◎ 大学数学系列教材

◎ 总主编 辛小龙 罗新兵

线性代数（第二版）

◎ 编者 赵临龙 邓方安
陈 露 杨闻起
李军庄 于 萍
赵小鹏

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

○ 大学数学系列教材

○ 总主编 辛小龙 罗新兵

线性代数（第二版）

XIANXING DAISHU

○ 编者 赵临龙 邓方安
陈 露 杨闻起
李军庄 于 萍
赵小鹏

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是由西北大学、陕西师范大学牵头，陕西省部分高校联合编写的大学数学系列教材之一，该系列教材共包括《高等数学》(上、下)、《线性代数》及《概率论与数理统计》4册。作者根据教学实际，对该系列教材作了修订，本书为《线性代数》(第二版)。内容包括矩阵、方阵的行列式及矩阵的初等变换、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等。

本书是结合多位资深教师丰富的教学经验，根据高等学校理工及师范类本科数学基础课程教学要求编写而成。在内容选材、编写体例、阐述方式、习题难度和习题量的安排方面，充分考虑到学生学习的需要，有利于培养学生抽象思维和逻辑思维的能力、综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力和自主学习的能力。

本书适合高等学校理工及师范类学生作为教材使用，也可供有关工程技术人员作为参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/辛小龙，罗新兵主编；赵临龙等编．—2版．
—北京：高等教育出版社，2012.1
ISBN 978-7-04-033797-6
Ⅰ.①线…　Ⅱ.①辛…②罗…③赵…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2
中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第229371号

策划编辑　张长虹　　责任编辑　张长虹　　封面设计　王凌波　　版式设计　余　杨
责任校对　窦丽娜　　责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787mm×960mm　1/16		
印　　张	15.25	版　　次	2007年8月第1版
字　　数	270千字		2012年1月第2版
购书热线	010-58581118	印　　次	2012年1月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	22.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　33797-00

第二版前言

在高等教育出版社的支持下，由西北大学、陕西师范大学牵头，陕西省部分高校参编的《线性代数》教材于2007年4月出版。

在3年的教材使用过程中，广大任课教师和学生对教材的优点给予了充分肯定；同时，从教和学两方面对教材提出更高的要求。尽管我国高等教育进入大众化阶段，但要求考研的大学生也不少，尤其理工科学生（包括数学类专业学生）要求更加强烈。因此，编写一本既利于课程学习又利于考研的线性代数教材势在必行。

为此，本教材的使用高校（主要是陕西省内高校）又一次组织编者，对本教材进行再版编写，使之更加符合学生学习的实际和考研提升的需要。编者经过多次讨论，认为在保持原教材优点的同时，对教材的内容结构和实例进行必要的调整和补充，并增加“典型例题解析”一章，扩大考研学生的视野，达到“学”和“考”的统一，这也是本教材新的亮点。

本教材编写分工为：第一章邓方安（陕西理工学院）；第二章陈露（陕西理工学院）；第三章杨闻起（宝鸡文理学院）；第四章李军庄（商洛学院）；第五章于萍（西安文理学院）；第六章赵临龙（安康学院）；第七章赵小鹏（渭南师范学院）。最后由赵临龙统稿，并完成第二版前言、绪论及附录的编写任务。

尽管我们希望把本书编写得更好，但由于水平有限，书中的缺点、错误乃至问题一定在所难免，恳望同行不吝赐教，诚请读者批评指正。

编　者

2011年10月

第一版前言

数学在研究客观世界数量关系与空间形式的过程中，形成了异于其他学科的庞大的科学体系，并以其内容的抽象性、逻辑的严谨性及应用的广泛性著称。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。数学教育在培养高素质科学技术人才中具有不可替代的作用。

随着我国改革开放和经济社会的发展，我国高等教育事业也有了长足发展。特别是大学扩招，变原来的“精英教育”为“大众教育”，引起了生源的变化。所有这些对大学数学教学改革和教材建设提出了新的要求。

多年来，我国也出现了许多优秀的大学数学教材。然而，现有的大多数教材比较适合工科院校的学生。面对扩招以后大学生源的变化，特别相对于综合类、师范类院校的学生，这些教材都有明显的局限性，不适合这类院校学生的学习。因而，编写一套以理工综合类及师范类学生为主要对象的大学数学教材是非常必要的。我们编写的这套系列教材，力争能适合理工综合类及师范类本科生的教育现状，有利于实现该类专业的数学教育目标，适合新世纪人才培养的要求。我们努力在这套系列教材中反映数学教学改革新思路、新方法，期望能成为一套具有自己特色的大学数学教材。

本教材是按照高等理工综合类及师范类本科学生学习本课程都应达到的要求编写的，其中带 * 的部分可供某些相关专业选用，也是对选用专业学生的基本要求。各院校根据自身情况，在达到基本要求的基础上还可以提出一些较高的或特殊的要求。

本套系列教材分《高等数学(上)》、《高等数学(下)》、《线性代数》及《概率论与数理统计》4 本书出版，是西北大学、陕西师范大学、延安大学、陕西理工学院、西安文理学院、宝鸡文理学院、渭南师范学院、咸阳师范学院等 8 所院校的多位资深的数学教师多年来数学教育、教学经验的结晶，其内容选材、编写体例、阐述方式、习题难度和习题量的安排，都充分考虑了高等理工综合类及师范类本科学生学习的需要，并与该类专业相应课程的教学计划相适应。

本系列教材的总主编由西北大学辛小龙教授和陕西师范大学刘新平教授担任。教材封面上的第一署名作者为该本教材的统稿人。教材编写工作的具体分工如下：

《高等数学(上)》:第一章,陈斯养;第二章,张永锋;第三、四章,薛利敏;第五章,马保国;第六章,阎恩让。

《高等数学(下)》:第七章,曹吉利;第八章,荔炜;第九章,陈斯养;第十章,辛小龙;第十一章,薛西峰。

《线性代数》:第一章,于萍、王挺;第二章,陈露;第三章,杨闻起;第四章,舒尚奇;第五章,邓方安;第六章,石超峰。

《概率论与数理统计》:第一章,朱科科;第二章,冉凯;第三章,杨开春;第四章,查淑玲;第五章,王丰效;第六、八章,刘新平;第七章,张运良;第九、十章及附录,贺瑞缠。

关于教材的编写我们进行了充分的准备工作,由西北大学数学系和高等教育出版社组织编者召开了数次教材编写研讨会,多次讨论确定了教材编写大纲、教材主要内容和教材编写特色,使得教材的编写工作有分工有合作,有条不紊地进行。

本系列教材的问世,是教育改革的产物。我们感谢西北大学、陕西师范大学等所有参编院校及高等教育出版社,它们对本书的顺利问世功不可没。

新世纪大学数学的教学改革是一项重要而艰巨的工程。我们力争做出一些贡献。我们尽力想把这套教材编写好,但由于水平有限及各方面的诸多原因,书中的缺点、错误乃至问题一定在所难免,恳望同行不吝赐教,诚请读者批评指正。

编　者

2007 年 4 月

目　录

绪　论

线性代数课程是高等学校理工科各专业学生的一门必修的重要基础理论课,它的基本概念、基本理论和基本运算技能,又为学习后继课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础.尤其是计算机日益发展和普及的今天,线性代数已成为理工科学生必备的基础理论和重要的数学工具.

一、线性代数的学习内容

线性代数是从解线性方程组等问题而发展起来的一门数学学科.本课程主要涉及六部分:行列式、矩阵、线性方程组、向量、特征值和特征向量、二次型.但是从内容上讲,线性代数可以分为三大块.

第一部分,行列式和矩阵.行列式和矩阵是线性代数的基础部分,这部分重点内容是行列式的计算,逆矩阵以及初等变换和初等矩阵.其中,行列式是线性代数中最基本的运算之一,在后续各个章节中都有所涉及.矩阵是线性代数中最基本的内容,线性代数中绝大多数运算都是通过矩阵进行的,其相关的概念和运算贯穿整个学科.

第二部分,线性方程组与向量.线性方程组与向量是线性代数的核心内容,也是理解线性代数整个学科的枢纽.整个线性代数前半部分的主要知识点都可以以线性方程组的相关理论为轴串联起来,后半部分的特征值与特征向量和二次型等理论也是通过线性方程组与前面联系起来的.线性代数的核心在于矩阵的对角化(可理解的广一些,包括上三角形化等),主要手段是初等变换.行列式计算,解线性方程组,求矩阵的秩等都是用初等变换将行列式或矩阵化为对角形或上三角形(含阶梯形).

第三部分,特征向量与二次型.这部分所涉及的特征值与特征向量是线性代数的重要内容,既是对前面矩阵、线性方程组的知识的综合应用,也是后面二次型的基础.二次型是对特征值与特征向量相关知识的发展与应用,用到的方法主要是矩阵的初等变换.矩阵相似的标准形,实对称阵正交相似或合同于对角阵,化二次型为标准形等都离不开对角化.

高等院校开设线性代数的目的不仅使学生掌握该课程的基本理论与基本方法,在数学的抽象性、逻辑性与严密性方面受到必要的训练和熏陶,培养学生较强的运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力和归纳判断能力,还在于使他们具

有理解和运用逻辑关系、研究和领会抽象事物，为学生学习后继数学课程、其他基础课程和专业课程提供必要的基础知识和思想方法. 如用线性代数进行数学建模并利用计算机解决实际问题，以及将来从事科学研究工作奠定良好的理论基础，提供一种重要的数学工具.

二、线性代数的内容结构

线性代数的研究对象是线性空间（向量）及线性变换，它的处理工具和方法是代数中的矩阵理论——矩阵及其运算，特别是矩阵的乘法. 多数线性代数教材的内容顺序是：行列式、矩阵、线性方程组、向量和线性空间、特征值和二次型、线性空间和线性变换等.

线性方程组是核心内容，行列式的定义及运算法则、矩阵及其运算和变换是工具，都是为解线性方程组服务的. 向量的线性相（无）关的问题都可转化成对线性方程组的研究.

例如，研究向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性相关性，就是考察方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n x_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为零情况，即考察齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2}$$

是否有非零解. 若有非零解，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；若仅有零解，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全部为零，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

对于齐次线性方程组(2)的解的情况，要看系数矩阵的秩与未知数的个数的关系. 若系数矩阵的秩小于未知数的个数，该线性方程组有非零解，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；若系数矩阵的秩等于未知数的个数，该线性方程组只有零解，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

由以上分析过程可以看出，线性方程组、向量的线性组合、矩阵及矩阵方程从形式到内容都可统一起来研究，都可以借助于矩阵理论进行研究即可. 因此，线性方程组、向量的线性组合和矩阵及矩阵方程三个看似独立的问题是可以作等价研究的.

矩阵的对角化的主要手段是初等变换. 行列式计算、解线性方程组、求矩阵的秩等都是用初等变换将行列式或矩阵化为对角形或上三角形（含阶梯形）. 矩阵相似的标准形、实对称阵正交相似或合同于对角矩阵、化二次型为标准形、二次曲面的主轴化等都离不开对角化.

三、线性代数的基本思想

代数学可以笼统地解释为关于字母运算的学科.在线性代数中,字母的含义也推广了,它不仅用来表示数,也可以表示行列式、矩阵、向量等代数量.线性代数不仅在内容上,更重要的是在观点和方法上比初等代数有很大的提高.

1. 符号化思想

所谓数学符号化思想是指对于所研究的数学问题进行抽象概括,用数学符号语言表达其意.即用数学符号表示具有一定通性的"量"及其一般规律,并且用一般规律对"量"进行研究,揭示事物本质的一种思想.数学符号化思想主要有下面的几层含义:

(1) 人们有意识地、普遍地运用符号去概括、表述、研究数学;

(2) 反复改良和筛选出科学的、恰当的数学符号,以便能清晰、准确、简洁地反映数学概念的本质属性,有利于数学的发现和发展;

(3) 数学符号已经过人工筛选与改造,形成一种约定的、规范的、形式化的系统,它具有抽象性、层次性、形式化的重要特征.

在线性代数中最重要的内容就是行列式和矩阵.虽然表面上看,行列式和矩阵不过是一种语言或速记,但从数学史上来看,优良的数学符号和生动的概念是数学思想产生的动力和钥匙.

例如,设由 m 个方程 n 个未知数组成的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

简写成矩阵方程形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

按这种思想,我们也可以将一阶线性非齐次微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

简写成矩阵方程形式

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

这为研究一阶线性非齐次微分方程组的解提供了捷径.

2. 结构化思想

从系统方法论的观点看,数学结构思想方法是把整个数学作为大系统,而把每一个数学分支作为这个大系统的一个子系统,从而将整个数学大系统按结构的特征分成若干子系统,在此基础上,不仅要探讨各个子系统的结构特征,而且要探讨子系统结构之间的内在联系及本质差异. 而建立每一个子系统数学结构的具体方法则是形式公理化方法.

数学结构思想方法实质上是对形式公理化思想方法的一个新发展,是把形式公理化思想方法推向一个更高的层次. 形式公理化方法着眼于每一个数学分支的形式公理化或结构化,而结构思想方法则是以形式公理化方法为工具,着眼点不是哪一个数学分支,而是从整个数学全局出发,不仅在整个数学的大范围内分析、研究每一个数学分支的结构,而且还分析、研究各个数学分支之间的结构的本质差异及其内在相互关系.

对于前面讨论的非齐次线性方程组(3)和一阶线性非齐次微分方程组(4),本属于不同的数学分支:线性代数和微分方程,但线性方程组的共性要求我们更进一步认识线性方程组的解构造,就会得到线性方程组的一般解理论.

如果 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是非齐次线性方程组(3)(或者(4))的一个解向量(也称特解),则(3)(或者(4))的任一解向量 $\boldsymbol{\eta}$ 总可以表示成 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\xi}$,其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是(3)(或者(4))的任一解向量(也称通解).

3. 模型化思想

现在数学模型还没有一个统一的准确的定义,因为站在不同的角度可以有不同的定义. 这里还是给出人们较认同的定义:所谓数学模型,就是把某种

事物系统的主要特征、主要关系抽象出来，用数学语言概括地或近似地表述出来的一种数学结构. 按广义的理解，一切数学概念、数学理论体系、数学公式等都可称为数学模型. 按狭义的理解，只有那些反映特定问题的数学结构才称为数学模型.

数学的模型化思想是一般化的思想方法，数学模型的主要模型形式是数学符号表达式和图表，因而它与符号化思想有很多相同之处，同样具有普遍的意义. 如果说符号化思想更注重数学抽象和符号表达，那么模型化思想更注重数学的应用. 通过数学模型解决问题，尤其是现实中的各种问题，就是今天流行的“数学建模”.

在数学模型化的过程中，我们要遵循熟悉化、简单化、直观化、标准化的原则，即把我们遇到的问题，通过转化变成我们比较熟悉的问题来处理；或者将较为繁琐、复杂的问题，变成比较简单的问题；或者将比较难以解决、抽象的问题，转化为比较直观的问题，以便准确把握问题的求解过程；或者从非标准形向标准形进行转化. 按照这些原则进行数学操作，转化过程省时省力.

矩阵的对角化是解决线性代数问题的重要手段之一. 例如，对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，将其化为对角矩阵. 根据矩阵的对称性，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实施一个右乘矩阵 $\boldsymbol{P}$（为正交矩阵），就必须实施一个左乘矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$（为对称矩阵）.

同样，对于二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$（$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵），将其化为标准形（对角化）. 取线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$，那么

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Cy})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Cy})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{y}.$$

此时，记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$，显然 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵. 这就是说，以 $\boldsymbol{x}$ 为变量的二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$，经过线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$ 可化为以 $\boldsymbol{y}$ 为变量的二次型 $g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}$，两个二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间有关系式 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$（为对称矩阵）.

特例，当二次型的标准形表示二次曲线

$$\Gamma: g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Dy}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2=0,$$

就有射影几何的二次曲线分类形式：

（1）当 d_1,d_2,d_3 同号时，Γ 表示虚二次曲线；当 d_1,d_2,d_3 两正（负）一负（正）时，Γ 表示是实二次曲线；

（2）当 $d_1,d_2(d_3=0)$ 同号时，Γ 表示两条虚直线；当 $d_1,d_2(d_3=0)$ 异号时，Γ 表示两条实直线；

（3）当 $d_1\neq0,d_2=d_3=0$ 时，Γ 表示两条重合实直线.

最初的线性方程组问题大都来源于生活实践，正是实际问题刺激了线性代数的研究与发展. 如线性代数在人口模型、马尔可夫链、图的邻接矩阵等方面有着广泛的应用. 为了预测经济形势，投入产出经济数学模型也往往归结为求解一

个线性方程组;为了气象预报,有时往往根据诸多因素最后归结为解一个线性方程组.

编　者

2011 年 9 月

第一章 矩 阵

矩阵是线性代数的一个重要概念,是线性代数的主要研究对象和工具,它广泛应用于自然科学的各个分支及经济管理等许多领域.今天,它又为我们应用计算机处理科学计算和日常事务带来了很大的方便与可能.

本章首先引入矩阵的概念,然后介绍矩阵的运算以及分块矩阵.

§1.1 矩阵及其运算

1.1.1 引例

例 1.1 某航空公司在 A,B,C,D 四个城市之间开辟了若干航线,若两个城市间有航班,则记为 1,否则记为 0,得到一个数表

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

这样的数表反映了四个城市之间的交通连接状况.

例 1.2 全国部分地区在抵御全球金融风暴中,不断出台拉动内需新政策以鼓励消费者消费. 2009 年第二季度空调、彩电、微波炉三种家用电器的销售量(台)统计如下表.

表 1.1 销 售 统 计 单位:台

	空调	彩电	微波炉
城市 A	119 890	263 000	81 100
城市 B	284 080	281 550	119 100
城市 C	37 650	55 900	46 900

表 1.1 中的有关数据也可以记为如下数表形式:

$$\begin{pmatrix} 119\,890 & 263\,000 & 81\,100 \\ 284\,080 & 281\,550 & 119\,100 \\ 37\,650 & 55\,900 & 46\,900 \end{pmatrix}.$$

上述数表反映了 A,B,C 三个城市第二季度空调、彩电、微波炉三种家电的销售情况.

1.1.2 矩阵的定义

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的一个 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

表示式(1.1.1)外加括号是为了表示一个整体.

通常用大写黑体拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵. 有时为了指明矩阵的行数和列数，把 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{mn}$. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 和列数 n 相等时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. 例如，例 1.1 中的矩阵就是一个四阶方阵，例 1.2 中的矩阵是一个三阶方阵.

元素全为零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$. 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵无特别说明的情况下，均指实矩阵.

1.1.3 几种特殊的矩阵

1. 行矩阵和列矩阵

只有一行元素的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \tag{1.1.2}$$

叫做行矩阵或行向量.

只有一列元素的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$