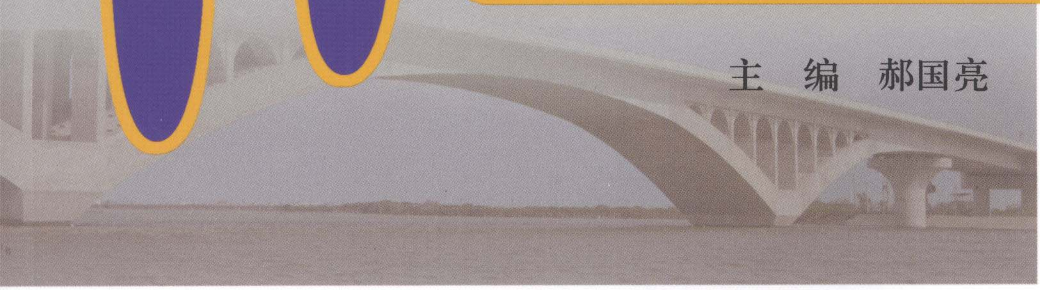
辅导丛书

吴传生主编

经济数学——微积分（第二版）同步辅导及习题全解



主 编 郝国亮

◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解

◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

经济数学——微积分

（第二版）

同步辅导及习题全解

主 编 郝国亮

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版、吴传生主编的《经济数学——微积分》（第二版）配套的同步辅导和习题解答辅导书。

本书共有十一章，分别介绍函数、极限与连续、导数/微分/边际与弹性、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数的基本概念、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数。全书结构按教材内容安排，各章均包括知识网络图、知识点归纳、历年考研真题评析、课后习题全解四部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽、简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习“经济数学——微积分”课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课、命题时参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学．微积分（第二版）同步辅导及习题全解 / 郝国亮主编．-- 北京 : 中国水利水电出版社，2012.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-0048-8

Ⅰ．①经… Ⅱ．①郝… Ⅲ．①经济数学－高等学校－教学参考资料②微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．①F224.0②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第177879号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：张玉玲　加工编辑：李　燕　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **经济数学——微积分（第二版）同步辅导及习题全解**
作　　者	主　编　郝国亮
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　21 印张　563 千字
版　　次	2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	32.80 元

前　言

吴传生主编的《经济数学——微积分》(第二版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出等特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《经济数学——微积分(第二版)同步辅导及习题全解》。本书旨在帮助读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到《经济数学——微积分》(第二版)这门课程的特点,我们在内容上做了以下安排:

1. 知识网络图。系统全面地涵盖了本章的知识点,使学生能一目了然地浏览本章内容的框架结构。

2. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确、有的放矢。

3. 历年考研真题评析。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行详细解答,拓展学生的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

4. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。

由于时间仓促及编者水平有限,书中难免有疏漏之处,敬请各位同行和读者批评指正。

编者

2012 年 7 月

目　　录

第一章

函　　数

知识网络图

- 集合
  - 集合的概念
  - 集合的运算
    - 并集、交集、差集、余集
    - 运算律
  - 区间和邻域
- 映射与函数
  - 映射 $f:x\to y$ 的三个要素：x,y,f
  - 函数的定义
  - 函数的基本性态：奇偶性、周期性、单调性、有界性
- 复合函数与反函数、初等函数
  - 复合函数 $f[g(x)]$
  - 反函数：反函数存在定理
  - 函数的运算：和、差、积、商
  - 五类基本初等函数
- 经济学中的常用函数
  - 需求函数 $Q_d=Q_d(P)$
  - 供给函数 $Q_s=Q_s(P)$
  - 库存函数
  - 成本收益利润函数
  - 戈珀兹曲线 $y=k\cdot a^{b^t}$

知识点归纳

1. 集合的概念

集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体,集合简称**集**. 组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**.

由有限个元素构成的集合,称为**有限集**,由无限多个元素构成的集合,称为**无限集合**.

不含有任何元素的集合称为**空集**.

表示方法:一是列举法,二是描述法.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

2. 集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

设 A,B 是两个集合,则集合

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A\backslash B=\{x|x\in A \text{ 但 } x\notin B\},$$

分别称为 A 和 B 的**并集、交集、差集**.

集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

3. 区间和邻域

实数集$\{x|a<x<b\}=(a,b)$称为**开区间**;$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$称为闭区间;$\{x|a\leqslant x<b\}=[a,b)$,$\{x|a<x\leqslant b\}=(a,b]$称为半开半闭区间,$a,b$ 称为区间的端点.

实数集$\{x||x-a|<\delta,\delta>0\}$,称为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$. 点 a 叫做**邻域的中心**,δ 叫做**邻域的半径**,它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间,如图 1-1 所示.

实数集$\{x|0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 为了方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为 a 的**左 δ 邻域**,把开区间$(a,a+\delta)$称为 a 的**右 δ 邻域**.

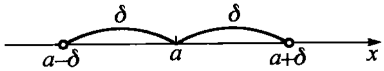


图 1-1

4. 映射的概念

定义 1 设 X,Y 是两个非空集合,若对集合 X 中的每一个元素 x,均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个**映射**,记为 f,或者更详细地写为 $f:X\to Y$.

将 x 的对应元 y 记作 $f(x):x\to y=f(x)$. 并称 y 为映射 f 下 x 的**像**,而 x 称为映射 f 下 y 的**原像**(或称为逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 $D_f=X$,而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y\mid y\in Y,y=f(x),x\in X\}$$

称为映射 f 的值域,记为 R_f(或 $f(X)$).

构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

(1)集合 X,即定义域 $D_f=X$;

(2)集合 Y,即限制值域的范围:$R_f\subset Y$;

(3)对应规则 f,使每个 $x\in X$,有唯一确定的 $y=f(x)$与之对应.

定义 2 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射,若在映射 f 下像的逆像也具有唯一性,即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$,它们的像 y_1 与 y_2 也满足 $y_1\neq y_2$,则称 f 为**单射**,如果映射 f 满足$R_f=Y$,则称 f 为**满射**;如果映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为双射(又称一一映射).

5. 逆映射与复合映射

设 $f:X\to Y$ 是单射,则由定义 2,对任一 $y\in R_f\subset Y$,它的逆像 $x\in X$(即满足方程 $f(x)=y$ 的 x)是唯一确定的,由定义 1,对应关系

$$g:R_f\to X$$
$$y\to x(f(x)=y)$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射,称为 f 的**逆映射**,记为 f^{-1},其定义域为 $D_f^{-1}=R_f$,值域为 $R_f^{-1}=X$.

6. 函数的概念

定义 设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=D$.

7. 函数的基本性态

设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任一个 x,都有 $f(x)=f(-x)$,

则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；如果对于定义域中的任一个 x 有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数．

8. 复合函数

定义 设有函数 f 和 g，$D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则称定义在 $\{x|x\in D_g,g(x)\in D_f\}$ 上函数 $f\circ g$ 为 f 和 g 的**复合函数**，其中 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

对复合函数 $f\circ g$，称 $u=g(x)$ 为**中间变量**，其中 $x\in D_{f\circ g}$ 为**自变量**．

9. 反函数

作为逆映射的特例，我们有以下反函数的概念：

设函数 $f:D\rightarrow f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\rightarrow D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的**反函数**．

定理（反函数存在定理） 单调函数 f 必存在反函数，且其具有与 f 相同的单调性．

10. 函数的运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_1，D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

函数的和(差) $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$.

函数的积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$.

函数的商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D\{x|g(x)=0\}$.

11. 戈珀兹曲线

戈珀兹(Gompertz)曲线是指指数函数 $y=ka^{b^t}$ 所表示的曲线．在经济预测中，经常使用该曲线．

历年考研真题评析

真题 1 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域

逻辑推理 先确定 $\varphi(x)$ 的表达式，再求 $\varphi(x)$ 的定义域．

解题过程 $\because f[\varphi(x)]=1-x$，$\therefore e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

定义域 $\ln(1-x)\geqslant0$，得 $1-x\geqslant1$，即 $x\leqslant0$.

真题 2 设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant1\\0,|x|>1\end{cases}$，则 $f(f(f(x)))$ 等于（ ）.

(A)0 (B)1

(C) $\begin{cases}1,|x|\leqslant1\\0,|x|>1\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0,|x|\leqslant1\\1,|x|>1\end{cases}$

解题过程 $f(x)=\begin{cases}1\\0\end{cases}\Rightarrow|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow f(f(x))=1\Rightarrow f(f(f(x)))=f(1)=1$,因此 B 选项正确.

真题 3 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x},-\infty<x<+\infty$是(　　)

(A)有界函数　　(B)单调函数

(C)周期函数　　(D)偶函数

逻辑推理 函数基本性态的考查,主要是根据定义来判断.

解题过程 $|f(x)|\leqslant|x|\cdot|\sin x|\cdot|e^{\cos x}|\leqslant|x|\cdot 1\cdot e=e|x|$,由于 X 无限制,

则 $f(x)$不是有界函数;

$f(-1)=|-1\cdot\sin(-1)|e^{\cos(-1)}=|1\cdot\sin 1|e^{\cos 1}=f(1)>0,f(0)=0$,

则 $f(x)$不是单调函数;

$f(x)$表达式中 x 不是周期函数,则 $f(x)$不是周期函数;

$f(-x)=|-x\cdot\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\cdot\sin x|e^{\cos x}=f(x)$,则$f(x)$是偶函数.

综上所述,D 选项正确.

课后习题全解

习题 1-1

1. 按下列要求举例:

(1)一个有限集合;　　(2)一个无限集合;

(3)一个空集;　　(4)一个集合是另一个集合的子集.

解题过程 略.

2. 用集合的描述法表示下列集合:

(1)大于 5 的所有实数的集合;

(2)圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合;

(3)抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

知识点窍 集合的描述法,指用数学语言表明集合中元素具有的性质.

解题过程 (1)$\{x|x>5\}$;

(2)$\{(x,y)|x^2+y^2<25\}$;

(3)$\{(x,y)|y=x^2$ 且 $x-y=0\}$.

3. 用列举法表示下列集合:

(1)方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合;

(2)抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;

(3)集合$\{x||x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$

知识点窍 集合的列举法，将所有元素列举出来．

解题过程 (1)$x^2-7x+12=0 \Rightarrow (x-4)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=4, x_2=3$，题中所指集合为$\{3,4\}$；

(2)$\begin{cases} y=x^2 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}, \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1 \end{cases}$，题中所指集合为$\{(0,0),(1,1)\}$；

(3)$|x-1|\leqslant 5$ 的整数$\Rightarrow x=6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4$，题中所指集合为$\{6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4\}$.

4. 下列哪些集合是空集：

$A=\{x|x+1=0\}, B=\{x|x^2+1=0, x\in R\}, C=\{x|x>1 且 x<0\}, D=\{x|x>0 且 x<1\}, E=\{(x,y)|x^2+y^2=1 且 x+y=3, x,y 均为实数\}$.

知识点窍 空集，不含任何元素的集合，记为 ϕ.

解题过程 $A=\{-1\}, B=\phi, C=\phi, D=(0,1), E=\phi$.

5. 写出 $A=\{0,1,2\}$的一切子集．

知识点窍 集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，称 A 是 B 的子集．

解题过程 $\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}$.

6. 如果集 A 有 n 个元素，问 A 共有多少个子集？A 的真子集有几个？

知识点窍 A 是 B 的子集，若 B 中至少有一个元素不属于 A，称 A 是 B 的真子集．

解题过程 子集的个数：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，真子集的个数：$2^n-1$.

7. 如果 $A=\{0,1,2\}, B=\{1,2\}$，下列各种写法，哪些是对的？哪些不对？

$1\in A$；　$0\notin B$；　$\{1\}\in A$；　$1\subset A$；　$\{1\}\subset A$；　$0\subset A$；

$\{0\}\subset A$；　$\{0\}\subset B$；　$A=B$；　$A\supset B$；　$\varnothing\subset A$；　$A\subset A$

知识点窍 元素，集合，属于，包含的概念．

解题过程 (1)对；(2)对；(3)不对，修正为$\{1\}\subset A$；(4)不对，修正为 $1\in A$；(5)对；(6)不对，修正为 $0\in A$；(7)对；(8)不对，修正为$\{0\}\not\subset B$；(9)不对，修正为 $A\neq B$；(10)对；(11)对；(12)对．

8. 设 $A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,5\}, C=\{2,4,6\}$，求：

(1)$A\cup B$；　(2)$A\cap B$；　(3)$A\cup B\cup C$；

(4)$A\cap B\cap C$；　(5)$A\backslash B$.

知识点窍 集合的基本运算．

解题过程 (1)$A\cup B=\{1,2,3,5\}$；(2)$A\cap B=\{1,3\}$；(3)$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$；(4)$A\cap B\cap C=\phi$；(5)$A\backslash B=\{2\}$.

9. 如果 $I=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,2,3\}, B=\{2,4,6\}$，求：

(1)A^c；　(2)B^c；

(3)$A^c\cup B^c$；　(4)$A^c\cap B^c$.

知识点窍 补集．

解题过程 (1)$A^c=\{4,5,6\}$；(2)$B^c=\{1,3,5\}$；(3)$A^c\cup B^c=\{1,3,4,5,6\}$；(4)$A^c\cap B^c=\{5\}$.

10. 如果 A 是非空集合，下列各个等式哪些是对的？哪些不对？

$A\cup A=A$；　$A\cap A=A$；　$A\cap A=\varnothing$；　$A\cup\varnothing=A$；

$A\cup\varnothing=\varnothing$；　$A\cup I=I$；　$A\cap I=A$；　$A\cap\varnothing=A$；

$A\cap\varnothing=\varnothing$；　$A\backslash A=A$；　$A\backslash A=\varnothing$.

解题过程　$A\cup A=A,A\cap A=A,A\cup\phi=A,A\cup I=I,A\cap I=A,A\cap\phi=\phi,A\backslash A=A$ 是对的，其余错误.

11. 如果 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,c\}$，求 $A\times B$.

知识点窍　直积 $A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$.

解题过程　$A\times B=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}$

12. 设集合 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$Y=\{y_1,y_2\}$，$Z=\{z_1,z_2\}$，求 $X\times Y\times Z$.

解题过程　$A\times B\times C=\{(x_1,y_1,z_1),(x_1,y_2,z_1),(x_1,y_1,z_2),(x_1,y_2,z_2),(x_2,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_1),(x_2,y_1,z_2),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_1,z_1),(x_3,y_2,z_1),(x_3,y_1,z_2),(x_3,y_2,z_2)\}$

13. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1)$|x|\leqslant3$；　(2)$|x-2|\leqslant1$；　(3)$|x-a|<\varepsilon$(a 为常数，$\varepsilon>0$)；

(4)$|x|\geqslant5$；　(5)$|x+1|>2$.

知识点窍　区间的表示方法.

解题过程　(1)$[-3,3]$；

(2)$[1,3]$；

(3)$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$；

(4)$(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$；

(5)$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

14. 用区间表示下列点集，并在数轴上表示出来：

(1)$A=\{x||x+3|<2\}$；　(2)$B=\{x|1<|x-2|<3\}$

解题过程　(1)$|x+3|<2\Rightarrow-5<x<-1$，区间表示：$(-5,-1)$.

(2)$1<|x-2|<3\Rightarrow-1<x<1$ 或 $3<x<5$，区间表示：$(-1,1)\cup(3,5)$.

习题 1-2

1. 下面对应关系是否为映射？$X=\{$平面上一切三角形$\}$，$Y=\{$平面上全体点$\}$，X,Y 之间的对应是：每个三角形与其重心对应.

知识点窍　映射三要素.

解题过程　该对应关系是映射．每个三角形都有唯一的重心，因此对于 X 中的任一元素，在 Y 中都有唯一确定的元素与之对应.

2. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{9-x^2}$；　　(2)$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3)$y=-\frac{5}{x^2+4}$；　　(4)$y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；

(5)$y=1-e^{1-x^2}$；　　(6)$y=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；

(7)$y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$；　　(8)$y=\frac{\arccos\frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

知识点窍　初等函数定义域 6 个基本原则．

解题过程　(1)$9-x^2\geqslant 0\Rightarrow$定义域为$[-3,3]$；

(2)$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow$定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(3)$x^2+4\neq 0\Rightarrow$定义域为$(-\infty,+\infty)$；(4)$\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1\Rightarrow$定义域为$[-1,3]$；

(5)定义域为$(-\infty,+\infty)$；(6)$\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}\Rightarrow$定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,3)$；

(7)$\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\Rightarrow$定义域为$[1,4]$；(8)$\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ x^2-x-6>0\end{cases}\Rightarrow$定义域为$[-3,-2)\cup(3,4]$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$；　　(2)$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1},g(x)=x-1$；

(3)$f(x)=x,g(x)=\sin(\arcsin x)$；　　(4)$f(x)=x,g(x)=e^{\ln x}$.

知识点窍　函数相同，要求定义域和对应法则相同．

解题过程　(1)定义域$\begin{cases}f(x):(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\\ g(x):(0,+\infty)\end{cases}$，因此，$f(x)$和 $g(x)$不同；

(2)定义域$\begin{cases}f(x):(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\\ g(x):R\end{cases}$，因此，$f(x)$和 $g(x)$不同；

(3)定义域$\begin{cases}f(x):R\\ g(x):[-1,1]\end{cases}$，因此，$f(x)$和 $g(x)$不同；

(4)定义域$\begin{cases}f(x):R\\ g(x):(0,+\infty)\end{cases}$，因此，$f(x)$和 $g(x)$不同．

4. 确定函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$ 的定义域并作出函数图形.

解题过程　$|x|\leqslant 1$ 或 $1<|x|<2\Rightarrow$定义域$(-2,2)$.

5. 判断下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^4-2x^2$；

(2) $f(x)=x-x^2$；

(3) $f(x)=\tan x$；

(4) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(5) $f(x)=x\sin x$；

(6) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；

(7) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

(8) $f(x)=a^x+a^{-x}$；

(9) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$；

(10) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

知识点窍　函数奇偶性判断.

解题过程　(1)①$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，关于原点对称；

②$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$. 因此，$f(x)$为偶函数.

(2)①$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，关于原点对称；

②$f(-x)=-x-x^2$，$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$. 因此，$f(x)$为非奇非偶函数.

(3)①$f(x)$的定义域为$\left\{x \middle| x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，关于原点对称；

②$f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$. 因此，$f(x)$为奇函数.

(4)①$f(x)$的定义域为R，关于原点对称；

②$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$，$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$. 因此，$f(x)$为非奇非偶函数.

(5)①$f(x)$的定义域为R，关于原点对称；

②$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$. 因此，$f(x)$为偶函数.

(6)①$f(x)$的定义域为R，关于原点对称；②$f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$. 因此，$f(x)$为偶函数.

(7)①$f(x)$的定义域为$(-1,1)$，关于原点对称；

②$f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$. 因此，$f(x)$为奇函数.

(8)①$f(x)$的定义域为R，关于原点对称；②$f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$. 因此，$f(x)$为偶函数.

(9)①$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称；

②$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=-\dfrac{a^x+1}{a^x-a}=-f(x)$. 因此，$f(x)$为奇函数.

(10)①$f(x)$的定义域为R，关于原点对称；

②$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$. 因此，$f(x)$为奇函数.

6. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=3x-6$；　(2) $y=2^{x-1}$；　(3) $y=x+\ln x$.

知识点窍 $x_1, x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x_2$，若 $f(x_1) < f(x_2)$，$f(x)$ 在 (a,b) 是单调增加的；若 $f(x_1) > f(x_2)$，$f(x)$ 在 (a,b) 是单调减少的．

解题过程 (1)设 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，$x_1 < x_2$，$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 - 6) - (3x_2 - 6) = 3(x_1 - x_2) < 0$

即 $f(x_1) < f(x_2)$，因此该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 是单调增加的．

(2)设 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，$x_1 < x_2$，$\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} = \dfrac{2^{x_1-1}}{2^{x_2-1}} = 2^{x_1-x_2} < 2^0 = 1$，又

$\because f(x) > 0$，$\therefore f(x_1) < f(x_2)$，因此该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 是单调增加的．

(3)设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，$x_1 < x_2$，

$f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \ln x_1 - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + \ln \dfrac{x_1}{x_2} < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，因此该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 是单调增加的．

7. 下列各函数中哪些是周期函数？对周期函数指出其周期．

(1) $y = \sin^2 x$；　　(2) $y = \cos(\omega x + \theta)$　（ω, θ 为常数）；

(3) $y = \cos \dfrac{1}{x}$.

逻辑推理 充分利用已知函数的周期，如：$\sin x$，$\cos x$ 周期为 2π，$\tan x$ 周期为 π.

解题过程 (1) $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$，该函数为周期函数，周期 $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

(2)该函数为周期函数，周期 $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

(3)假设该函数周期为 T，若 $x > 1$，此时 $f(x+T) = \cos \dfrac{1}{x+T} > \cos \dfrac{1}{x} = f(x)$，与假设相悖，因此该函数不是周期函数．

8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加．

逻辑推理 利用函数单调性和奇偶性定义．

解题过程 设 $-l < x_1 < x_2 < 0$，则 $0 < -x_2 < -x_1 < l$，

$\because f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，$\therefore f(-x_2) < f(-x_1)$，

又 $\because f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数，$\therefore -f(x_2) < -f(x_1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加．

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数．

解题过程 (1)设 $f(x) = g(x) + h(x)$，若 $g(x)$ 和 $h(x)$ 为偶函数，$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) + h(x) = f(x)$，$f(x)$ 为偶函数；若 $g(x)$ 和 $h(x)$ 为奇函数，$f(-x) = g(-x) + h(-x) = -(g(x) + h(x)) = -f(x)$，$f(x)$ 为奇函数．

(2)设 $f(x) = g(x) \cdot h(x)$，若 $g(x)$ 和 $h(x)$ 为偶函数，$f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = g$

$(x)\cdot h(x)=f(x)$，$f(x)$为偶函数；若 $g(x)$和$h(x)$为奇函数，$f(-x)=g(-x)\cdot h(-x)=-g(x)\cdot(-h(x))=f(x)$，$f(x)$偶函数；若 $g(x)$为偶函数，$h(x)$为奇函数，$f(-x)=g(-x)\cdot h(-x)=g(x)\cdot(-h(x))=-f(x)$，$f(x)$为奇函数．

10. 证明：函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$是有界函数．

解题过程 ①$y=\dfrac{x^2}{1+x^2}>0$，②$y=\dfrac{x^2}{1+x^2}<\dfrac{x^2+1}{1+x^2}=1$，因此，函数$y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$有界.

习题 1-3

1. 求下列函数的反函数：

(1)$y=2x+1$；

(2)$y=\dfrac{x+2}{x-2}$；

(3)$y=x^3+2$；

(4)$y=1+\lg(x+2)$.

解题过程 (1)$y=2x+1\Rightarrow x=\dfrac{y-1}{2}$，即反函数 $y=\dfrac{x-1}{2}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(2)$y=\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x-2+4}{x-2}=1+\dfrac{4}{x-2}\Rightarrow x=\dfrac{4}{y-1}+2$，即反函数 $y=\dfrac{4}{x-1}+2$，定义域$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

(3)$y=x^3+2\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-2}$，即反函数 $y=\sqrt[3]{x-2}$，定义域$(-\infty,+\infty)$；

(4)$y=1+\lg(x+2)\Rightarrow x=10^{y-1}-2$，即反函数 $y=10^{x-1}-2$，定义域$(-\infty,+\infty)$.

2. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1)$y=u^2$，　$u=\sin x$，　$x_1=\dfrac{\pi}{4}$，　$x_2=\dfrac{\pi}{2}$；

(2)$y=\sin u$，　$u=2x$，　$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，　$x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3)$y=\sqrt{u}$，　$u=1+x^2$，　$x_1=0$，　$x_2=3$；

(4)$y=e^u$，　$u=x^2$，　$x_1=1$，　$x_2=2$；

(5)$y=u^2$，　$u=e^x$，　$x_1=1$，　$x_2=2$.

逻辑推理 消除中间变量，确定复合函数．

解题过程 (1)$y=u^2=\sin^2 x$，$y_1=\sin^2\dfrac{\pi}{4}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{1}{2}$，$y_2=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$；

(2)$y=\sin u=\sin 2x$，$y_1=\sin 2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y_2=\sin 2\times\dfrac{\pi}{4}=1$；

(3)$y=\sqrt{u}=\sqrt{1+x^2}$，$y_1=\sqrt{1+0^2}=1$，$y_2=\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}$；

(4)$y=e^u=e^{x^2}$，$y_1=e^{1^2}=e$，$y_2=e^{2^2}=e^4$；

(5)$y=u^2=e^{2x}$，$y_1=e^2$，$y_2=e^4$.