高等数学学习辅导

（下册）

杨中易　主编

东北工学院出版社

高等数学学习辅导

（下册）

赵广畲　杨中易　孙文芳　李建华
丁仲英　李启国　齐秉寅　尤全德

东北工学院出版社

内 容 简 介

高等数学学习辅导是理工大学本科生学习本门课程的实用教学用书．内容与同济大学数学教研室主编的《高等数学》相吻合．医农林各专业及夜大、函授、电大的学生也能满足需要．全书分上下两册、

做为辅导用书，本书有鲜明的特点，如取材广泛，讲解简明，重点突出，对典型问题与疑难问题有适宜的配合等．

高 等 数 学 学 习 辅 导

（下册）

杨中易 主编

东北工学院出版社出版发行　　东北工学院印刷厂印刷

（沈阳·南湖）　　（辽新出许字 89084 号）

开本：787×1092 1/32　　印张：12.75　　字数：286 千字

1991 年 3 月第 1 版　　1991 年 3 月第 1 次印刷

印数： 1～5000 册

责任编辑：李世晋　王金邦　　责任校对：张德喜

封面设计：唐敏智

ISBN 7-81006-276-X/O·18　　定价：2.67 元

前　言

本书编者在各自多年的教学实践中积累了许多经验，已系统地总结在所编的本书各部分之中；在内容上，本书是与同济大学数学教研室主编的《高等数学》相配合的，并在此基础上有所拓宽．相信将会给学生的学习带来便利．编写中力求做到取材广泛，注意典型问题和疑难问题的配合，难易程度适当，满足教学多方面的需要．

本书分上下两册，各部分编者如下：第一部分由赵广畬编写；第二部分由杨中易编写；第三部分由孙文芳编写；第四部分由李建华编写；第五部分由丁仲英编写；第六部分由李启国编写；第七部分由齐秉寅编写；第八部分由尤全德编写。编写工作由杨中易主持并统稿。

在本书编写过程中，赵惠元教授、李世晋教授详尽地审阅了全部书稿，并做了许多订正．

在本书编写与出版过程中得到东北工学院辽宁分院主管院长的大力支持，并得到数学系领导与同事们的帮助，在此深致谢意．

对本书的错误与不足恳请指正．

编　者

1990．2．14

目　　录

第五部分　多元函数微分

第六部分　多元函数积分

重积分

曲线与曲面积分

第五部分　多元函数微分

有许多问题要靠多元函数微分才能解决。多元函数与一元函数有着密切的联系，一元函数有些概念和方法可以自然地推广到多元函数中去，但一元函数与多元函数从研究方法到结论也有某些本质差异。本部分的重点是二元函数，因为二元函数的结论大部分对多元函数适用。多元函数微分的主要内容是极限、连续、偏导数，以及微分法与多元函数微分的应用。

一、目的要求

1．理解多元函数的概念，多元函数定义域的含意及表示法。

2．了解二元函数极限的定义并会求某些简单函数的极限。

3．了解二元函数连续的定义，会用定义判断函数的不连续区域（点、线）

4．一阶偏导数是一个重要概念，要了解它的几何意义，进而要明白方向导数的意义。掌握方向导数与偏导数的关系。

5．熟练掌握一阶偏导数的计算方法，其中复合函数求导法、隐函数求导法是重点，要求正确熟练地计算一、二阶偏导数。

6. 了解全微分概念，全微分存在的条件，并能熟练计算全微分，会用全微分形式不变性计算函数的全微分及偏导数。

7. 掌握多元函数的应用，包括在几何上会求曲面的切平面、法线及空间曲线的切线及法平面方程；会求多元函数的极值及函数的最大值最小值。

多元函数的讨论往往借助于一元函数，因此务必搞清多元函数与一元函数微分学的内在联系，弄清两者的异同点，用类比的方法学习本部分内容是一个好方法。

二、内容纲要及重要概念

（一）多元函数基本概念

【二元函数】 设有变量 x，y，z，如果变量 x，y 在一定范围内任意取定一对值时，变量 z 按照一定规则总有确定的数值和它们相对应，则 z 叫做 x,y 的二元函数．记为 $z=f(x,y)$，或 $z=z(x,y)$。x,y 叫做自变量，自变量的变化范围叫做函数的定义域．常见二元函数的定义域是平面上的一个区域 D。

类似地，可给出二元以上多元函数的定义，n 元函数记为 u，x_1，x_2，…，x_n 为自变量，其取值范围记为 V_n，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_n$,，函数记为 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

【二元函数的极限】 设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$某邻域内有定义（点 P_0 可除外），如果对于每个任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ 使得适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)$都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$当 $x\to x_0$，$y\to y_0$

时的极限，有时又称为二重极限，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

【累次极限】 考虑$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，先让 $(x,y)\to(x,y_0)$再让$(x,y_0)\to(x_0,y_0)$，所得的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 称为先对 y 后对 x 的累次极限；如果先让$(x,y)\to(x_0,y)$再让$(x_0,y)\to(x_0,y_0)$ 所得极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$称为先对$x$后对$y$的累次极限，又称为二次极限。

【二元函数连续性】 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时函数极限存在并且等于函数在点(x_0,y_0)处的函数值，即

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，称函数在点$(x_0,y_0)$处连续。

如果函数在区域D的各点都连续，那么称函数在D内连续。

函数在 (x_0,y_0) 点连续时由定义可得出

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)=f(\lim_{x\to x_0} x,\lim_{y\to y_0} y)$$

【最值定理】 在有界闭域上连续的二元函数在该域上必取得最大值和最小值。

【介值定理】 设 $f(x,y)$在有界闭域D上连续，(x_1,y_1)、(x_2,y_2) 为D上两点且使 $f(x_1,y_1)\neq f(x_2,y_2)$，$\mu$ 为介于 $f(x_1,y_1)$ 与 $f(x_2,y_2)$ 之间的任一数值，则在D内至少存在一点(ξ,η)使得

$$f(\xi,\eta)=\mu$$

多元连续函数的和、差、积、商仍为连续函数，多元连续的复合函数也仍是连续函数，一切多元初等函数在其定义域内是连续函数。

（二）多元函数偏导数，微分及其计算法

【偏导数】 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)某邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,y_0)$（又称偏增量）.如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为函数在点$(x_0,y_0)$处对自变量 x 的偏导数。记为$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或$z_x(x_0,y_0)$.

类似可定义函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对自变量 y 的偏导数。记为$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或$z_y(x_0,y_0)$，即

$$z_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内处处有对 x 的偏导数存在（这个偏导数也是 x,y 的函数），称此函数为函数 $z=f(x,y)$对自变量 x 的偏导函数，记为$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$或 z_x。

同样可定义 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记为$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$或 z_y。一般把偏导函数简称做偏导数。

求函数对某个自变量偏导数时，只要将其余自变量看做常量，用一元函数求导法求导即可。

【偏导数的几何意义】 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处

偏导数 $z_x(x_0,y_0)$（图5-1）是曲面 $z=f(x,y)$与平面 $y=y_0$ 交线的切线与 x 轴正向夹角 α 的正切，即 $z_x(x_0,y_0)=\text{tg}\alpha$。同样 $z_y(x_0,y_0)=\text{tg}\beta$。

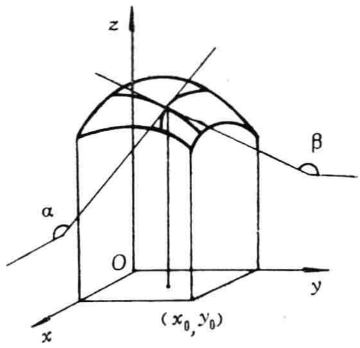

图 5-1

【二阶偏导数】 如函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数在定义域内任一点（x,y）处皆存在，则偏导数也是 x,y 的函数；对此如再有一次偏导数就称之为 $f(x,y)$ 的二阶偏导数。二元函数的二阶偏导数共有四个，分别记作

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

当二阶混合偏导数连续时，混合二阶偏导数与求导次序无关，即$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}$。二阶以上的偏导数也有类似结果。

【全微分】 如果函数 $z=f(x,y)$ 在任一点(x,y)处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A，B 不依赖 Δx，Δy，而只与 x,y 有关。$\rho=$

$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 叫做函数的全微分，记为 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

此时也称函数可微分。

如函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微分，则函数在该点必存在两个偏导数，且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=A$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=B$。若将 Δx，Δy 用各自的微分 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 表示，那么 $\mathrm{d}z$ 又可记作

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

全微分存在的充分条件是函数的两个偏导数连续。

【全微分的几何意义】 在曲面$z=f(x,y)$上与点 $P(x,y,0)$ 对应的点M (x,y,z) 处的切平面为 $MN_1N_3N_2$（图 5-2），当自变量给予增量Δx，Δy 时，函数值 z 获得增量Δz，

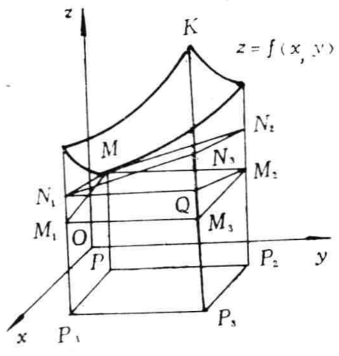

图 5-2

图中线段 M_3N_3 表示$\mathrm{d}z$,因为 $M_3N_3=M_1N_1+M_2N_2$，而 $M_1N_1=z_x\mathrm{d}x$，$M_2N_2=z_y\mathrm{d}y$，分别称为 z 对 x 及 y 的偏微分，故 $\mathrm{d}z=z_x\mathrm{d}x+z_y\mathrm{d}y$。

对三元函数，类似地有

$$\mathrm{d}u=u_x\mathrm{d}x+u_y\mathrm{d}y+u_z\mathrm{d}z$$

【一阶全微分形式不变性】 $z=f(u,v)$ 有连续的偏导

数 $z_u=f_u$，$z_v=f_v$。而$u=\varphi(x, y)$，$v=\psi(x,y)$，则

$$dz=f_u du+f_v dv$$

全微分用于近似计算常代替全增量，即 $\Delta z \doteq dz$，或

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)\doteq f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

于是得近似公式

$$f(x,y)\doteq f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

【复合函数求导法】 若 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点(x,y)处存在偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在相应点(u,v)处有连续偏导数，则 $z=f[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$ 在点(x,y)处有对 x 及 y 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

还可将上面公式推广到含有两个以上中间变量或自变量的情形：

设 $z=f(u, v, w)$，$u=\varphi(x, y)$，$v=\psi(x, y)$，$w=w(x,y)$。若复合函数 $z=f[\varphi(x,y), \psi(x,y),w(x,y)]$，对自变量 x,y 的偏导数存在，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

设 $u=f(x,y,z)$，$z=\varphi(x,y)$，$y=\psi(x)$。若复合函数

$u=f[x,\psi(x),\ \varphi(xy)]$ 对 x 的导数$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$存在，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$称为函数 $f(x,y,z)$ 的全导数.

【隐函数求导法】

隐函数存在定理　设 $F(x,y,z)$在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$的某个邻域内存在连续的偏导数且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x,_0y_0,z_0)\neq 0$,则在点(x_0,y_0,z_0)某邻域内方程 $F(x,y,z)=0$恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有偏导数公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

式中 F_x 表示函数 $F(x,y,z)$ 只对 x 求偏导数，将 y,z 看成常数。对于 F_y，F_z 也仿此处理.

如果 $F(x,y)=0$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

除了使用上面公式求隐函数 $F(x,y,z)=0$ 的偏导数外，还可使用对方程 $F(x,y,z)=0$ 两端同时求导的方法，求导时需将 z 看成中间变量.

对于用方程组形式给出的隐函数

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

求导问题存在如下定理.

设 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_P \neq 0$$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0, G(x,y,u,v)=0$ 在(x_0,y_0)某邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

式中的函数行列式如$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$等称为雅克比行列式。

（三）多元函数微分的应用

【空间曲线的切线及法平面】 设空间曲线L以参数式给出

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

且在 $t = t_0$ 时得到一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，则过该点的切线方向数为

$$(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))$$

过该点的切线方程为，

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

如空间曲线L以一般式给出

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

则过 M_0 点的切线方向数为

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_{M_0},\ \left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_{M_0},\ \left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_{M_0}.$$

过 M_0 点的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_{M_0}}$$

法平面方程为

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_{M_0}(y - y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

【曲面的切平面及法线】 曲面方程以 $z=f(x,y)$ 给出时，切平面的法矢量为

$$\boldsymbol{n}=(-z_x(x_0,y_0),\ -z_y(x_0,y_0),1)$$

切平面方程为

$$z-z_0=z_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{-z_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-z_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{1}$$

曲面方程以 $F(x,y,z)=0$ 给出时，切平面的法矢量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0),\ F_y(x_0,y_0),F_z(x_0,y_0))$$

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0)}$$

【方向导数与梯度】 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M(x,y,z)$ 处沿 l 方向的方向导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

若 $u=f(x,y,z)$在点M可微分，则函数在该点沿任意方向 l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$