真题篇

考研数学一

十年真题精解与热点问题

真题都一样 解答不一样！！！

陈启浩等 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书是考研数学辅导书．主要内容包括2003年到2012年十年的考研数学一的真题及其精解，以及对考试热点问题的讨论．

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学一”的同学阅读，也可作为教师的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

考研数学十年真题精解与热点问题．1/陈启浩等编著．—北京：机械工业出版社，2012.3

ISBN 978-7-111-37489-3

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第024107号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　昔玉花

版式设计：霍永明　责任校对：张　媛

封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇

北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2012年6月第1版第1次印刷

184mm×260mm·16.5印张·399千字

标准书号：ISBN 978-7-111-37489-3

定价：30.00元

考研数学复习指导系列丛书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，能够在较为紧张的时间安排下，有效加深概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由北京邮电大学陈启浩教授等编写的“考研数学复习指导系列丛书”

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学一考试的包括三本书，分别是：

《考研数学一　十年真题精解与热点问题》

《考研数学基础篇　常考知识点解析（数学一）》

《考研数学提高篇　常考问题的快捷解法与综合题解析（数学一）》

本套系列丛书是在陈教授对全国硕士生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶．

本套系列丛书，无论内容编写，还是解题方法都比较精练，新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性，针对性也很强，可以明显提高复习的效率．这套书既贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书．

前　　言

参加考研的同学，一定要练习一下近几年的全国硕士研究生入学统一考试的真题．因为它们既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以提供试题形式、广度和难度等有价值的信息．

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2003 年～2012 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《考研数学一　十年真题精解与热点问题》一书．本书由三部分组成：

A. 2003～2012 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精解

C. 考试热点分析

“十年真题精解”是对 2003 年～2012 年的全国硕士研究生入学统一考试的每一道真题通过“分析”，“精解”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精解”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别．

“考试热点分析”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的常常现身于试题中的，对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试．

我们希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易的翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起作用；在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精解和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力．

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

本书主要由北京邮电大学陈启浩教授完成，寿宇、成文超、张利霞、杨友云等老师也参与了部分编写工作．

欢迎同学们对本书提出任何建议和意见，请发邮件到 cqhshuxue@gmail.com，非常感谢！

编　者

目　录

B　十年真题精解

一、2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题精解

一、选择题

(1)

分析 分别确定曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直和非铅直渐近线的条数即可.

精解 y 在点 $x=-1$，1 处无定义，但

$$\lim_{x\to-1}y=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to1}y=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\infty,$$

所以，所给曲线只有一条铅直渐近线 $x=1$. 此外，由

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{(x^2-1)x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1$$

知，所给曲线只有一条非铅直渐近线 $y=1$(它为水平渐近线).

因此本题选(C).

附注 斜渐近线 $y=ax+b$ 的计算公式是 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=0,b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=0$.

(2)

分析 按导数定义计算 $y'(0)$.

精解 由于 $y(0)=0$，所以

$$y'(0)=\lim_{x\to0}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)$$
$$=1\cdot(-1)(-2)\cdots[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

因此本题选(A).

附注 用以下方法也可计算 $y'(0)$：

由于 $y'(x)=\{(e^x-1)[(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)]\}'$

$$=e^x(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]',$$

所以，$y'(0)=1\cdot(-1)(-2)\cdots[-(n-1)]+0\cdot[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]'\big|_{x=0}$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

(3)

分析 逐一考虑选项的正确性，直到获得正确选项为止.

精解 对选项(A)，记 $f(x,y)=|x|+|y|$，则它在点(0,0)处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=1$，则由 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 不存在知，$f(x,y)$ 在点(0，0)处不可微. 所以(A)不能选.

对选项(B)，由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，且 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续知，$x\to 0, y\to 0$ 时，

$$f(x,y)=f(0,0)+o(x^2+y^2)=f(0,0)+0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

即此时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微．

因此本题选(B)．

附注 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的定义如下：

设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义．如果

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}),$$

其中 A，B 是常数，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微．

(4)

分析 画出函数 $y=e^{x^2}\sin x$ 在 $[0,3\pi]$ 上的概图，就可由定积分的几何意义得到正确选项．

精解 函数 $y=e^{x^2}\sin x$ 在 $[0,3\pi]$ 上的概图如图 B-12-1 所示，由图可知，

$$I_1=D_1 \text{ 的面积},$$

$$I_2=D_1 \text{ 的面积}-D_2 \text{ 的面积},$$

$$I_3=D_1 \text{ 的面积}-D_2 \text{ 的面积}+D_3 \text{ 的面积}.$$

于是有 $I_2<I_1$．此外，由 D_3 的面积 $>D_2$ 的面积知 $I_3>I_1$，所以有

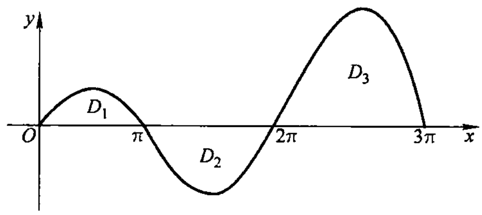

图 B-12-1

$$I_2<I_1<I_3.$$

因此本题选(D)．

附注 D_3 的面积 $>D_2$ 的面积可从图中看出，也可证明如下：

$$D_3 \text{ 的面积}=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\,dx \xlongequal{\text{令 } t=x-\pi} \int_{\pi}^{2\pi}-e^{(t+\pi)^2}\sin t\,dt$$

$$>\int_{\pi}^{2\pi}-e^{t^2}\sin t\,dt=D_2 \text{ 的面积}.$$

(5)

分析 只要在 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 中找到三个向量，以它们为列向量的矩阵的行列式为零即可．

精解 由于

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0,$$

所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关．

因此本题选(C)．

附注 判别 n 个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性相关性的快捷方法是，构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关．

(6)

分析　利用 $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$即可算出 $Q^{-1}AQ$.

精解　由于 $Q=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

所以，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

因此本题选(B).

附注　本题也可用以下方法快捷计算：

由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$知，$\alpha_1$，$\alpha_2$ 是 A 的对应特征值 $\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量，所以 $\alpha_1+\alpha_2$，α_2 也是 A 的对应特征值 $\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量，因此，对于 $Q=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$有

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

(7)

分析　写出$(X,\ Y)$的概率密度$f(x,\ y)$，然后计算 $\iint\limits_{x\leqslant y}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 即可．

精解　X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases},f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0\end{cases},$$

所以，由 X 与 Y 相互独立得$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-4y} & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & 其他．\end{cases}$$

由此得到，$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{0\leqslant x<y}4\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}4\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}(-\mathrm{e}^{-4y})\Big|_{y=x}^{y=+\infty}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-5x} dx = \frac{1}{5}.$$

因此本题选(A).

附注 设(X,Y)是连续型随机变量,D是平面区域,要计算概率$P((X,Y)\in D)$,应先确定二维随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)$,然后计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(8)

分析 两段木棒的长度分别为X与$1-X$,其中$X\sim U(0,1)$由此即可算出两段木棒长度的相关系数.

精解 设其中一段木棒长为X,则$X\sim U(0,1)$,且另一段木棒长为$Y=1-X$,容易知道

$$D(Y) = D(1-X) = D(X) = \frac{1}{12} \neq 0,$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \mathrm{Cov}(X,1-X) = \mathrm{Cov}(X,-X) = -DX.$$

所以,两段木棒长度的相关系数$\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}} = -1.$

因此本题选(D).

附注 本题可按以下结论快捷算得$\rho_{XY}=-1$.

设X,Y是随机变量,如果存在常数a,b,使得$P\{Y=aX+b\}=1$,则X与Y的相关系数为

$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1,\text{当 } a>0(\text{此时称 } X \text{ 与 } Y \text{ 正向关}), \\ -1,\text{当 } a<0(\text{此时称 } X \text{ 与 } Y \text{ 负相关}). \end{cases}$$

二、填空题

(9)

分析 从求解二阶常系数齐次线性微分方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$入手求$f(x)$的表达式.

精解 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$是二阶常系数齐次线性微分方程,它的特征方程$r^2+r-2=0$有根$r=1,-2$,所以通解为

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}. \tag{1}$$

将式(1)代入$f''(x)+f(x)=2e^x$得

$$2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x,$$

所以$C_1=1$,$C_2=0$,将它们代入式(1)得$f(x)=e^x$.

附注 本题也可以按以下方法计算$f(x)$的表达式:

由$f''(x)+f(x)=2e^x$得$f''(x)=2e^x-f(x)$.将它代入$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$得

$$f'(x)-3f(x) = -2e^x(\text{一阶线性微分方程}),$$

它的通解为
$$f(x) = e^{3x}(C+e^{-2x}) = Ce^{3x}+e^x \tag{2}$$

将式(2)代入$f''(x)+f(x)=2e^x$得$C=0$.将它代入式(2)得$f(x)=e^x$.

(10)

分析 先令$t=x-1$,将积分区间转换成对称区间$[-1,1]$,然后积分.

精解 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx \xlongequal{令 t=x-1} \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}\,dt$

$$= \int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt（由于 t\sqrt{1-t^2} 是奇函数，\sqrt{1-t^2} 是偶函数）$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi.$$

附注　本题解答有两点值得注意.

(i) 令 $t=x-1$ 使积分区间转换成对称区间$[-1,1]$，然后利用对称区间上的定积分性质计算；

(ii) 利用定积分的几何意义得 $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\pi$.

以上两点，使得本题计算十分快捷.

(11)

分析　记 $u=xy+\frac{z}{y}$，为了计算 $\mathbf{grad}u$，需算出$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$,因此从计算 du 入手.

精解　由于 $du = d(xy)+d\frac{z}{y} = xdy+ydx+\frac{ydz-zdy}{y^2}$

$$= ydx+\left(x-\frac{z}{y^2}\right)dy+\frac{1}{y}dz,$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}$. 因此

$$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\bigg|_{(2,1,1)} = \mathbf{grad}u\bigg|_{(2,1,1)} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(2,1,1)}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(2,1,1)}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(2,1,1)}\boldsymbol{k}$$

$$=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

附注　当要同时计算三元可微函数 $f(x,y,z)$ 的三个偏导数时，总是从计算全微分 df 入手，特别是当 f 是 x,y,z 的三元复合函数时，采用这一方法将使计算快捷.

(12)

分析　记 Σ 在 xOy 平面上的投影为 D，则 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant1,\ x\geqslant0,\ y\geqslant0\}$. 本题可从将所给的曲面积分转换成 D 上的二重积分入手.

精解 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS = \iint\limits_{D} y^2\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\Bigg|_{z=1-x-y} d\sigma$

$$= \sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2 d\sigma = \sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2 dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1(1-x)^3dx = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

附注　本题改为 $\iint\limits_{\Sigma^+} y^2 dxdy$（$\Sigma^+$ 是 Σ 的上侧），也是很容易计算的：

$$\iint\limits_{\Sigma^+} y^2 dxdy = \iint\limits_{D} y^2 dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3dx = \frac{1}{12}.$$

(13)

分析 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 可相似对角化，写出它的对角矩阵即可算出 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 的秩.

精解 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是实对称矩阵，所以可相似于对角矩阵$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$，其中，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 的特征值. 显然 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=2.$ (1)

此外，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 知 λ_1，λ_2，λ_3 都是能取值 0 或 1. 因此由式(1)知，λ_1，λ_2，λ_3 中只有一个为0，其余两个都为1，不妨设 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，则

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\sim\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 的秩为2.

附注 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=2$ 的证明如下：

记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3\\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1-x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3\\ -x_2x_1 & 1-x_2^2 & -x_2x_3\\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & 1-x_3^2\end{pmatrix}.$$

由此可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=(1-x_1^2)+(1-x_2^2)+(1-x_3^2)=3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=2$（其中 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\|\boldsymbol{x}\|^2=1$）.

(14)

分析 利用条件概率计算公式求 $P(AB\mid\overline{C})$.

精解 $P(AB\mid\overline{C})=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}$

$=\dfrac{P(AB)}{1-P(C)}$（由 A、C 互不相容知 $AC=\varnothing$，所以 $ABC=\varnothing$，故 $P(ABC)=0$）

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}.$

附注 题解中利用了多个概率计算公式，其中特别是

$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC).$$

三、解答题

(15)

分析 由于 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2\sin^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2}$

$$\geqslant x\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}=x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2,$$

所以，只要证明　$x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0(x\in(-1,1))$即可．

精解　当$x\in[0,1)$时，只要证明$\ln\frac{1+x}{1-x}-x\geqslant 0$即可，为此作辅助函数$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，则$f(x)$在$[0,1)$上连续，在$(0,1)$内可导且

$$f'(x)=\frac{2}{1-x^2}-1=\frac{1+x^2}{1-x^2}>0,$$

所以在$[0,1)$上$f(x)\geqslant f(0)$，即$\ln\frac{1+x}{1-x}-x\geqslant 0$，从而$x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0$.

由于上述不等式左边是偶函数，因此$x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0$在$(-1,1)$上成立．由此推得

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geqslant 0(-1<x<1),$$

即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1).$$

附注　不先化简而直接证明题中不等式是比较复杂的，故对它作两次化简：

（ⅰ）将欲证的不等式$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geqslant 0(-1<x<1)$左边的函数缩小成$x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2$,故只要证明$x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0(-1<x<1)$即可．

（ⅱ）将x限制在$[0,1)$上，则$x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0$又可进一步化简为$x\ln\frac{1+x}{1-x}-x\geqslant 0$.

有关不等式证明的快捷方法见提高篇第5章．

(16)

分析　按二元函数极值计算方法计算．

精解　由于$f'_x=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$f'_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

所以由$\begin{cases}f'_x=0,\\ f'_y=0,\end{cases}$即$\begin{cases}1-x^2=0,\\ xy=0\end{cases}$得$f(x,y)$的可能极值点为$(1,0)$和$(-1,0)$.

由　$A=f''_{xx}=(-3x+x^3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$,

$B=f''_{xy}=-(1-x^2)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$,

$C=f''_{yy}=-x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

可知，$A|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$, $A|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}}>0$,

$(AC-B^2)|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)e^{-\frac{1}{2}}>0$, $(AC-B^2)|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}>0$.

因此$f(x,y)$有极大值$f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$，极小值$f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

附注　设$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，(x_0,y_0)是它的可能极值点，且记$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则(x_0,y_0)是$f(x,y)$的极小值点（极大值点）的充分条件是

$$AC-B^2>0\text{与}A>0(A<0).$$

(17)

分析 用缺项幂级数的收敛域计算方法计算所给幂级数的收敛域，然后将所给幂级数表示成两个幂级数之和：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n},$$

且分别计算这两个幂级数的和函数.

精解 记 $u(x)=\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}(n=0,1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}x^{2n+2}}{\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}}=|x|^2,$$

所以，所给幂级数的收敛区间为$\{x\,||x|^2<1\}=(-1,1)$. 当 $x=-1$，1 时，所给幂级数都成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}$，它的通项极限不为零，所以发散. 因此，所给幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

在$(-1,1)$内，记所给幂级数的和函数为 $s(x)$，则

$$\begin{aligned}s(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n},\\&\xlongequal{记}s_1(x)+s_2(x).\end{aligned}\tag{1}$$

在$(-1,1)$内，

$$\begin{aligned}s_1(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'\\&=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

在$(-1,0)\cup(0,1)$上，

$$\begin{aligned}s_2(x)&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\\&=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right)\\&=\frac{1}{x}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x},\end{aligned}\tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$s(x)=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

此外,由 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 知,$x=0$ 时,$s(x)=3$.

因此，$s(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ 1),\\ 3, & x=0.\end{cases}$

附注　$(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$上的$s_2(x)$也可以按以下方法计算：

$$s_2(x)=\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{2}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

有关幂级数收敛域与和函数的计算方法见提高篇 16.

(18)

分析　写出L的切线方程，建立关于$f(t)$的微分方程，求解得到$f(t)$. 由此即可算得题中无界区域的面积.

精解　由于L在切点为$(x,\ y)=(f(t),\ \cos t)$(即L上对应参数为t的点)的切线方程为

$$Y-\cos t=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_t[X-f(t)],$$

即
$$Y-\cos t=\frac{-\sin t}{f'(t)}[X-f(t)],$$

所以它与x轴的交点为$\left(\dfrac{\cos t}{\sin t}f'(t)+f(t),\ 0\right)$，因此由题设得

$$\left[\frac{\cos t}{\sin t}f'(t)+f(t)-f(t)\right]^2+(0-\cos t)^2=1,$$

即
$$[f'(t)]^2=\tan^2 t-\sin^2 t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，由$f'(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$得

$$f'(t)=\sqrt{\tan^2 t-\sin^2 t}=\sec t-\cos t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right).$$

从而　$f(t)=f(0)+\displaystyle\int_0^t(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right).$

显然，当$t\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$时，$x=f(t)=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t\to+\infty$. 故位于曲线$L$，$x$轴与$y$轴之间的区域是无界区域，记它为$G$，则

$$G\text{的面积}=\int_0^{+\infty}y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\mathrm{d}f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

附注　顺便画出L的概图.

L通过点$(0,\ 1)$.

由 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-\sin t}{f'(t)}=-\frac{\sin t}{\sec t-\cos t}=-\cot t<0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$
知曲线 L 对应的函数单调减少．

由 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\csc^2 t}{\sec t-\cos t}>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$
知，曲线 L 是凹的．因此 L 如图 B-12-2 所示，G 如图中阴影部分所示．

本题是综合题，有关内容与方法见提高篇 09，18.

(19)

分析 画出 L 的图形，然后用格林公式计算曲线积分 J.

精解 L 如图 B-12-3 所示，由图可知，

$$J=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$
$$=\oint_{L+\overline{AO}}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{\overline{AO}}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y,\tag{1}$$

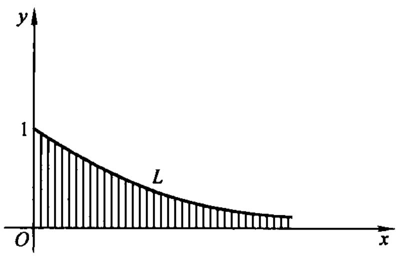

图 B-12-2

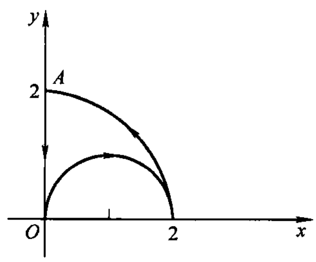

图 B-12-3

其中 $$\oint_{L+\overline{AO}}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_D\left[\frac{\partial(x^3+x-2y)}{\partial x}-\frac{\partial(3x^2y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma$$
（其中 D 是由闭曲线 $L+\overline{AD}$ 围成的闭区域）
$$=\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2},\tag{2}$$
$$\int_{\overline{AO}}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y=\int_2^0-2y\mathrm{d}y=4.\tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得
$$J=\frac{\pi}{2}-4.$$

附注 关于坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，当 L 不是闭曲线时，适当添上一段曲线 L，使得 $L+L_1$ 是闭曲线（不妨设为正向），由此即可使用格林公式快捷计算 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+$