电磁场微波技术与天线

重点·难点·考点辅导与精析

童创明◎主编

西北工業大學出版社

高等学校经典教材"三点"丛书

电磁场微波技术与天线

重点　难点　考点　辅导与精析

主　编　童创明

编　者　童创明　杨亚飞　赵海洲

谢　波　王金博　周　峰

张旭春　焦光龙　鲍峻松

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是以《电磁场微波技术与天线》为配套主教材编写而成。全书共分为11章，每一章均由知识脉络图解，知识点、重点、难点及教学基本要求，考点辅导与精析及课后习题解答4部分组成。

本书可作为高等学校理工科电子类电磁场与微波技术专业、天线专业、无线电物理专业及相近专业学生学习用参考书及复习指导书，也可供电子工程与通信工程技术人员或相关专业的技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场微波技术与天线重点难点考点辅导与精析/童创明主编. —西安：西北工业大学出版社，2012.4

高等学校经典教材“三点”丛书

ISBN 978-7-5612-3340-5

Ⅰ.①电… Ⅱ.①童… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教学参考资料②微波技术—高等学校—教学参考资料③天线—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.①O441.4②TN015③TN82

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第069066号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号　　**邮编**：710072

电　　话：(029)88493844　　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西向阳印务有限责任公司

开　　本：727 mm×960 mm　　1/16

印　　张：11.375

字　　数：201千字

版　　次：2012年4月第1版　　2012年4月第1次印刷

定　　价：23.00元

前　言

长期以来，电磁场微波技术与天线系列课程被公认为难教难学的课程。为了解决教学内容难理解，作业题难做的实际困难，帮助学生学习和提高，编者进行了长期实践和认真总结，摸索了许多经验和体会，以《电磁场微波技术与天线》(童创明、梁建刚、鞠智芹、张旭春编著，西北工业大学出版社，2009 年 9 月第 1 版)为配套主教材，以教学大纲为准绳，编写了本书。在编写中，将一些通用原则和方法的指导放在首位，并结合大量相关实例进行讲解，以此帮助学生缓解在学习和解题时的实际困难。

全书共分 11 章，每章内容包括：

(1)知识脉络图解：对本章的主要内容知识作了总结，学生可以根据总结对本章内容在复习时有所侧重。

(2)知识点、重点、难点及教学基本要求：结合教学基本要求，再对本章的知识点、重点、难点进行提示，从而提高复习效率。

(3)考点辅导与精析：该部分给出典型例题及考点的辅导与精析，以帮助读者触类旁通。

(4)课后习题解答：对教材《电磁场微波技术与天线》的课后习题给出解答，并给出了规律性总结。

适量的习题练习对学好知识内容是一个必要的环节。解好每一道习题可加深所学内容，灵活掌握重点、难点，同时对提高解决问题的能力和空间想象力，培养扎实的学风都是很有帮助的。在使用本书时要注意下面几点：

(1)习题中自己会做的，可核对书中的结果，如果答案相符则坚持自己的解题方法，熟悉一下书中的解题思路。

(2)有的习题一时不会做，希望先回忆、复习教材上有

关内容，也可以请教会做的同学，然后再下手做。

(3)有的习题确实不会做，这时可以仔细、认真地读懂书中讲的解题思路和方法。

本书由童创明教授、杨亚飞讲师、赵海洲副教授、谢波讲师、王金博副教授、周峰副教授、张旭春副教授、焦光龙副教授和鲍峻松博士后等编写完成。此外，李西敏、姬伟杰、孙青、耿方志、付树洪等博士以及周明、邹雄、田博等硕士参加了本书部分编写工作。

本书的出版得到了军队“2110工程”电磁场微波技术学科专业领域建设基金的资助，同时也得到了西北工业大学出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

编　者

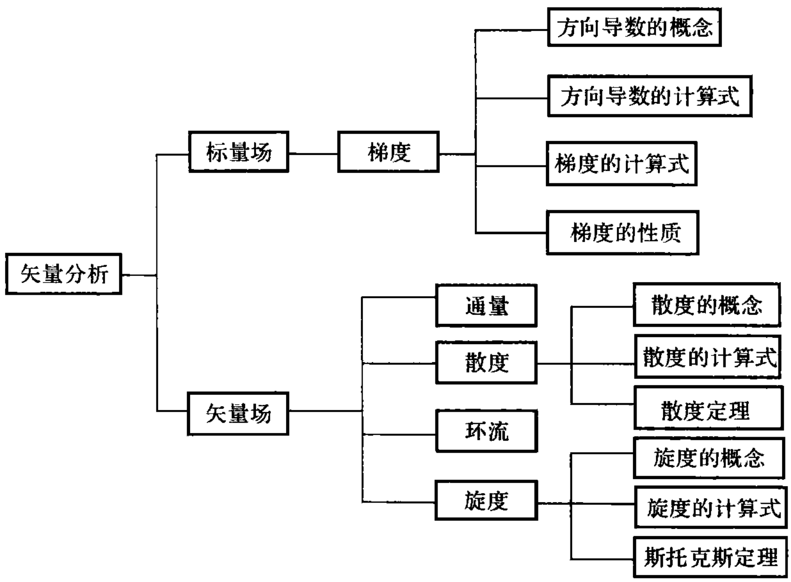
2012年3月

目　录

第1章

矢量分析

1.1 知识脉络图解



1.2 知识点、重点、难点及教学基本要求

★ 知识点

矢量代数、3 种常用的正交坐标系、标量场的梯度、矢量场的通量与散度、矢量场的环流与旋度、无旋场与无散场、拉普拉斯运算、亥姆霍兹定理。

★ 重点、难点

标量场的梯度、矢量场的通量与散度、矢量场的环流与旋度、无旋场与无

散场、拉普拉斯运算。

★ 教学基本要求

了解 3 种常用的正交坐标系，理解标量场的梯度，掌握矢量场的通量与散度、矢量场的环流与旋度。

1.2.1 矢量代数

不管是变矢量还是常矢量均有其大小和方向(零矢量除外)，书写时常用其大小和单位矢量两者来表示，例如，$\boldsymbol{A}=A\,\boldsymbol{a}_A$，$\boldsymbol{B}=B\,\boldsymbol{a}_B$。矢量和矢量之间有加法、减法、点乘和叉乘的常规运算。

加法：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=A\,\boldsymbol{a}_A+B\,\boldsymbol{a}_B$

减法：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=A\,\boldsymbol{a}_A-B\,\boldsymbol{a}_B$

点乘：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\,\boldsymbol{a}_A\cdot\boldsymbol{a}_B=AB\cos(\boldsymbol{a}_A,\boldsymbol{a}_B)$(为标量)

叉乘：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\,\boldsymbol{a}_A\times\boldsymbol{a}_B=AB\sin(\boldsymbol{a}_A,\boldsymbol{a}_B)\,\boldsymbol{a}_C$

$\boldsymbol{a}_C$ 为($\boldsymbol{a}_A\times\boldsymbol{a}_B$)方向上的单位矢量，两矢量叉乘的结果仍为矢量。特别注意 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 不等于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 而是等于 $-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。

1.2.2 常用正交坐标系

1. 直角坐标系(x,y,z)

在直角坐标系中，过空间任一点 3 个相互正交的坐标轴的单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 的方向分别是 x，y 和 z 轴增加的方向，且遵循右手螺旋法，即

$$\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_z,\quad \boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_x,\quad \boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_x=\boldsymbol{a}_y \tag{1.1}$$

任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z \tag{1.2}$$

其中，A_x，A_y 和 A_z 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 方向上的投影。

矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z$ 与 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_xB_x+\boldsymbol{a}_yB_y+\boldsymbol{a}_zB_z$ 的和、差为

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(A_x\pm B_x)\,\boldsymbol{a}_x+(A_y\pm B_y)\,\boldsymbol{a}_y+(A_z\pm B_z)\,\boldsymbol{a}_z$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的点积为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta_{AB}\,\boldsymbol{a}_C=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

式中，$A=|\boldsymbol{A}|=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)^{1/2}$，$B=|\boldsymbol{B}|=(B_x^2+B_y^2+B_z^2)^{1/2}$

$$\boldsymbol{a}_A=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=(\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z)/(A_x^2+A_y^2+A_z^2)^{1/2}$$

$$\boldsymbol{a}_B=\frac{\boldsymbol{B}}{B}=(\boldsymbol{a}_xB_x+\boldsymbol{a}_yB_y+\boldsymbol{a}_zB_z)/(B_x^2+B_y^2+B_z^2)^{1/2}$$

$$\cos\theta_{AB}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB},\quad \theta_{AB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB}\right)$$

长度元 $\mathrm{d}l_x=\mathrm{dx},\quad \mathrm{d}l_y=\mathrm{dy},\quad \mathrm{d}l_z=\mathrm{dz}$

面积元

$$\mathrm{d}S_x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}S_y=\mathrm{d}x\mathrm{d}_z,\quad \mathrm{d}S_z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.3}$$

体积元

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.4}$$

2. 圆柱坐标系(r,φ,z)

在圆柱坐标系中3个相互正交的坐标轴的单位矢量$\boldsymbol{a}_r$,$\boldsymbol{a}_\varphi$和$\boldsymbol{a}_z$的方向分别是r,φ和z轴增加的方向，且遵循右手螺旋法则，即

$$\boldsymbol{a}_r\times\boldsymbol{a}_\varphi=\boldsymbol{a}_z,\quad \boldsymbol{a}_\varphi\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_r,\quad \boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_\varphi \tag{1.5}$$

任一矢量$\boldsymbol{A}$在圆柱坐标系中可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z \tag{1.6}$$

式中，A_ρ,A_φ和A_z分别是矢量$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{a}_r$,$\boldsymbol{a}_\varphi$和$\boldsymbol{a}_z$方向上的投影。

矢量$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z$与矢量$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_rB_r+\boldsymbol{a}_\varphi B_\varphi+\boldsymbol{a}_zB_z$的和：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_r(A_\rho+B_\rho)+\boldsymbol{a}_\varphi(A_\varphi+B_\varphi)+\boldsymbol{a}_z(A_z+B_z) \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的点积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z)\cdot(\boldsymbol{a}_rB_r+\boldsymbol{a}_\varphi B_\varphi+\boldsymbol{a}_zB_z)\\&=A_rB_r+A_\varphi B_\varphi+A_zB_z\end{aligned} \tag{1.8}$$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的叉积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z)\times(\boldsymbol{a}_rB_r+\boldsymbol{a}_\varphi B_\varphi+\boldsymbol{a}_zB_z)\\&=\boldsymbol{a}_r(A_\varphi B_z-A_zB_\varphi)+\boldsymbol{a}_\varphi(A_zB_r-A_rB_z)+\boldsymbol{a}_z(A_rB_\varphi-A_\varphi B_r)\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_r&\boldsymbol{a}_\varphi&\boldsymbol{a}_z\\A_r&A_\varphi&A_z\\B_r&B_\varphi&B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.9}$$

长度元 $\mathrm{d}l_r=\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}l_\varphi=\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}l_z=\mathrm{d}z$

面积元

$$dS_r = r d\varphi dz,\quad dS_\varphi = dr dz,\quad dS_z = r dr d\varphi \tag{1.10}$$

体积元

$$dV = r dr d\varphi dz \tag{1.11}$$

圆柱坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = \arctan(y/x),\quad z = z \tag{1.12}$$

或

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z \tag{1.13}$$

3. 球坐标系(r,θ,φ)

在球坐标系中,3个相互正交的坐标轴的单位矢量$\boldsymbol{a}_r$,$\boldsymbol{a}_\theta$和$\boldsymbol{a}_\varphi$的方向分别是r,θ和φ轴增加的方向,且遵循右手螺旋法则,即

$$\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\varphi,\quad \boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{a}_r,\quad \boldsymbol{a}_\varphi \times \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_\theta \tag{1.14}$$

任一矢量$\boldsymbol{A}$在球坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r A_r + \boldsymbol{a}_\theta A_\theta + \boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi \tag{1.15}$$

式中,A_r,A_θ和A_φ分别是矢量$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{a}_r$,$\boldsymbol{a}_\theta$和$\boldsymbol{a}_\varphi$方向上的投影。

矢量$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r A_r + \boldsymbol{a}_\theta A_\theta + \boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi$与矢量$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_r B_r + \boldsymbol{a}_\theta B_\theta + \boldsymbol{a}_\varphi B_\varphi$的和为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_r(A_r + B_r) + \boldsymbol{a}_\theta(A_\theta + B_\theta) + \boldsymbol{a}_\varphi(A_\varphi + B_\varphi) \tag{1.16}$$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的点积为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi \tag{1.17}$$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的叉积为

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_r(A_\theta B_\varphi - A_\varphi B_\theta) + \boldsymbol{a}_\theta(A_\varphi B_r - A_r B_\varphi) + \boldsymbol{a}_\varphi(A_r B_\theta - A_\theta B_r)$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_r & \boldsymbol{a}_\theta & \boldsymbol{a}_\varphi \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix} \tag{1.18}$$

长度元　$dl_r = dr,\quad dl_\theta = d\theta,\quad dl_\varphi = d\varphi$

面积元

$$dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi,\quad dS_\theta = r\sin\theta dr d\varphi,\quad dS_\varphi = r dr d\theta \tag{1.19}$$

体积元

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \tag{1.20}$$

球坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \qquad (1.21)$$
$$\varphi = \arctan(y/x)$$

或

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \qquad (1.22)$$

1.2.3 标量场的梯度

1. 标量场的等值面

标量场可以用一个标量函数 $u=u(x,y,z)$ 来描述。

标量场的等值面方程：$u(x,y,z)=C$（C 为常数）。

2. 标量场的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \text{（直角坐标系下）}$$

式中，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是方向 l 的方向余弦。

3. 标量场的梯度

直角坐标系： $\nabla u = \boldsymbol{a}_x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \dfrac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \dfrac{\partial u}{\partial z}$

圆柱坐标系： $\nabla u = \boldsymbol{a}_r \dfrac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\varphi \dfrac{\partial u}{r\partial \varphi} + \boldsymbol{a}_z \dfrac{\partial u}{\partial z}$

球坐标系： $\nabla u = \boldsymbol{a}_R \dfrac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \dfrac{\partial u}{r\partial \theta} + \boldsymbol{a}_\varphi \dfrac{\partial u}{r\sin\theta\partial \varphi}$

1.2.4 矢量场的散度

1. 矢量线方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x} = \frac{\mathrm{d}y}{F_y} = \frac{\mathrm{d}z}{F_z}$$

2. 矢量场的通量

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}S \text{（穿过闭合面的通量）}$$

3. 矢量场的散度

直角坐标系： $\nabla\cdot \boldsymbol{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

圆柱坐标系： $\nabla\cdot \boldsymbol{F} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

球坐标系： $\nabla\cdot \boldsymbol{F} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 F_R) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$

4. 散度定理

$$\int_V \nabla\cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.2.5 矢量场的旋度

1. 矢量场的环流

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

2. 矢量场的旋度

直角坐标系：
$$\nabla\times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

圆柱坐标系：
$$\nabla\times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_r & r\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

球坐标系：
$$\nabla\times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_r & R\boldsymbol{a}_\theta & R\sin\theta\boldsymbol{a}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & RF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

3. 散度定理

$$\int_S \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

1.2.6 无旋场与无散场　拉普拉斯运算

1. 无旋场

$$\nabla\times \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{F} = -\nabla u,\qquad \oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

2. 无散场

$$\nabla\cdot \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{F} = \nabla\times \boldsymbol{A},\qquad \oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

3. 标量拉普拉斯运算

$$\nabla\cdot(\nabla u) = \nabla^2 u$$

直角坐标系：$\nabla^2 u=\nabla\cdot\left(a_x\frac{\partial u}{\partial x}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

圆柱坐标系：$\nabla^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

球坐标系：$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$

4. 矢量拉普拉斯运算

$$\nabla^2\boldsymbol{F}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})$$

1.2.7 亥姆霍兹定理

在有限的区域 V 内，任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件（即限定区域 V 的闭合面 S 上的矢量场的分布）唯一地确定，且可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})=-\nabla u(\boldsymbol{R})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$$

要掌握的运算技能有

$$\nabla\times(C\boldsymbol{A})=C\,\nabla\times\boldsymbol{A}\quad(C\text{ 为常数})$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{A})=u\,\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla u\times\boldsymbol{A}$$

特别强调　$\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}$，$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

静态场中 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$，而$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\times(\nabla\Phi)=\boldsymbol{0}$，说明电场是个无旋源的场，且是一个有势场；$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 可设 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 为矢位函数，用 $\boldsymbol{A}$ 表示磁场更能说明没有磁荷的这一道理。$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$。

1.3 考点辅导与精析

例 1.1　三角形的 3 个顶点为 $A(0,1,-2)$，$B(4,1,-3)$，$C(6,2,5)$。

(1) 判断 $\triangle ABC$ 是否为直角三角形。

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

解　三角形的 3 个边分别为 AB，BC 和 CA，让其 3 个边用有向线段来表示，它们分别为$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 和$\overrightarrow{CA}$，表达式为

$\overrightarrow{AB}=(4-0)\,\boldsymbol{a}_x+(1-1)\,\boldsymbol{a}_y+(-3+2)\,\boldsymbol{a}_z=4\,\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_z$

$\overrightarrow{BC}=(6-4)\boldsymbol{a}_x+(2-1)\boldsymbol{a}_y+(5+3)\boldsymbol{a}_z=2\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+8\boldsymbol{a}_z$

$\overrightarrow{CA}=(0-6)\,\boldsymbol{a}_x+(1-2)\,\boldsymbol{a}_y+(-2-5)\,\boldsymbol{a}_z=-6\,\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y-7\,\boldsymbol{a}_z$

因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times4+1\times0+8\times(-1)=0$，说明$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，所以$\triangle ABC$为直角三角形。

考虑到直角三角形的面积是容易计算的，这里为掌握叉乘的物理含义，用叉乘取模的办法：$\triangle ABC$ 的面积(注意三角形的面积是平行四边形面积的一半)

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 4 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 8\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{a}_x-34\,\boldsymbol{a}_y+4\,\boldsymbol{a}_z\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(1)^2+(-34)^2+(4)^2}=17.12\ (\text{个平方单位})$$

例 1.2 已知矢量$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x+2\,\boldsymbol{a}_y+3\,\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B}=4\,\boldsymbol{a}_x-5\,\boldsymbol{a}_y+6\,\boldsymbol{a}_z$，求它们之间的夹角和$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{B}$上的分量。

解 $$\cos\theta_{AB}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|}=(1\times4-2\times5+3\times6)/(\sqrt{14}\times\sqrt{77})$$

$$=\frac{12}{7\sqrt{22}}=0.365$$

$$\theta_{AB}=\arccos(0.365)=68.56^\circ$$

$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{B}$上的分量：

$$\boldsymbol{A}_B=(|A|\cos\theta_{AB})/\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}\cdot\frac{|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|}=\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{|\boldsymbol{B}|^2}$$

$$=\frac{12}{77}\times(4\,\boldsymbol{a}_x-5\,\boldsymbol{a}_y+6\,\boldsymbol{a}_z)$$

$$=0.62\,\boldsymbol{a}_x-0.78\,\boldsymbol{a}_y+0.94\,\boldsymbol{a}_z$$

例 1.3 证明：如果$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0})$，那么$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

解 由$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$可得$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0$，由$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$可得$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{0}$，那么有$|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})|=|\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})|$。设$\boldsymbol{A}$和$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$两矢量的夹角为$\theta$，则有

$$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|\cdot|\cos\theta|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|\cdot|\sin\theta|$$

因为$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，所以$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|\cdot|\cos\theta|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|\cdot|\sin\theta|$。

假若$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|\neq0$，就得到$|\cos\theta|=|\sin\theta|$，显然这没有普遍性，因此只有$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}|=0$，即

$$\sqrt{(B_x-C_x)^2+(B_y-C_y)^2+(B_z-C_z)^2}=0$$

相当于$B_x=C_x$，$B_y=C_y$，$B_z=C_z$，即$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

例 1.4 求矢量$\boldsymbol{A}=2\,\boldsymbol{a}_x+3xy\,\boldsymbol{a}_y-x\,\boldsymbol{a}_z$沿如图 1.1 所示积分路径 ① 和 ② 的标量线积分。

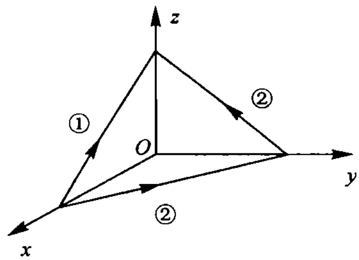


图 1.1

解 路径 ① 记为 l_1，即有

$$\int_{l_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{l_1}(A_x\boldsymbol{a}_x+A_y\boldsymbol{a}_y+A_z\boldsymbol{a}_z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{l_1}(A_x\boldsymbol{a}_x+A_y\boldsymbol{a}_y+A_z\boldsymbol{a}_z)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_x+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z)$$

$$=\int_{l_1}A_x\mathrm{d}x+A_z\mathrm{d}z=\int_{l_1}2\mathrm{d}x+(-x)\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x-\int_1^0 x\mathrm{d}z=-2-\int_0^1(1-z)\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{5}{2}(\text{路径 ① 上 } x+z=1,\text{所以 } x=1-z)$$

路径 ② 记为 l_2+l_3（l_2 对应 yOz 平面），即有

$$\int_{l_2+l_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{l_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{l_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{l_2}\boldsymbol{A}\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_y)+$$

$$\int_{l_3}\boldsymbol{A}\cdot(\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z)$$

$$=\int_{l_2}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+\int_{l_3}A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x+\int_0^1 3xy\Big|_{x=1-y}\mathrm{d}y+\int_1^0 3xy\Big|_{x=0}\mathrm{d}y+\int_0^1(-x)\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x+\int_0^1 3(1-y)y\Big|_{x=1-y}\mathrm{d}y+\int_0^1(-x)\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x+\int_0^1 3(1-y)y\mathrm{d}y+\int_0^1(-x)\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x+\int_0^1(3y-3y^2)\mathrm{d}y+\int_0^1(-0)\mathrm{d}z=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

例 1.5 矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x-2x\boldsymbol{a}_y+3y\boldsymbol{a}_z$，求它在柱坐标系下的表达式。

解 设在柱坐标系中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z$

$$A_r=\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_r\cdot(A_x\boldsymbol{a}_x+A_y\boldsymbol{a}_y+A_z\boldsymbol{a}_z)$$

$$=(\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_x)A_x+(\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_y)A_y+(\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_z)A_z$$