DAXUESHUXUE XUEXIZHIDAO YU XITIXIANGJIE

面向21世纪普通高等教育规划教材及学习指导

大学数学学习指导与习题详解

——配《大学数学（理工类）》第2版

徐新亚　陈学华　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材及学习指导

大学数学学习指导与习题详解

——配《大学数学(理工类)》第2版

徐新亚　陈学华　主　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是陈光曙主编的《大学数学(理工类)》(第 2 版)上、下册的配套教辅. 全书共分 10 章，各章的名称和顺序都是按照《大学数学(理工类)》第 2 版的结构顺序编排的，以方便学生学习时对照参考. 每一章分为三个部分：一、考试内容和要求，对考试内容和考试要求进行了简要归纳，便于复习时自我检查；二、典型例题选讲，精选了一些具有代表性的例题，其中有一些选自近几年的考研试题，引导学生分析解题思路，归纳解题技巧；三、课后习题解答，对课后的全部习题，包括 A 类和 B 类，给出了详细的解答.

本书内容翔实，为学生学好大学数学提供了极大的便利，既可作为选用《大学数学(理工类)》(第 2 版)上、下册高校学生的配套教辅，也可作为非数学专业学生考研复习冲刺时的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学学习指导与习题详解/ 徐新亚，陈学华主编. -- 上海：同济大学出版社，2012.4

配《大学数学：理工类》第 2 版

ISBN 978-7-5608-4793-1

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①徐… ②陈… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 027051 号

大学数学学习指导与习题详解——配《大学数学(理工类)》第 2 版

徐新亚 陈学华 主编

组稿 曹 建 张 莉 **责任编辑** 张 莉 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 22.5

字 数 450 000

印 数 1—2 100

版 次 2012 年 4 月第 1 版 2012 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4793-1

定 价 42.00 元

前　言

自从《大学数学(理工类)》2007年面世以来，受到了广大读者朋友和兄弟高校师生的厚爱，许多高校还将该书选作本、专科学生的教学用书，目前该书已出版了第2版，我们对此深表谢意.

受该书原作者的委托，应广大读者的要求，在我校本科学生的大力协助之下，我们经过数年的辛勤劳动，终于完成了这部《大学数学(理工类)》的配套教辅——《大学数学学习指导与习题详解》，希望藉此为各位读者朋友提供一点帮助. 如果能为朋友们带来学习上的方便，将是对我们工作的巨大鞭策和鼓舞. 我们衷心希望得到您一如既往的关注与支持，热忱欢迎您继续为我们提出宝贵意见.

全书共分10章，各章的名称和顺序都是按照《大学数学(理工类)》第2版的结构顺序编排的，以方便学生学习时对照参考. 每一章分为三个部分:(1) 考试内容和要求. 在这一部分中，我们将涉及本章内容的考试内容和考试要求进行了简要归纳，便于复习时自我检查. 其中考试内容参考了近年来国内有关高校全国硕士研究生入学考试高等数学课程的考试大纲. (2) 典型例题选讲. 在这一部分中，我们精选了一些具有代表性的例题，其中有一些选自近几年的考研试题. 在例题的解题过程中，我们注意引导学生分析解题思路，归纳解题技巧，把握主要知识点，关注各个知识点之间的关联特点，以期提高学生的解题能力和分析能力. (3) 课后习题解答. 这一部分中，我们对课后的全部习题，包括A类和B类，给出了详细的解答. 毋庸讳言，由于我们的水平有限，所有解答未必是有关习题的最佳方案，甚至会是错误的. 因此，恳请各位专家、同仁不吝赐教.

在本书的编写过程中，得到了我校数学科学学院的领导和广大师生的大力支持，我们在此表示由衷的感谢，特别要感谢陈光曙教授、柏传志教授、周友士教授和郭嵩、王志祥、朱成莲、王晓晶、史红波等老师的无私帮助!

编　者

2012年2月

目　录

第1章　函数、极限与连续

1.1　考试内容和要求

考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性，复合函数，反函数，分段函数，显函数与隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，有关的简单应用问题中函数关系的建立；数列极限与函数极限，函数的左极限与右极限，无穷小与无穷大，极限的四则运算，极限存在的两个准则，两个重要极限；连续函数，函数的间断点，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值的存在性、介值性).

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系式；
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；
3. 了解复合函数、反函数以及分段函数的概念，知道隐函数；
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形；
5. 理解极限、函数的左极限与右极限的概念，知道函数极限和函数左极限与右极限之间的关系；
6. 掌握极限的四则运算和极限的有关性质(唯一性、有界性、保号性等)；
7. 掌握极限存在的两个准则(两边夹定理，单调有界定理)，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法；
8. 理解无穷小、无穷大的概念及它们之间的关系，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小代换求有关极限；
9. 理解函数连续性的概念(包括左连续与右连续)，会区分函数间断点的类型；
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值的存在性、介值性)，并会利用这些性质解决有关问题.

1.2 典型例题选讲

例 1 设 $x_0 = 25$，$x_n = \arctan x_{n-1}$ ($n = 1, 2, \cdots$)，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

分析 这是对由递推公式给出的数列求极限，可考虑应用单调有界定理.

解 显然 $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ ($n = 1, 2, \cdots$)，

$$x_{n+1} - x_n = \arctan x_n - \arctan x_{n-1} = \arctan \frac{x_n - x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}},$$

且 $\arctan x$ 是增函数，故 $x_{n+1} - x_n$ 的符号与 $x_n - x_{n-1}$ 的符号相同，进而与 $x_{n-1} - x_{n-2}$ 符号相同，……，最后与 $x_1 - x_0 = \arctan 25 - 25 < 0$ 的符号相同，即 $x_{n+1} - x_n < 0$，故 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列. 由单调有界定理，$\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，对递推公式取极限，得 $\arctan A = A$，$A = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

注 (1) 数列 $\{x_n\}$ 的单调性也可以这样证：

设 $f(x) = x - \arctan x$，则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可导，且 $f(0) = 0$. 由于

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad (x > 0),$$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单增，得 $\arctan x < x$ ($x > 0$)，从而 $x_n = \arctan x_{n-1} < x_{n-1}$ ($n = 1, 2, \cdots$).

需要指出的是，我们在解题时不要拘泥于"这是哪部分的内容，必须用哪部分的方法"的思维定势. 例如求极限时也可以用导数，不要认为导数在极限之后就不能利用导数求极限，特别在考试时更要注意.

(2) 在 $(0, +\infty)$ 上，$\arctan x < x$，因此 $\arctan A = A$ 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一解是 $A = 0$.

例 2 设 $a_0 > 0$，$b > 0$，$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}\right)$，$n = 1, 2, \cdots$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求出极限值.

分析 和例 1 的情形一样，我们继续利用单调有界定理.

证明 显然 $a_n > 0$，$n = 1, 2, \cdots$. 因几何平均值不超过算术平均值，故

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}\right) \geqslant \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{b}{a_{n-1}}} = \sqrt{b},$$

得

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = a_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

即数列$\{a_n\}$是单调减少的有下界数列. 由单调有界定理，$\{x_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，对递推公式取极限，得

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{b}{A}\right),\quad A^2 = b,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{b}$.

注　在讨论由递推公式给出的数列的极限问题时，我们通常是先确定该数列的"界"，然后再利用这个"界"去确定该数列的单调性. 从这个意义上说，单调有界定理似乎应当说成"有界单调定理".

例 3　证明极限$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)} = 0$.

分析　注意到这是一个整数列的极限，可考虑用"放大法"将其通项放大为一个极限仍为零的某数列的通项，再利用两边夹定理.

证明　记$a_n = \dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}$，则

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}\\
&= \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times(2n+1)}\\
&= \frac{1}{a_n(2n+1)},
\end{aligned}$$

得$0 < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$，故由两边夹定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. 证毕.

注　(1) 证明过程中用到了中学数学中我们熟悉的结论："当$a>0$，$b>0$，$a<b$时，$\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$成立".

(2) 在利用两边夹定理时，"放大法"是常用的方法.

例 4　设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$. 证明：对任意的$a>0$，都有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

分析　证题的关键在于如何从$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$得出$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$. 为此，我们可以先选一些特殊的值加以考虑，再向一般情况推广.

证明 不妨设 $f(x)>0$（若 $f(x)<0$，考虑 $-f(x)$ 即可）. 由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，故对任意的 $x>0$，存在正整数 n，使得 $\dfrac{f(2nax)}{f(x)}\geqslant 1$，及 $\dfrac{f\left(\frac{ax}{2n}\right)}{f(x)}\leqslant 1$，于是

$$\frac{f(ax)}{f(x)}=\frac{f(ax)}{f(2ax)}\frac{f(2ax)}{f(4ax)}\cdots\frac{f(2(n-1)ax)}{f(2nax)}\frac{f(2nax)}{f(x)}$$

$$\geqslant\frac{f(ax)}{f(2ax)}\frac{f(2ax)}{f(4ax)}\cdots\frac{f(2(n-1)ax)}{f(2nax)},$$

$$\frac{f(ax)}{f(x)}=\frac{f(ax)}{f\left(\frac{ax}{2}\right)}\frac{f\left(\frac{ax}{2}\right)}{f\left(\frac{ax}{4}\right)}\cdots\frac{f\left(\frac{ax}{2(n-1)}\right)}{f\left(\frac{ax}{2n}\right)}\frac{f\left(\frac{ax}{2n}\right)}{f(x)}$$

$$\leqslant\frac{f(ax)}{f\left(\frac{ax}{2}\right)}\frac{f\left(\frac{ax}{2}\right)}{f\left(\frac{ax}{4}\right)}\cdots\frac{f\left(\frac{ax}{2(n-1)}\right)}{f\left(\frac{ax}{2n}\right)},$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}\geqslant\lim_{x+\infty\to}\frac{f(ax)}{f(2ax)}\frac{f(2ax)}{f(4ax)}\cdots\frac{f(2(n-1)x)}{f(2nx)}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f\left(\frac{ax}{2}\right)}\frac{f\left(\frac{ax}{2}\right)}{f\left(\frac{ax}{4}\right)}\cdots\frac{f\left(\frac{ax}{2(n-1)}\right)}{f\left(\frac{ax}{2n}\right)}=1.$$

从而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1.$$

例 5 试确定 a，b 的值，使 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=1$.

分析 注意到当 $x\to1$ 时，分母的极限是零，因此要实现 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=1$，必须 $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x+a}+b)=0$.

解 由 $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$ 知，$\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x+a}+b)=\sqrt{1+a}+b=0$，$b=-\sqrt{1+a}$. 于是

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})} = \frac{1}{4\sqrt{1+a}} = 1,$$

得 $a = -\frac{15}{16}$. 代入 $b = -\sqrt{1+a}$, 得 $b = -\frac{1}{4}$.

注 在求"$\frac{0}{0}$"型不定式的极限时,关键是约去分子、分母共有的零因子.

例 6 证明:若函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,则存在 ξ,使 $f(\xi+\pi) = f(\xi)$.

分析 考虑在 $[0, \pi]$ 上连续的函数 $F(x) = f(x+\pi) - f(x)$,应用介值定理.

证明 设 $F(x) = f(x+\pi) - f(x)$,则 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续,且

$$F(0) = f(\pi) - f(0) = -F(\pi).$$

以下分两种情况讨论:

(1) 若 $F(0) = 0$,则可取 $\xi = \pi$;

(2) 若 $F(0) \neq 0$,则 $F(0)F(\pi) < 0$,由介值定理,$\exists \xi \in (0, \pi)$,使得 $F(\xi) = 0$,从而 $f(\xi+\pi) = f(\xi)$.

1.3 课后习题解答

习题 1

A 类

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

(2) $y = \arccos(4x^2 - 1)$;

(3) $y = \tan(2x - 1)$;

(4) $y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$;

(5) $y = \sqrt{16 - x^2} - \lg\sin x$;

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$;

(7) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$;

(8) $y = \sin\sqrt{x}$;

(9) $y = \sqrt{3 - x} + \arctan\frac{1}{x}$;

(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $[-2, 2]$; (2) $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; (3) $x \neq \frac{2k+1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ (k 为整数);

(4) $[1, 4]$; (5) $[-4, -\pi) \cup (0, \pi)$; (6) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$;

(7) $[-1, 0) \cup (0, 1]$; (8) $x \geqslant 0$; (9) $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$;

(10) $x \neq 0$.

2. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

解 (1) $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同,这是因为 $f(x)$ 的定义域是 $x \neq 0$, $g(x)$ 的定义域是 $x > 0$,它们的定义域是不相同的.

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 不相同,这是因为 $f(x)$ 可正可负,而 $g(x) \geqslant 0$.

(3) $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同,因为二者有相同的定义域和值域.

(4) $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同,因为二者有相同的定义域和值域.

3. 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x+1)$.

解 $f(0) = 2$, $f(1) = 1^2 - 3 + 2 = 0$, $f(2) = 2^2 - 3\times 2 + 2 = 0$,

$f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 2 = x^2 + 3x + 2$,

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{3}{x} + 2 = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x} + 2$,

$f(x+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = x^2 - x$.

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ 2, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3x+4, & x < -1. \end{cases}$$

求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(2)$.

解 $f(0) = 2$, $f(1) = 2$, $f(-3) = 3\times(-3) + 4 = -5$, $f(2) = \dfrac{2}{\sqrt{2^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

5. 设

$$\varphi(x+1) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

求 $\varphi(x)$.

解法 1 令 $x+1 = t$,得 $x = t-1$. 由 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 即 $0 \leqslant t-1 \leqslant 1$,得 $1 \leqslant t \leqslant 2$;

由 $1 < x \leqslant 2$ 即 $1 < t-1 \leqslant 2$，得 $2 < t \leqslant 3$，故

$$\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 1\leqslant t\leqslant 2,\\ 2(t-1), & 2<t\leqslant 3.\end{cases} \quad 或 \quad \varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

解法 2　对 $\varphi(x)$ 的解析式变形，得

$$\varphi(x+1)=\begin{cases}(x+1)^2-2(x+1)+1, & 1\leqslant x+1\leqslant 2,\\ 2(x+1)-2, & 2<x+1\leqslant 3.\end{cases}$$

故

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2-2x+1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-2, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

6. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数，且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加，试证 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

证明　因 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加，则 $\forall x_1, x_2 \in (0, a)$ 且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) < f(x_2)$. $\forall x_1, x_2 \in (-a, 0)$ 且 $x_1 < x_2$，得 $-x_1, -x_2 \in (0, a)$，且 $-x_2 < -x_1$，有 $f(-x_2) < f(-x_1)$. 于是由 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数知 $-f(x_2) < -f(x_1)$，即 $f(x_1) < f(x_2)$. 故 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加. 证毕.

7. 设下列所考虑的函数都是定义在 $(-a, a)$ 内，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的积是偶函数，偶函数与奇函数的积是奇函数.

证明　设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 都是偶函数，$g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 都是奇函数，则

$$f_1(-x)=f_1(x),\ f_2(-x)=f_2(x),$$
$$g_1(-x)=-g_1(x),\ g_2(-x)=-g_2(x).$$

则

(1) $f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)$,

$$g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)+[-g_2(x)]=-[g_1(x)+g_2(x)].$$

故两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数.

(2) $f_1(-x)\,f_2(-x)=f_1(x)\,f_2(x)$,

$$g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x),$$
$$f_1(-x)g_1(-x)=f_1(x)[-g_1(x)]=-f_1(x)g_1(x).$$

故两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的积是偶函数，偶函数与奇函数的积是奇函数. 证毕.

8. 下列函数中，哪些是偶函数？哪些是奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(a>0, a\neq 1)$.

解 (1)、(3)、(6) 是偶函数，(4) 是奇函数，(2)、(5) 既非奇函数，也非偶函数.

9. 下列函数中，哪些是周期函数？如果是周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$；　　(6) $y=|\sin x|$.

解　(1) 是周期函数，周期为 2π；(2) 是周期函数，周期为$\dfrac{\pi}{2}$；(3) 是周期函数，周期为 2；(4) 不是周期函数；(5) 是周期函数，周期为 π；(6) 是周期函数，周期为 π.

10. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$；　　(4) $y=2\sin 3x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$，知反函数为 $y=x^3-1$；

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，知反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，即函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 为自反函数；

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$，知反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$；

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，知反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$.

11. 在温度计上，0℃ 对应32°F，100℃ 对应212°F，已知二者的关系是线性关系，求 F 与 C 之间的函数关系.

解　设 $F=kC+b$ 为所求函数，则当 $C=0$ 时，$F=32$；当 $C=100$ 时，$F=212$. 代入得 $b=32$；$212=100k+b$，$k=1.8$. 故 $F=1.8C+32$ 即为所求函数.

12. 设生产与销售某种产品的总收益是产量的二次函数，由统计得知，当产量分别为 0，2，4 时，总收益分别为 $-\dfrac{1}{2}$，3，7. 试确定这个函数.

解　设所求函数为 $y=ax^2+bx+c$，则由题意得

$$-\frac{1}{2}=c,\ 3=4a+2b+c,\ 7=16a+4b+c.$$

解此方程组，得 $a=\frac{1}{16},\ b=\frac{13}{8},\ c=-\frac{1}{2}$．所求函数为 $y=\frac{1}{16}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{1}{2}$．

13. 从一块半径为 R 的圆形铁片上剪去一个扇形，将剩下的部分做成一个无底圆锥，试将无底圆锥的容积表示为扇形中心角的函数.

解 设扇形中心角为 θ，圆锥的容积为 V，则圆锥底面周长为 $R(2\pi-\theta)$，底面半径为$\frac{R(2\pi-\theta)}{2\pi}$，圆锥的高为

$$\sqrt{R^2-\left[\frac{R(2\pi-\theta)}{2\pi}\right]^2}=\sqrt{\frac{R^2(4\pi-\theta)\theta}{4\pi^2}}=\frac{R\sqrt{(4\pi-\theta)\theta}}{2\pi},$$

故

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2\ (2\pi-\theta)^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R\sqrt{(4\pi-\theta)\theta}}{2\pi}\\&=\frac{R^3\ (2\pi-\theta)^2\sqrt{(4\pi-\theta)\theta}}{24\pi^2}\ (0<\theta<2\pi).\end{aligned}$$

14. 已知 $y=u^2,\ u=\sqrt[3]{x+1},\ x=\sin t$，试将 y 表示成 t 的函数.

解 $y=(1+\sin t)^{\frac{2}{3}}$.

15. 下列函数可以看成由哪些函数复合而成？

(1) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　　(2) $y=\lg^2\arccos x^3$；

(3) $y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$；　　(4) $y=\tan^2\sqrt{5-2x}$.

解 (1) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 由 $y=\sqrt{u},\ u=\ln v,\ v=\sqrt{x}$ 复合而成；

(2) $y=\lg^2\arccos^3 x$ 由 $y=w^2,\ w=\lg u,\ u=\arccos v,\ v=x^3$ 复合而成；

(3) $y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}$ 由 $y=\mathrm{e}^u,\ u=v^2,\ v=\sin x$ 复合而成；

(4) $y=\tan^2\sqrt{5-2x}$ 由 $y=w^2,\ w=\tan u,\ u=\sqrt{v},\ v=5-2x$ 复合而成.

16. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$ 求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$ $\varphi[\psi(x)]=0$. $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$

17. 设当 $0<u<1$ 时，函数 $f(u)$ 有定义，求下列函数的定义域.

(1) $f(\sin x)$；

(2) $f(\ln x)$；

(3) $f[\varphi(x)]$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$

解 (1) 由 $0 < \sin x < 1$ 知，$f(\sin x)$ 的定义域为

$$\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi\right)\quad (k\text{ 为整数})；$$

(2) 由 $0 < \ln x < 1$ 知，$f(\ln x)$ 的定义域为 $1 < x < \mathrm{e}$；

(3) 由 $0 < \varphi(x) < 1$ 知，$f(\varphi(x))$ 的定义域为 $-1 < x < 0$.

18. 利用图像的叠加法作下列函数的图像.

(1) $y = x + \dfrac{1}{x}$；　　(2) $y = x + \sin x$.

解 图像略.

19. 试述下列函数与函数 $y = f(x)$ 图形的关系，这里，a 为非零常数.

(1) $f(x)+a$； (2)$af(x)$； (3) $f(x+a)$； (4) $f(ax)$.

解 (1) $f(x)+a$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像沿 y 轴方向向上(当 $a > 0$) 或向下(当 $a < 0$) 平移 $|a|$ 个单位得到的；

(2) 当 $a > 0$ 时，$af(x)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像沿 y 轴方向向上放大(当 $a > 1$ 时) 或压缩(当 $0 < a < 1$ 时)a 个单位而得到的；当 $a < 0$ 时，$af(x)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像沿 y 轴方向向下放大(当 $a < -1$ 时) 或压缩(当 $-1 < a < 0$ 时)$|a|$ 个单位而得到的.

(3) $f(x+a)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像沿 x 轴方向向左(当 $a > 0$) 或向右(当 $a < 0$) 平移 $|a|$ 个单位得到的；

(4) 当 $a > 0$ 时，$f(ax)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像沿 x 轴方向压缩 $|a|$ 个单位得到的；当 $a < 0$ 时，$f(ax)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像沿 x 轴方向压缩 $|a|$ 个单位后，再反射到 y 轴的对称位置.

20. 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$；　(2) $\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$；　(3) $\left\{5-\dfrac{1}{n}\right\}$；

(4) $\left\{\dfrac{2n^2+1}{n^2}\right\}$；　(5) $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}\right\}$；　(6) $\left\{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\right\}$；

(7) $\left\{(-1)^n\left(\dfrac{99}{100}\right)^n\right\}$；　(8) $\left\{\dfrac{3^n}{3^n+1}\right\}$.

解 (1) 0； (2) 0； (3) 5； (4) 2； (5) $\dfrac{1}{2}$； (6) 1； (7) 0； (8) 1.

21. 设 $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$. (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$；(2) 若取 $\varepsilon = 0.001$，问几项后均满足 $|a_n - A| < \varepsilon$?

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (2) 取 $\varepsilon = 0.001$，若 $|a_n - A| < \varepsilon$，即 $|a_n| < 0.001$，只需 $n > 1\,000$. 故自 1 001 项开始以后的一切项均满足 $|a_n - A| < \varepsilon$.

22. 利用极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}=1$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证明　(1) 对 $\forall\varepsilon>0$，要想 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 即可，可取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$.
于是 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，$\forall n>N$，就有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$，要想 $\left|\dfrac{n+1}{2n+3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2n+3}<\varepsilon$，注意到 $\dfrac{1}{2n+3}<\dfrac{1}{2n}$，只要 $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$ 即可，可取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，$\forall n>N$，就有 $\left|\dfrac{n+1}{2n+3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 对 $\forall\varepsilon>0$，要想 $\left|\dfrac{n^2+1}{n^2}-1\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 即可，可取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$.
于是 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，$\forall n>N$，就有 $\left|\dfrac{n^2+1}{n^2}-1\right|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}=1$.

(4) 对 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，要想 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=10^{-n}<\varepsilon$，只要 $n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可，可取 $N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，$\forall n>N$，就有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

23. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 并举例说明反过来不成立.

证明　因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，即 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，$\forall n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 由于

$$\left|a_n-a\right|\geqslant\left||a_n|-|a|\right|,$$

故 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，$\forall n>N$，有 $\left||a_n|-|a|\right|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

又设 $a_n=(-1)^n$，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

24. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明　因 $\{x_n\}$ 有界，故存在 $M>0$，使 $|x_n|\leqslant M$. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故 $\forall\varepsilon>0$，