



北京市高等教育精品教材立项项目

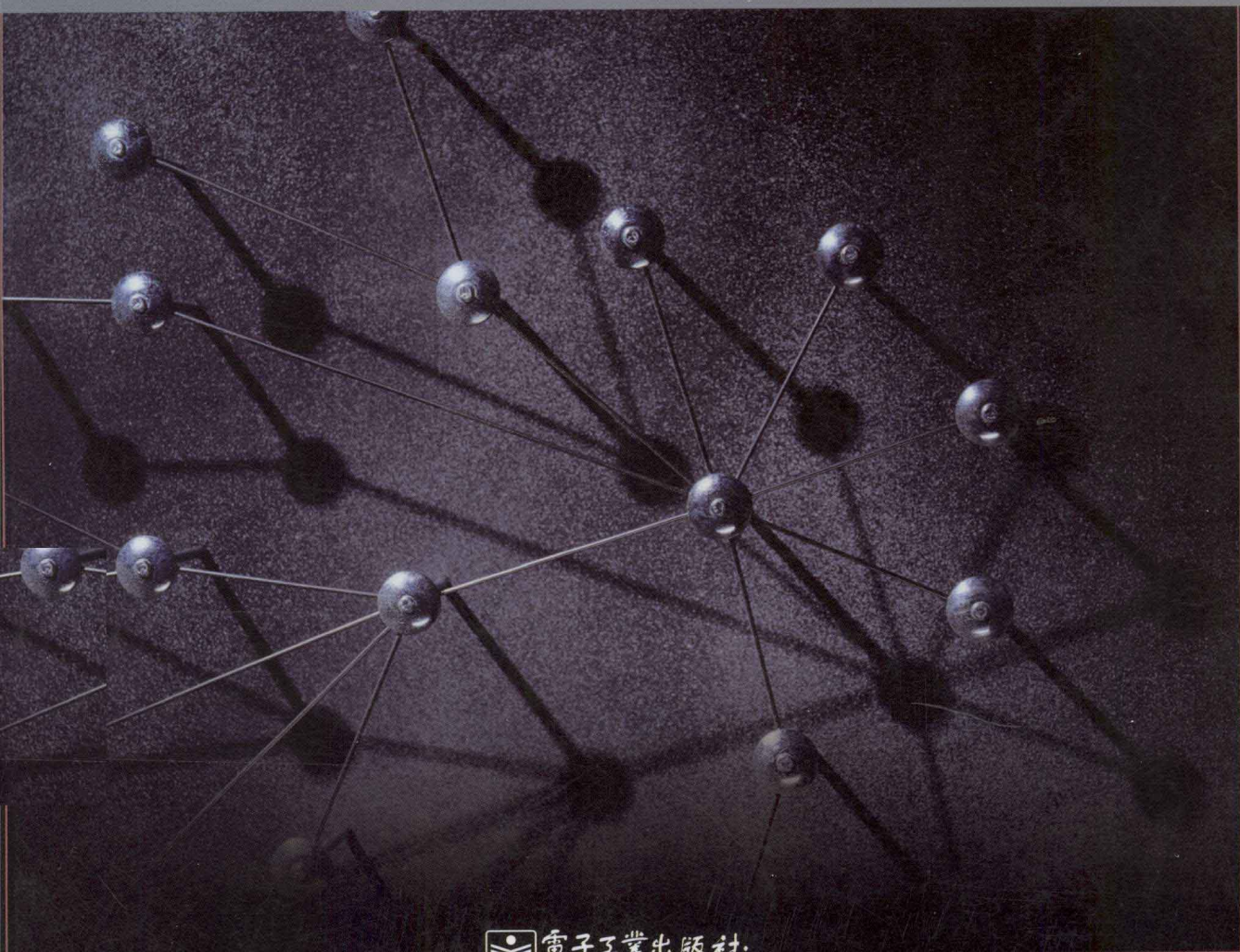


高等院校精品教材系列·工程力学模块化系列教材

Kinematics and Dynamics

运动学与动力学

© 汪越胜 税国双 主编



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

北京市高等教育精品教材立项项目

高等院校精品教材系列·工程力学模块系列教材

运动学与动力学

汪越胜 税国双 主编

金 明 副主编

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书为国家精品课程配套教材,根据教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制定的“理论力学课程教学基本要求(A类)”编写而成。全书共7章,分别阐述了运动学与动力学的基础理论和方法,内容包括点的运动及刚体的简单运动、点的合成运动、刚体的平面运动、虚位移原理、质点系动力学普遍定理、达朗贝尔原理、动力学普遍方程与拉格朗日方程及附录,重点介绍了最具有理论力学课程特点的基本内容,以不同层次和角度论述了基本概念、基本公式和基本方法。

本书可作为高等院校土建类、机电类相关专业的理论力学教材,也可供高职、高专及成人教育各专业理论力学课程使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容
版权所有·侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

运动学与动力学 / 汪越胜, 税国双主编. —北京: 电子工业出版社, 2011.10

高等院校精品教材系列·工程力学模块化系列教材

ISBN 978-7-121-14764-7

I. ①运… II. ①汪… ②税… III. ①运动学—高等学校—教材②动力学—高等学校—教材 IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 203714 号

策划编辑: 余 义

责任编辑: 余 义

印 刷: 北京市李史山胶印厂

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 12 字数: 323 千字

印 次: 2011 年 10 月第 1 次印刷

印 数: 3000 册 定价: 24.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

序

力学是大多数工程科学,如土木工程、机械工程、材料工程、航空航天、能源动力、交通运输、化工等的基础,是工科学生学习专业知识和技能的基础课程。不仅如此,力学还有着不同于其他学科的思维方式,是理工科学生应普遍接受的思维训练之一。

目前,我校的“工程力学”课程被评为国家级精品课程。经过多年的教学实践,并根据教育部力学课程指导委员会组织讨论的教学基本要求和各专业的培养目标、培养计划,进行了从课程体系、教学内容到教学方法、教学手段等全方位的改革,现已形成了一个针对不同专业的、分层次的课程体系。例如,对于土木类的专业,根据其专业特点及后续课程的需求,强调静力学和材料力学部分的知识;而对于机电类的专业,则更加注重运动学、动力学等知识;对于其他短学时的课程,则着重于静力学和材料力学最基础的知识。同时,还从学生的实际情况出发,实行分级教学:A级为优秀学生班级,重点培养拔尖人才;B级为一般水平学生班级,教学要求比教育部颁布的基本要求稍高;C级为基础及能力较差的学生班级,课程教学按教育部颁布的教学基本要求执行。

为了适应不同专业的需求,一般是编写不同的教材;而对于不同层次的分级教学,则主要由老师根据实际情况做出不同的取舍。针对这种情况,我们编写了这套适用于不同专业和层次的工程力学模块化的教材,共分为4册:第1册为《静力学》;第2册为《运动学和动力学》;第3册为《材料力学I》,包括材料力学的基础部分内容;第4册为《材料力学II》,包括材料力学的扩展内容。不管什么专业,只要是有力学教学的需要,都可以通过自行选择不同的分册来得到满足。例如,对于土木类可选择第1~3册和第4册部分内容;机电类可选择第1~3册;其他工科短学时可选择第1,3册;数理学科的学生学习经典力学,则可选择第1,2册。在每册中还可灵活取舍内容,根据学生对先修课程掌握的情况而进行分级教学。

除了上面提到的模块化特点以外,本套教材的编写还突出了以下特色。

(1) **由浅入深,不断强化。**每部分内容都采取由浅入深的讲述方式,便于自学和理解。但在后续讲述中会不断将前面内容系统化,并强调后续内容与先期内容的联系。

(2) **明确知识要点,加强知识点的联系。**工程力学中的知识点很多,虽然在解决实际的工程问题中最终都会起到作用,但学生在学习过程中对这些知识点的理解却是相对孤立的。因此,站在一定的高度,阐明各知识点之间的联系和最终其所发挥的作用,这将非常有利于学生真正掌握力学的思想和解决问题的能力。

(3) **从力学模型的建立和简化到直接的工程应用。**每部分内容都围绕“力引起物体的运动和变形”这一力学的核心思想,由浅入深地讲述从力学模型的建立、简化直至结果结论的工程应用。采取研究型教学的思想,先提出问题和要达到的目的,再讲述为达目的如何建立数学力学模型并简化。

(4) **强调力学与数学的联系。**包括力学模型的数学化、数学公式的力学图像解释和理解。

(5) **定量和定性分析相结合。**通过例题和习题,在定量分析结果的基础上尽可能总结出定性的结论,以帮助学生加强对力学概念的理解,以及获取直接的工程经验。

(6) 习题分级。将习题分成三级：基本题、提高题、研究型题，以适应不同专业、不同层次的学生。

限于编者的水平，本套教材作为尝试，自然在某些方面会存在不足和疏漏，恳请有关专家、教师、学生随时提出批评和建议，以便我们改进和提高。

编者 (yswang@bjtu.edu.cn)

2011 年于北京交通大学

前 言

动力学是研究物体机械运动一般规律的一门学科。研究物体机械运动的普遍规律涉及物体运动的变化、作用于物体的力及物体的质量等，因此动力学问题比静力学问题更为复杂。为了便于“循序渐进，由浅入深”地学习，本教材第 1 章至第 3 章介绍了运动学的知识，从第 4 章起再进一步研究物体的运动的变化与作用在物体上的力之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律。

在本教材的编写中，将动力学普遍定理的教学内容列为一章，先讲授质点系的动量定理和动量矩定理，以及在刚体平面运动动力学分析中的应用；然后讲述质点系的动能定理和机械能守恒；最后介绍普遍定理的综合应用及在碰撞过程中的应用。与目前普遍采用的分章节介绍质点和质点系的动量定理、动量矩定理和动能定理的编排体系相比，这样安排的特点在于：突出了动力学普遍定理在“刚体平面运动”这一动力学核心内容中的应用，加强了碰撞与动力学普遍定理的联系，避免了理论力学课程中该部分教学内容与普通物理有关内容的重复。

此外，本教材还注重数学知识在力学课程中的应用，加强解析法及相关原理的数学推导，适当地补充、复习数学知识。同时，对个别地方较复杂的数学计算，适当引入了利用 MATLAB 求解问题的内容，希望能够引导学生培养结合计算机解决力学问题的能力。

本教材的所有章节首先由税国双执笔完成草稿，然后由汪越胜与税国双共同商议调节了个别内容安排，并对草稿进行了仔细全面的修改；金明也对草稿进行了许多修改。在编写过程中，参考了相关理论力学系列的教材，编者在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者 (gsshui@bjtu.edu.cn)

目 录

第 1 章 点的运动及刚体的简单运动	(1)
1.1 点的运动	(1)
1.1.1 矢量法	(1)
1.1.2 直角坐标法	(2)
1.1.3 自然坐标法	(5)
1.2 刚体的平动	(10)
1.3 刚体绕定轴的转动	(11)
本章小结	(16)
思考题	(17)
习题	(17)
第 2 章 点的合成运动	(20)
2.1 绝对运动、相对运动和牵连运动	(20)
2.2 点的运动方程合成——三种运动方程间的关系	(21)
2.3 点的速度合成定理——三种运动速度间的关系	(24)
2.4 点的加速度合成定理——三种运动加速度间的关系	(30)
本章小结	(38)
思考题	(39)
习题	(40)
第 3 章 刚体的平面运动	(43)
3.1 刚体的平面运动方程及运动分解	(43)
3.2 平面运动刚体上各点的速度分析	(45)
3.2.1 基点法	(45)
3.2.2 速度投影定理法	(46)
3.2.3 瞬时速度中心法	(48)
3.3 平面运动刚体上各点的加速度分析	(52)
3.4 运动学综合应用	(59)
本章小结	(66)
思考题	(66)
习题	(68)
第 4 章 虚位移原理	(72)
4.1 约束、虚位移、虚功	(72)
4.2 虚位移原理	(78)
4.3 广义力和平衡条件	(88)
本章小结	(92)

思考题	(93)
习题	(94)
第 5 章 质点系动力学普遍定理	(96)
5.1 质点动力学基本方程	(96)
5.2 质点系的动量定理	(98)
5.2.1 动量定理	(98)
5.2.2 质心运动定理	(100)
5.3 质点系的动量矩定理	(103)
5.3.1 动量矩定理	(103)
5.3.2 刚体定轴转动的微分方程	(107)
5.4 刚体平面运动微分方程	(109)
5.5 质点系的动能定理	(116)
5.5.1 动能定理	(116)
5.5.2 机械能守恒定律	(126)
5.6 普遍定理的综合应用	(128)
5.7 碰撞	(132)
本章小结	(137)
思考题	(138)
习题	(140)
第 6 章 达朗贝尔原理	(145)
6.1 质点的达朗贝尔原理	(145)
6.2 质点系的达朗贝尔原理	(146)
6.3 刚体惯性力系的简化	(149)
6.4 绕定轴转动刚体的轴承动约束力	(156)
本章小结	(158)
思考题	(159)
习题	(159)
第 7 章 动力学普遍方程与拉格朗日方程	(162)
7.1 动力学普遍方程	(162)
7.2 拉格朗日方程	(163)
7.3 拉格朗日方程的初积分	(169)
本章小结	(171)
习题	(172)
附录 A 常见均质物体的转动惯量和回转半径	(173)
附录 B MATLAB 程序	(175)
附录 C 习题参考答案	(176)
参考文献	(181)

第1章

点的运动及刚体的简单运动

点的运动主要研究动点相对于某一个参考系的任意曲线运动，包括点的运动方程、运动轨迹、位移、速度和加速度等。点的运动学既是研究一般物体运动的基础，又可直接应用于工程实际中。描述点的运动有多种方法，本章将介绍常见的矢量表示法、直角坐标表示法和自然坐标表示法。

刚体的平动（translation）和定轴转动（fixed axis rotation）称为刚体的基本（简单）运动。刚体的基本运动是刚体运动的最简单形式，是不可分解的基本运动形态。刚体的复杂运动均可分解成若干基本运动的合成。

1.1 点的运动

点的运动主要有直线运动（rectilinear motion）和曲线运动（curvilinear motion）两种形式。曲线运动又可分为平面曲线运动和空间曲线运动。下面介绍常见的描述点的运动的矢量法、直角坐标法和自然坐标法。

1.1.1 矢量法

运动方程

设动点 M 在空间做曲线运动，如图 1-1 所示。选取参考系上某一个确定点 O 为坐标原点，由点 O 向动点 M 作矢量 $\mathbf{r}$ ，称为该动点对于原点 O 的位置矢量（position vector）或矢径。当动点 M 运动时，矢径 $\mathbf{r}$ 的大小和方向都随时间而变，并且是时间 t 的单值连续函数，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-1)$$

这就是用矢量表示的点的运动方程（equation of motion）。它表明了动点在空间的位置随时间变化的规律。点 M 在运动过程中，其位置矢量的端点描绘出一条连续曲线，称为位置矢端图（hodograph of position vector）。显然，位置矢端图就是点 M 的运动轨迹（trajectory）。

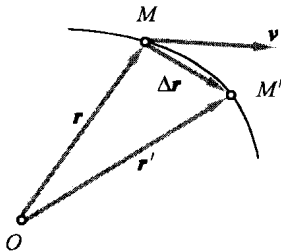


图 1-1 点的运动

速度

设点沿图1-1所示的轨迹运动, t 瞬时位于点 M , 用矢径 $\mathbf{r}(t)$ 描述; $t + \Delta t$ 瞬时位于点 M' , 用矢径 $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ 描述。在 Δt 时间间隔内, 点的位移为 $\Delta \mathbf{r}$, 即矢径在 Δt 内的增量为 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$, 则在 Δt 内点 M 的平均速度为 $\mathbf{v}^* = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, 方向沿 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均速度的极限值称为动点在瞬时 t 的速度 (velocity), 即

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1-2)$$

这表明, 点的速度等于它的矢径对于时间的一阶导数, 其方向沿点 M 的切线方向。

加速度

在 Δt 时间间隔内, 点的运动速度由 $\mathbf{v}(t)$ 改变为 $\mathbf{v}(t + \Delta t)$, 速度的改变量为 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$, 则称 $\mathbf{a}^* = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 为点 M 在 Δt 内的平均加速度, 其方向沿 $\Delta \mathbf{v}$ 的方向。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均加速度的极限值称为点在瞬时 t 的加速度 (acceleration), 即

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1-3)$$

这表明, 点的加速度等于其速度对于时间的一阶导数, 也等于其矢径对于时间的二阶导数。点的加速度也是一个矢量。如果把不同瞬时点的速度矢量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \dots$ 平行移动到同一出发点 O_1 (任选), 如图 1-2(a)和(b)所示, 这些速度矢量的末端将描绘出一条连续的曲线, 称之为速度矢端图 (hodograph of velocities), 如图 1-2(c)所示。

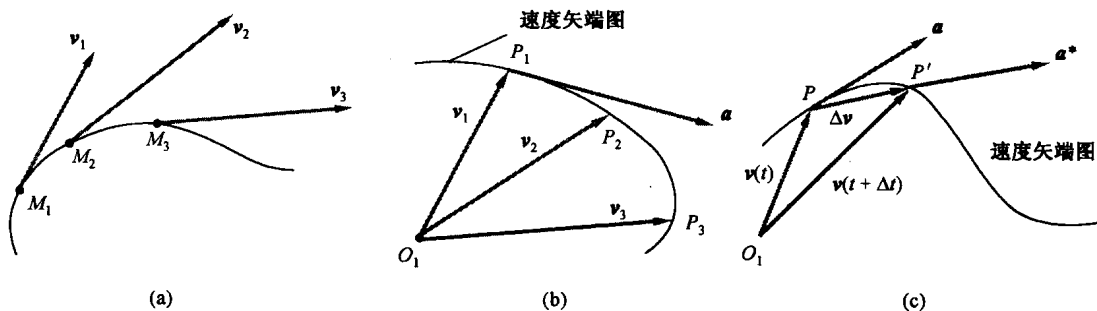


图 1-2 速度矢端图

1.1.2 直角坐标法

当点的运动轨迹未知时, 常用直角坐标法描述点的运动规律。

运动方程

取直角坐标系 $Oxyz$, 如图 1-3 所示。点 M 在运动过程中, 其坐标 x, y, z 随时间变化。

矢径 $\mathbf{r}$ 与直角坐标 x, y, z 有如下关系:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-4)$$

由于 $\mathbf{r}$ 为时间的单值连续函数, 所以 x, y, z 也是时间的单值连续函数, 即

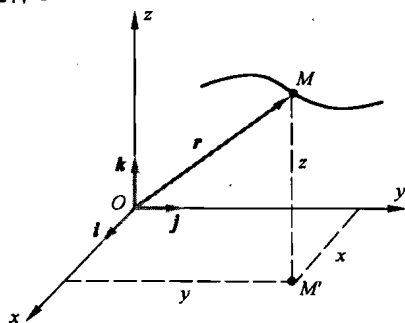


图 1-3 用直角坐标表示点的运动

$$x = f_1(t) = x(t), \quad y = f_2(t) = y(t), \quad z = f_3(t) = z(t)$$

上式是以时间 t 为参数的方程, 称为动点以直角坐标表示的运动方程。它确定了任意一个瞬时点 M 在空间的位置, 若消去参数 t , 则得到关于 x, y, z 的函数方程为

$$f(x, y, z) = 0 \quad (1-5)$$

即为动点的轨迹方程。

速度

将式(1-4)代入式(1-2), 由于三个沿定坐标轴的单位矢量 i, j, k 为常矢量, 故有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

设速度 $\mathbf{v}$ 在直角坐标轴上的投影为 v_x, v_y, v_z , 分别表示沿 x, y, z 方向的速度分量, 则

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

所以, 可得

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (1-6)$$

因此, 速度在各直角坐标轴上的投影等于动点各对应坐标对时间的一阶导数, 其大小为

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

加速度

将式(1-6)代入式(1-3), 并设 a_x, a_y, a_z 为加速度在直角坐标轴上的投影, 则

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (1-7)$$

且有

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

因此, 加速度在各直角坐标轴上的投影等于动点的各对应坐标对时间的二阶导数, 其大小为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

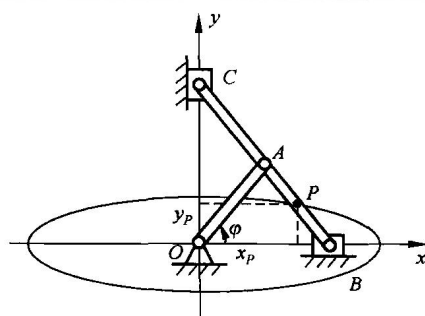
例题 1-1

椭圆规机构如例题图 1-1(a)所示。曲柄 OA 以等角速度 ω 绕 O 转动, 通过连杆 BC 带动滑块 B, C 在水平和铅垂槽内运动, $OA = AB = AC = l$ 。求:

- (1) 连杆上点 P ($BP = r$) 的运动方程;
- (2) 点 P 的速度与加速度。

分析: 由于点 P 在平面内的运动轨迹未知, 故建立如例题图 1-1(a)所示的直角坐标系 Oxy 来描述运动。

解:



例题图 1-1(a)

(1) 求点的运动方程。

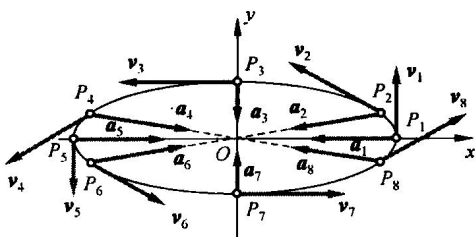
点 P 是连杆 BC 上的一点；该杆两端分别被限制在水平和铅垂方向运动；曲柄做等角速转动，且 $\varphi = \omega t$ 。由此，可写出点 P 的运动方程为

$$\begin{cases} x = (2L - r)\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases}$$

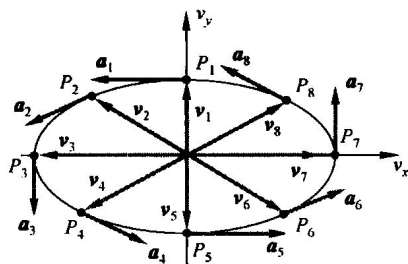
消去时间 t ，得轨迹方程为

$$\left(\frac{x}{2L-r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

这是一个椭圆方程，如例题图 1-1(b)所示。



例题图 1-1(b)



例题图 1-1(c)

(2) 求点的速度与加速度。

对运动方程求导，得

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -(2L - r)\omega \sin\omega t \\ v_y = \dot{y} = r\omega \cos\omega t \end{cases}, \quad \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -(2L - r)\omega^2 \cos\omega t \\ a_y = \ddot{y} = -r\omega^2 \sin\omega t \end{cases}$$

讨论：

(1) 注意到前面求出的加速度分量式有

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 x \\ a_y = -\omega^2 y \end{cases}$$

因此有

$$\mathbf{a}_P = -\omega^2 \mathbf{r}$$

即 $\mathbf{a}_P$ 永远指向点 O 。

(2) 画速度端图，由速度方程消去时间 t ，得

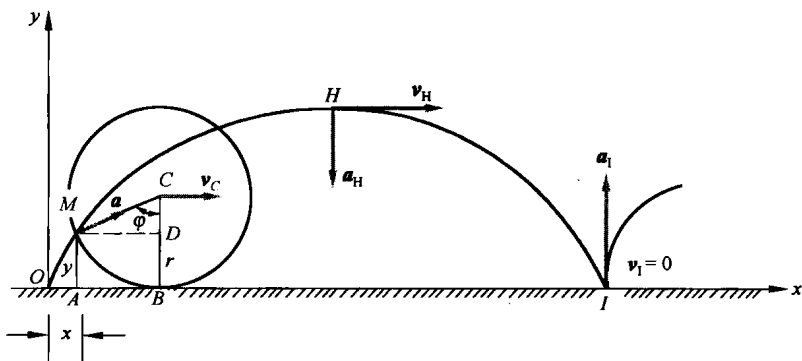
$$\left[\frac{v_x}{-(2L-r)\omega}\right]^2 + \left(\frac{v_y}{r\omega}\right)^2 = 1$$

这也是椭圆方程，如例题图 1-1(c)所示。可以看出，加速度沿速度矢量端图的切线方向，且知 $P_1 \rightarrow P_3$ 加速， $P_3 \rightarrow P_5$ 减速， $P_5 \rightarrow P_7$ 加速， $P_7 \rightarrow P_1$ 减速。

例题 1-2

半径为 r 的圆轮沿水平直线轨道滚动而不滑动（称为纯滚动），轮心 C 在与轨道平行的直线上运动。设轮心 C 的速度为一个常量 v_C ，试求轮缘上一点 M 的轨迹、速度和加速度。

分析: 由于点 M 在平面内的运动轨迹未知, 故建立如图 1-2 所示的直角坐标系 Oxy 来描述运动。



例题图 1-2

解:

取 $\varphi=0$ 时点 M 与直线轨道的接触点 O 为原点, 建立直角坐标系 Oxy , 如例题图 1-2 所示。当轮子转过 φ 时, 轮子与直线轨道的接触点为 B 。由于是纯滚动, 故有

$$OB = \widehat{MB} = r\varphi$$

于是, 用直角坐标表示的点 M 的运动方程为

$$\begin{cases} x = OB - CM \sin \varphi = r(\omega t - \sin \omega t) \\ y = CB - CM \cos \varphi = r(1 - \cos \omega t) \end{cases} \quad (a)$$

将式(a)对时间求导, 即得点 M 的速度沿坐标轴的投影为

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = r\omega(1 - \cos \omega t) \\ v_y = \dot{y} = r\omega \sin \omega t \end{cases}$$

于是, 点 M 的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \sqrt{2 - 2\cos \omega t} = 2r\omega \sin \frac{\omega t}{2}$$

进一步, 可得点 M 的加速度为

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = r\omega^2 \sin \omega t \\ a_y = \ddot{y} = r\omega^2 \cos \omega t \end{cases}$$

其大小为

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = r\omega^2$$

讨论:

(1) 运动方程式(a)实际上也是点 M 运动轨迹的参数方程(以 t 为参变量), 这是一个摆线(或称为旋轮线)方程。因此, 点 M 的运动轨迹是摆线。

(2) 请读者分析当点 M 到达最高位置 H 时, 以及当点 M 到达最低位置 I 时, 其速度、加速度的大小和方向如何。

1.1.3 自然坐标法

在实际工程及现实生活中, 动点的轨迹往往是已知的, 如运行的列车、运转机器上的某一点等。此时, 便可利用点的运动轨迹建立弧坐标及自然轴坐标系, 并以此来描述和分析点的运动。

运动方程

设动点 M 沿已知轨迹运动, 在曲线轨迹上任选一个参考点 O 作为原点, 并设原点 O 的某一侧为正向, 另一侧为负向, 如图 1-4 所示, 则点 M 在轨迹上任意一点瞬时的位置就可以用从点 O 沿轨迹所度量的弧长 $\widehat{OM}$ 加以正负号来确定。规定了正负号的弧长便称为点 M 的弧坐标(arc coordinate of a directed curve), 以 s 表示。显然, 点 M 运动时弧坐标 s 是时间 t 的单值连续函数, 即

$$s = f(t) \quad (1-8)$$

式(1-8)表示了动点沿已知轨迹的运动规律, 称为动点以弧坐标表示的运动方程。

速度

如图 1-5 所示, 设动点在瞬时 t 位于曲线上的点 M , 其弧坐标为 s , 经过时间间隔 Δt 后, 动点运动到曲线的点 M' , 弧坐标的增量为 Δs , 其弧坐标为 $s' = s + \Delta s$, 矢径的增量为 $\Delta \mathbf{r}$ 。根据式(1-2), 并注意 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $\Delta s \rightarrow 0$, 则动点的速度为

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{ds}{dt} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \quad (a)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ (即点 M' 趋近于点 M) 时, $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1$, 而 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向则趋近于轨迹在点 M 的切线方向。若记切线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$, 则有

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \boldsymbol{\tau}$$

其中, $\boldsymbol{\tau}$ 指向弧坐标 s 增加的方向, 代入式(a)则可得动点的速度为

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} \quad (1-9)$$

式(1-9)表明, 动点的速度是一个矢量, 其大小 v 等于弧坐标对时间的一阶导数, 方向沿曲线的切线方向, 用单位向量 $\boldsymbol{\tau}$ 表示。

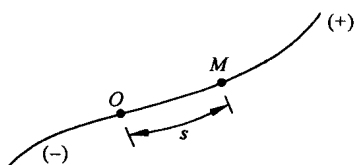


图 1-4 点运动的弧坐标

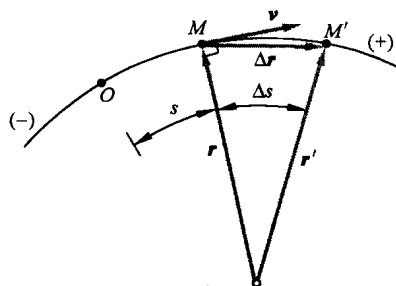


图 1-5 弧坐标下点的速度

加速度

将式(1-9)代入式(1-3), 得动点的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \quad (1-10)$$

由式(1-10)可知, 速度矢的变化率由其大小(代数值 v)的变化率和方向(单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$)的变化率两部分组成。

若动点的轨迹为平面曲线, 设在瞬时 t , 点 M 的切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$, 经时间间隔 Δt , 动点运动至点 M' , 该点的切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}'$, 如图 1-6(a)所示, 切线方向转动了 $\Delta\varphi$ 角, 则在式(1-10)中

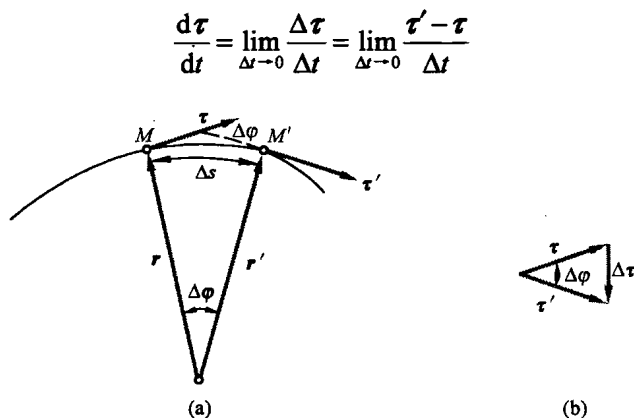


图 1-6 切向矢量对时间的变化率

由图 1-6(b)可知, $\Delta \tau$ 的模为

$$|\Delta \tau| = 2 \cdot |\tau| \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\tau}{dt} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| \cdot \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \\ &= |v| \cdot \frac{1}{\rho} \cdot 1 = \frac{|v|}{\rho} \end{aligned}$$

式中, $\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$ 为轨迹在点 M 的曲率, ρ 为曲率半径。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta \tau$ 的方向趋近于轨迹在点 M 的法线方向, 指向曲率中心。若记指向曲率中心的法线方向单位矢量为 $\mathbf{n}$, 则有

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{n}$$

于是, 有

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (1-11)$$

式中, 右端第一项是反映速度大小变化的加速度, 记为 $\mathbf{a}_\tau$; 第二项是反映速度方向变化的加速度, 记为 $\mathbf{a}_n$ 。因为

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} \quad (1-12)$$

是一个沿轨迹切线的矢量, 因此称为切向加速度 (tangential acceleration)。若 $\frac{dv}{dt} > 0$, 则 $\mathbf{a}_\tau$ 指向轨迹的正向; 若 $\frac{dv}{dt} < 0$, 则 $\mathbf{a}_\tau$ 指向轨迹的负向。令

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$$

则 a_τ 为一个代数量，是加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿轨迹切向的投影。

因为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{n} \quad (1-13)$$

是一个沿轨迹法线指向曲率中心的矢量，因此称为法向加速度（normal acceleration）。令

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

则 a_n 为一个代数量，是加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿轨迹法向的投影，如图 1-7 所示。由 $\boldsymbol{a}$ 的两个正交分量 a_τ, a_n ，可求出 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向为

$$\begin{cases} a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\ddot{s})^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2} \\ \tan \theta = \frac{|a_\tau|}{a_n} \end{cases}$$

式中， θ 为 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$ 的夹角。

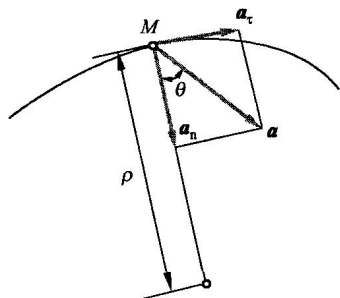


图 1-7 弧坐标下点的加速度

自然轴系

当运动轨迹为空间曲线时，弧坐标系中所得到的结论同样成立，只需将弧坐标系扩展为自然轴系。由于 $\frac{\Delta \boldsymbol{\tau}}{\Delta t}$ 的极限位置位于点 M 与运动轨迹相切

的平面内 [如图 1-6(b)所示]，故这一个平面称为密切面（osculating plane）。通过点 M 可以作出相互垂直的三条直线：轨迹的切线（tangential）与主法线（normal）（二者均位于密切面内）及副法线（binormal）（垂直于密切面）。沿切线、主法线和副法线三个方向的单位矢量分别记为 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ，如图 1-8 所示。 $\boldsymbol{\tau}$ 指向弧坐标增加的方向； $\boldsymbol{n}$ 指向曲率中心； $\boldsymbol{b}$ 的方向由 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$ 确定。上述三条相互

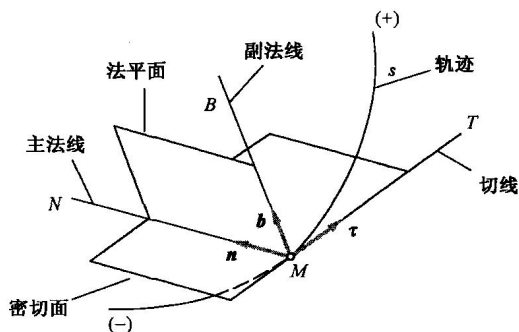


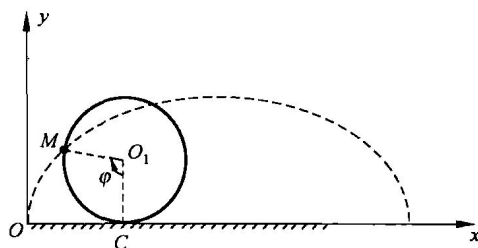
图 1-8 自然轴系

正交的轴线构成了随时间变化的直角坐标系，称为自然轴系（trihedral axes of a space curve）。前面关于速度和加速度的公式在自然轴系中均成立，其中加速度在副法线方向的投影恒为零。

例题 1-3

半径为 r 的轮子沿直线轨道无滑动地滚动（即纯滚动）；设轮子转角 $\varphi = \omega t$ （ ω 为常值），如例题图 1-3 所示。求用弧坐标表示的轮缘上任意一点 M 的运动方程，并求该点的速度、切向加速度及法向加速度。

分析：在例题 1-2 中，已经得到了在直角坐标系中点 M 的速度沿坐标轴的投影为



例题图 1-3

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = r\omega(1 - \cos\omega t) \\ v_y = \dot{y} = r\omega\sin\omega t \end{cases} \quad (a)$$

以及点 M 的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{2 - 2\cos\omega t} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2} \quad (b)$$

下面利用弧坐标法求轮缘上任意一点 M 的运动方程、速度、切向加速度及法向加速度。

解:

取 M 的起始点 O 作为弧坐标原点, 将式(b)的速度 v 对时间积分, 即得用弧坐标表示的运动方程为

$$s = \int_0^t 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2} dt = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right), \quad (0 \leq \omega t \leq 2\pi)$$

再将式(a)对时间求导, 即得加速度在直角坐标系上的投影为

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = r\omega^2 \sin\omega t \\ a_y = \ddot{y} = r\omega^2 \cos\omega t \end{cases}$$

由此, 得到全加速度大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

将式(b)对时间求导, 即得点 M 的切向加速度为

$$a_t = \dot{v} = r\omega^2 \cos\frac{\omega \cdot t}{2}$$

和法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = r\omega^2 \sin\frac{\omega \cdot t}{2}$$

于是, 由 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 还可进一步求得轨迹的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4r^2\omega^2 \sin^2\frac{\omega t}{2}}{r\omega^2 \sin\frac{\omega t}{2}} = 4r \sin\frac{\omega t}{2}$$

讨论:

请考虑一种特殊情况, 即当 $t = 2\pi/\omega$ 时, $\varphi = 2\pi$, 这时点 M 运动到与地面相接触的位置。由式(b)可知, 此时点 M 的速度为零, 这表明沿地面做纯滚动的轮子与地面接触点的速度为零。另一方面, 由于点 M 全加速度的大小恒为 $r\omega^2$, 因此纯滚动的轮子与地面接触点的速度虽然为零, 但加速度却不为零。于是, 可得

$$a_x = 0, \quad a_y = r\omega^2$$

即接触点的加速度方向向上。