, 2012. 1

ISBN 978 - 7 - 04 - 033805 - 8

I. ①大… II. ①上… III. ①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 IV. ①O13②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 242250 号

策划编辑 张彦云
责任校对 刁丽丽

责任编辑 胡颖
责任印制 张福涛

封面设计 张楠

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印刷 北京天来印务有限公司
开本 787mm × 960mm 1/16
印张 24.75
字数 460 千字
购书热线 010 - 58581118
咨询电话 400 - 810 - 0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landrao.com>
<http://www.landrao.com.cn>
版 次 2008 年 6 月第 1 版
2012 年 1 月第 2 版
印 次 2012 年 1 月第 1 次印刷
定 价 36.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 33805 - 00

第二版前言

本书第一版作为“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”于2008年6月出版。结合三年多来的教学实践,我们对原教材中存在的问题和不足之处进行了修订,在内容取舍、行文风格与习题配备上都作了改进。

行列式理论的重要价值不仅在于计算,在本书中我们还着重指出了行列式在刻画矩阵的本质特性时所发挥的作用,例如,方阵的可逆性可以用它的行列式是否非零来刻画,矩阵理论中的核心概念——秩,也是通过行列式给出的。

线性方程组理论是线性代数最重要的基础,我们在本书中指出了它与线性代数其余部分之间的深刻联系:线性方程组的完整理论是以矩阵和向量空间为工具而建立的;反过来,矩阵、线性空间、二次型与线性变换理论中的很多问题都可以化为线性方程组的相关问题而得以解决。例如,一个向量能否由一组向量线性表示的问题可以化为线性方程组解的存在性问题来解决,一个向量组是否线性相关的问题等价于齐次线性方程组非零解的存在性问题。

我们在本书第一版前言中指出,从矩阵论的角度来说,线性代数的很多基本内容可表述为研究矩阵在给定类型的变换下的不变性和分类问题。本书的主要内容就是按照这一思想展开的:我们依次建立了矩阵在初等变换下的标准形——相抵标准形的理论,对称矩阵在合同变换下的标准形——合同标准形的理论,以及实对称矩阵的正交相似标准形理论,我们还讨论了方阵在相似变换下的标准形问题,并给出了方阵相似于对角矩阵的充分必要条件。我们希望通过这样层层递进的方式,使学生通过线性代数课程的学习,对数学的特点和作用,对数学的思想方法有一个初步的领会。

本书内容包括矩阵与行列式、线性方程组理论、相似矩阵、二次型与对称矩阵、线性空间与线性变换等五章,以较高的观点,系统介绍了线性代数的基本概念、基础理论和主要方法,着重指出各基本概念和基础理论之间的本质联系,注重学生思维能力和数学建模能力的训练和培养。

本书可作为对线性代数有较高要求的非数学类各专业的本科生教材或教学参考书,也可供有关工程技术人员参考。为适应不同专业对线性代数的要求,本书的内容比一般线性代数课程所需要的内容要多。使用者可根据各自的要求适当取舍。打*的内容可供学有余力者作课外阅读和复习提高之用,这部分内容可以不讲而不会影响全书的逻辑完整性。本书各章习题分两部分,第一部分习

题为理解有关的基本概念和基本方法之用,第二部分习题有一定的综合性。为方便读者使用,书后给出了习题解答与提示。

不少读者对本书第一版提出了很有价值的建议和修改意见,这对我们第二版的修订工作十分有益。研究生白雪同学承担了本书第二版的排版和录入工作,她的认真而富于主动性的工作使本书增色不少。本书的编写与出版得到了上海交通大学“‘九八五’三期优质教材建设”项目的资助,我们对此表示衷心的感谢。

编 者

2011年11月11日

第一版前言

线性代数是大学非数学类各专业的重要基础课,随着科学技术的发展和社会的进步,大学理工类和经济管理类各专业对线性代数课程提出了新的要求。线性代数课程不但承担了为学生提供必要的基础知识和基本技能的任务,而且作为训练和培养学生思维能力和数学建模能力的载体,它也发挥了重要作用。本书就试图反映这种变化和要求。

本书比较系统地介绍了线性代数的基本概念、基础理论和主要方法。全书共分五章。第一章介绍矩阵和行列式的概念,运算和基本性质,以及重要计算方法,指出矩阵与行列式之间的内在联系。线性方程组理论是线性代数课程中最基本的内容,矩阵与 n 维向量空间是研究线性方程组理论的两个基本工具。本书第二章介绍 n 维向量空间的理论初步。在此基础上,给出了线性方程组的完整理论。第三章介绍相似矩阵的概念以及与之相关的特征值、特征向量、特征多项式与最小多项式等重要概念;给出了矩阵相似于对角矩阵的充分必要条件,还介绍了矩阵相似标准形的简单应用。第四章介绍二次型与对称矩阵的基本理论。首先介绍化二次型为标准形的配方法,证明了实二次型的惯性定理并由此解决了实二次型的分类问题,给出了正定二次型的判别法则。从矩阵的角度来看,我们给出了实对称矩阵合同标准形的基础理论。第五章介绍有限维抽象线性空间理论的基本概念和基本性质,还简要介绍了一类带度量的线性空间——有限维欧氏空间。最后概要介绍线性变换的基本概念以及线性变换与矩阵之间的关系。

在教材编写中,尽可能指出各个概念和理论之间的相互联系。我们为研究线性方程组理论而引入 n 维向量空间的概念。反过来,向量组的线性相关性问题其实就是相应的齐次线性方程非零解的存在性问题。将一个向量用一组向量线性表出的问题可化为相应的线性方程组的求解问题。

从矩阵论的角度来说,线性代数的很多基本内容可表述为研究矩阵在给定类型的变换之下的不变性与分类问题。在本书中,我们力图体现变换—分类—标准形—不变量这条主线。着重介绍了矩阵在初等变换下矩阵的相抵分类与标准形问题。由此引出了矩阵在初等变换下的不变量——秩。这是研究线性方程组理论的核心概念。我们分别介绍了实对称矩阵在合同变换和正交相似变换下的分类与标准形问题。我们还介绍了矩阵的相似变换与相似标准形的有关概念。希望通过这

样的处理,让学生对有关的数学思想方法有所领悟。

我们在本书中编选了一定数量的习题。习题共分两类,在各节之后的习题用于理解本节内容的基本概念和基础理论及掌握有关的计算方法之用,各章之后的习题具有一定的综合性,用于巩固和提高之用,其中少量习题有一定难度。

本书可供理工类对线性代数有较高要求的专业用作教材或教学参考书。由于各专业的要求不同和教学时数的不同,对本书的内容可作适当取舍。

本书第一、二章由沈灏编写,第三章由辛玉梅编写,第四章由王纪林编写,第五章由辛玉梅和蒋启芬编写。第一、二、三、五章习题由蒋启芬和辛玉梅选编,第四章习题由王纪林选编。全书由沈灏统稿。崔振校阅了本书的第一、二、四章。张媛、孙园两位博士和潘徐敏硕士负责全书电子文档的排版和录入,为本书的出版作出了重要贡献。本书的出版得到高等教育出版社和上海交通大学数学系的关心和支持,谨向他们表示衷心的感谢。

编者

2008年4月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一章 矩阵与行列式	1
*§1.0 预备知识	1
1.0.1 集合	1
1.0.2 数集	3
1.0.3 数域	4
1.0.4 求和号 Σ	5
§1.1 线性型和矩阵概念的引入	7
1.1.1 矩阵的定义	7
1.1.2 常用矩阵	8
§1.2 矩阵的运算	10
1.2.1 矩阵的线性运算	10
1.2.2 矩阵的乘法	14
1.2.3 方阵的幂与方阵多项式	20
1.2.4 方阵的迹	23
§1.3 方阵的行列式	24
1.3.1 2阶和3阶行列式	24
1.3.2 排列	28
1.3.3 n 阶行列式的定义	29
§1.4 行列式的基本性质	33
1.4.1 行列式的转置	33
1.4.2 行列式的行线性性和列线性性	34
1.4.3 行列式的初等变换	35
1.4.4 行列式的按行(列)展开	39
*1.4.5 Laplace 定理	43
§1.5 行列式的计算	52
1.5.1 三角化	52
1.5.2 降阶法与镶边法	55
1.5.3 归纳与递推	60
§1.6 可逆矩阵	65

1.6.1	可逆矩阵	65
1.6.2	逆矩阵的求法	69
1.6.3	Cramer 法则	71
§1.7	分块矩阵	76
1.7.1	矩阵的分块	77
1.7.2	分块矩阵的运算	79
1.7.3	分块对角矩阵	83
	习题一	86
第二章	线性方程组理论	101
§2.1	矩阵的相抵标准形	101
2.1.1	初等矩阵和矩阵的初等变换	101
2.1.2	矩阵的秩	111
2.1.3	矩阵的相抵标准形	114
2.1.4	求逆矩阵的初等变换法	116
*§2.2	分块矩阵的初等变换	119
2.2.1	分块矩阵的初等变换	119
2.2.2	分块初等矩阵	120
2.2.3	行列式和矩阵计算中的分块技巧	123
§2.3	解线性方程组的消元法	126
2.3.1	线性方程组的矩阵形式	126
2.3.2	线性方程组的初等变换	128
2.3.3	线性方程组的相容性	132
§2.4	向量空间 K^n	135
2.4.1	向量空间 K^n 及其运算性质	135
2.4.2	线性子空间	136
§2.5	向量组的秩	139
2.5.1	线性组合·线性方程组的向量形式	139
2.5.2	线性相关与线性无关	144
2.5.3	极大线性无关组·向量组的秩	149
2.5.4	向量组的秩与矩阵的秩	151
§2.6	线性方程组解的结构	154
2.6.1	齐次线性方程组的解空间	154
2.6.2	非齐次线性方程组解的结构	159
	习题二	164

第三章 相似矩阵	182
§3.1 方阵的特征值与特征向量	182
3.1.1 方阵的特征值与特征向量	182
3.1.2 特征值与特征向量的求法	184
3.1.3 特征值的性质	188
3.1.4 特征向量的性质	194
§3.2 矩阵的相似变换	196
3.2.1 矩阵相似的概念	196
3.2.2 相似矩阵的性质	198
§3.3 矩阵相似于对角矩阵的条件	201
3.3.1 矩阵相似于对角矩阵的条件	201
*3.3.2 特征值的代数重数和几何重数	207
3.3.3 方阵的 Jordan 标准形	215
*§3.4 方阵的最小多项式	218
3.4.1 方阵的化零多项式	218
3.4.2 最小多项式	220
3.4.3 最小多项式与方阵相似于对角矩阵的条件	224
§3.5 相似标准形的若干简单应用	226
3.5.1 行列式求值与方阵求幂	226
3.5.2 求与给定方阵可交换的方阵	232
*3.5.3 求解线性微分方程组	235
习题三	243
第四章 二次型与对称矩阵	251
§4.1 二次型及其标准形	251
4.1.1 二次型及其矩阵表示	251
4.1.2 二次型的标准形	253
4.1.3 实对称矩阵的合同标准形	257
§4.2 惯性定理与二次型分类	259
4.2.1 惯性定理	259
4.2.2 实二次型的分类	261
4.2.3 二次曲线与二次曲面的仿射分类	262
§4.3 正定二次型	266
4.3.1 正定二次型	266
4.3.2 二次型正定性判别法	267
§4.4 正交向量组与正交矩阵	272

4.4.1	向量的内积	272
4.4.2	正交向量组	275
4.4.3	正交矩阵	278
§4.5	实对称矩阵的正交相似标准形	280
4.5.1	实对称矩阵的特征值和特征向量	281
4.5.2	实对称矩阵的正交相似标准形	282
4.5.3	用正交替换化二次型为标准形	286
	习题四	289
第五章	线性空间与线性变换	297
§5.1	线性空间的概念	297
5.1.1	线性空间的定义	297
5.1.2	线性空间的简单性质	298
5.1.3	线性子空间	299
§5.2	线性空间的同构	300
5.2.1	基·维数·坐标	300
5.2.2	基变换与坐标变换	304
5.2.3	线性空间的同构	310
§5.3	欧氏空间	313
5.3.1	欧氏空间的定义与基本性质	314
5.3.2	标准正交基	317
5.3.3	欧氏空间的同构	319
*§5.4	线性变换	320
5.4.1	线性变换的概念与运算	320
5.4.2	线性变换的性质	324
*§5.5	线性变换的矩阵	325
5.5.1	线性变换在给定基下的矩阵	325
5.5.2	线性变换在不同基下矩阵间的关系	328
*§5.6	线性变换的值域和核	335
5.6.1	线性变换的值域和核的概念	335
5.6.2	值域和核的维数	336
	习题五	340
	习题答案与提示	350
	索引	380
	参考文献	383

第一章 矩阵与行列式

*§1.0 预备知识

从现代数学的观点看,代数学的主要研究对象是各种类型的代数结构(algebraic structure),即带有代数运算(algebraic operation)的集合.为了行文上的方便和表述的严密性,在进入正题之前,我们简要介绍一类常用的代数结构——数域.为此先引入集合论的一些基本概念和记号.

1.0.1 集合

集合(set)的概念是数学中最基本的概念之一,要给出集合的精确定义是十分困难的.我们将满足于把集合看作是“由具有一定属性的事物所组成的一个整体”这样一种朴素的理解,而把组成一个集合的事物叫做这个集合的元素(element).作为例子,我们可以考虑全体正整数的集合、绝对值不大于5的全体正整数的集合、能被7整除的全体正整数的集合、闭区间 $[a, b]$ 上全体一元连续函数的集合、平面上垂直于已知直线 l 的全体直线的集合、一元 n 次方程 $x^n - 1 = 0$ 的全体复数根的集合等.

若 a 是集合 S 的元素,则称 a 属于 S ,记作 $a \in S$.若 a 不是 S 的元素,则称 a 不属于 S ,记作 $a \notin S$ 或 $a \notin S$.

定义 1.0.1 设 S 与 T 为两个集合,若对任意 $a \in S$,都有 $a \in T$,则称 S 为 T 的子集(subset),记作 $S \subseteq T$ 或 $T \supseteq S$.若 $S \subseteq T$ 与 $T \subseteq S$ 同时成立,则称集合 S 与 T 相等,记作 $S = T$.若 $S \subseteq T$ 但 $S \neq T$,则记作 $S \subset T$ 或 $T \supset S$.

不包含任何元素的集合称为空集(empty set),通常用 \emptyset 表示空集. \emptyset 是任意一个集合的子集.

任一非空集合 S 都至少有两个子集,即 S 本身和空集 \emptyset ,叫做 S 的平凡子集(trivial subset). S 的不同于其自身的子集叫做 S 的真子集(proper subset).

表示集合的方法有多种,常用的有以下两种:

枚举法(enumeration):这是通过将集合的元素逐个列出以表示集合的方法.例如 $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ 表示 A 是由2, 3, 5, 7和11这5个素数组成的集合, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ 表示 B 是由 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ 这3个元素组成的集合.

描述法 (description): 这是通过列出集合中全体元素所共有的性质或应满足的条件来刻画集合的方法. 通常用 $S = \{x | P(x)\}$ 这种形式来表示 S 是由所有具有性质 P 的元素所组成的集合. 用 $S = \{x \in A | P(x)\}$ 来表示 S 是由集合 A 中具有性质 P 的所有元素所组成的集合.

我们用描述法给出由已知集合构造新集合的几个常用方法.

定义 1.0.2 设 A 与 B 为两个集合, 令

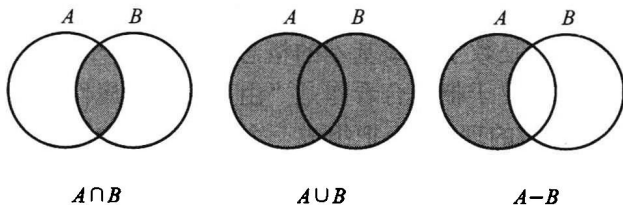
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\},$$

$A \cap B$ 、 $A \cup B$ 与 $A - B$ 依次叫做 A 与 B 的交 (intersection)、并 (union) 和差 (difference). A 与 B 的差 $A - B$ 也常表示成 $A \setminus B$.

集合 A 与 B 的交、并和差可用下面的 Venn 图直观表示:



定义 1.0.3 设 A_1, A_2, \dots, A_k 为 k 个集合, $k \geq 1$. 令

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) | a_i \in A_i, 1 \leq i \leq k\},$$

并规定对 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ 中两个元素 (a_1, a_2, \dots, a_k) 与 (b_1, b_2, \dots, b_k) , 当且仅当对所有 $i, 1 \leq i \leq k$, 都有 $a_i = b_i$ 时, 称这两个元素相等, 记作 $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$, 则称 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ 为 A_1, A_2, \dots, A_k 的直积 (direct product) 或笛卡儿积 (Cartesian product). 当 $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$ 时, 令

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ 个 } A},$$

A^k 叫做 A 的 k 次幂 (k -th power).

定义 1.0.4 设 S 为集合, 令

$$2^S = \{X | X \subseteq S\},$$

即 2^S 是以集合 S 的所有子集作为元素所组成的集合, 叫做 S 的幂集合.

例 1.0.1 设 $S = \{a, b, c\}$, 则

$$2^S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

元素个数有限的集合叫做有限集 (finite set). 下面给出有限集的基数的定义.

定义 1.0.5 设 S 为有限集, 则称 S 中所包含元素的个数为 S 的基数 (cardinality), 记作 $|S|$.

例 1.0.2 设 A_1, A_2, \dots, A_k 都是有限集, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ 也是有限集, 且若 $|A_i| = n_i, 1 \leq i \leq k$, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = \prod_{i=1}^k n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

若 S 为有限集, 则 S 的幂集合 2^S 也是有限集, 且

$$|2^S| = 2^{|S|}.$$

1.0.2 数集

由全体复数组成的集合叫做复数集, 复数集的非空子集叫做数集. 为了叙述的简洁和方便, 我们将一些常用的数集用特定的记号表示:

- \mathbf{N} : 全体自然数的集合,
- \mathbf{Z}^+ : 全体正整数的集合,
- \mathbf{Z} : 全体整数的集合,
- \mathbf{Q} : 全体有理数的集合,
- \mathbf{R} : 全体实数的集合,
- \mathbf{C} : 全体复数的集合.

利用描述法, 由上述数集还可构造出新的重要数集.

例 1.0.3 令

$$\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\},$$

此处 $i = \sqrt{-1}$. $\mathbf{Z}[i]$ 中的元素叫 Gauss 整数. 一般地, 对给定的整数 d , 令

$$\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbf{Z}\},$$

即 $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ 由所有形如 $a + b\sqrt{d}$ 的复数所组成的数集, 此处 a 与 b 为任意整数.

例 1.0.4 设 n 为正整数, 令

$$S = \{x \in \mathbf{C} \mid x^n - 1 = 0\},$$

即 S 是由方程 $x^n - 1 = 0$ 的全体复数根 (即 n 次单位根) 组成的数集, 显然有 $|S| = n$.

1.0.3 数域

在复数集 \mathbf{C} 上定义有加法、减法、乘法和除法四种代数运算, 统称四则运算. 在四则运算中, 加法和乘法这两种运算是基本的, 减法和除法分别是加法和乘法的逆运算. 对任意 $a, b \in \mathbf{C}$, 都有 $a + b \in \mathbf{C}$, $a - b \in \mathbf{C}$ 及 $a \cdot b \in \mathbf{C}$, 并且当 $b \neq 0$ 时还有 $a \div b \in \mathbf{C}$, 即复数集 \mathbf{C} 关于数的加法、乘法及它们的逆运算都封闭 (closed). 由此引出下述定义.

定义 1.0.6 设 K 为至少包含两个元素的数集, 若 K 关于数的加法、乘法及其逆运算都封闭, 则称数集 K 关于加法和乘法组成的代数结构 $(K, +, \cdot)$ 为一个数域 (number field), 在不致引起混淆的情况下, 常简单地称 K 为一个数域.

例 1.0.5 有理数集 \mathbf{Q} 、实数集 \mathbf{R} 与复数集 \mathbf{C} 关于四则运算都封闭, 因此 $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ 与 $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ 都是数域, 或者说 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 与 \mathbf{C} 都是数域, 依次叫做有理数域 (field of rational numbers)、实数域 (field of real numbers) 和复数域 (field of complex numbers).

例 1.0.6 令 $\mathbf{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, 则对 $a_1 + b_1i, a_2 + b_2i \in \mathbf{Q}(i)$, 有

$$(a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i \in \mathbf{Q}(i),$$

$$(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \in \mathbf{Q}(i),$$

当 $a_2 + b_2i \neq 0$ 时, 有

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \in \mathbf{Q}(i),$$

因此 $\mathbf{Q}(i)$ 是一个数域, 叫做 Gauss 数域 (Gaussian number field).

定义 1.0.7 设 K_1 与 K_2 为数域, 若 $K_1 \subseteq K_2$, 则称 K_1 为 K_2 的一个子域 (subfield).

我们来证明下述关于数域的有关结论.

定理 1.0.1 任意一个数域都包含有理数域 \mathbf{Q} 作为子域.

证 设 K 为数域, 则 K 至少包含两个元素, 因此必有某个非零复数 $a \in K$. 于是由 K 关于减法与除法运算的封闭性得

$$0 = a - a \in K, \quad 1 = \frac{a}{a} \in K.$$

从而对任意正整数 n , 都有

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \in K, \quad -n = 0 - n \in K.$$

因此 K 包含全体整数, 即 $\mathbf{Z} \subseteq K$. 设 a 为有理数, 则存在 $m, n \in \mathbf{Z}$, 其中 $m \neq 0$, 使 $a = \frac{n}{m} \in K$, 因此 $\mathbf{Q} \subseteq K$, 即得结论. \square

1.0.4 求和号 \sum

为了行文上的简洁与方便, 我们常用求和号表示由多项连加所得到的和式:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

这里的 \sum 叫求和号, i 叫求和指标, a_i 叫做一般项或通项. 求和指标 i 不一定从 1 开始, 也可以从 0 或别的某个整数开始.

例 1.0.7 前 n 个正整数的平方和可表示为 $\sum_{i=1}^n i^2$, 即

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

例 1.0.8 n 次多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 可表示为 $\sum_{i=0}^n a_ix^i$, 即

$$\sum_{i=0}^n a_ix^i = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

不难验证, 若 s 与 t 为两个与 i 无关的常数, 则

$$\sum_{i=1}^n (sa_i + tb_i) = s \cdot \sum_{i=1}^n a_i + t \cdot \sum_{i=1}^n b_i.$$

在某些较为复杂的场合, 我们也使用二重求和.

设 $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, 我们要求 mn 个数 a_{ij} 的和 S . 将这 mn 个数排列成如下 m 行 n 列的长方形阵列

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \end{array} \quad (1.0.1)$$

为了求出和 S , 我们可以先按行相加, 求出同一行上 n 个数的和 $\sum_{j=1}^n a_{ij}$, 然后再将各行的和相加, 则得

$$S = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right). \quad (1.0.2)$$