经济数学基础

（上册）

杨桂元
马永开 等编著

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

中国物资出版社

高职、高专及成人高校系列教材

经济数学基础

（上　册）

主　编　杨桂元
　　　　马永开
副主编　董安明
　　　　陈德刚
参　编　刘新惠

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/杨桂元、马永开主编. … 一北京：中国物资出版社，2000.2

ISBN 7-5047-1330-9

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①杨… ②马… Ⅲ. 经济数学-教材

Ⅳ. F22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 22802 号

责任编辑：王秋萍
特约编辑：张 辉
装帧设计：郭同桢

中国物资出版社出版发行
(北京市西城区月坛北街 25 号 邮政编码：100834)
全国新华书店经销
北京科发文化交流有限公司激光照排
安徽省蚌埠市方达印刷厂印刷
850×1168 毫米 32 开本 20 印张 233 千字
2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月第 1 次印刷
印数：00001～5000 册
ISBN 7-5047-1330-9/F·0489
定价：28.00 元(单价：14.00 元)

编审说明

为适应高职、高专及成人高校专业设置和面向21世纪高等教育改革的需要，我们组织多年从事经济数学教学的大专院校教师，根据经济类、工商管理类大专的特点和要求编写了这套《经济数学基础》（上、下册）教材。读者对象以经济类、工商管理类高等职业技术学院、高等专科学校、成人高等院校学生为主，同时兼顾数学课时较少的经济管理类本科和基础较好的高中中专，也可作为经济管理人员自学参考书。

全书包括微积分、线性代数与概率统计三篇，分为上、下两册。上册包括第一篇微积分的内容，分为“函数的极限与连续”、“导数与微分”、“中值定理与导数的应用”、“不定积分”、“定积分及其应用”和“多元函数的微积分”等六章。下册包括第二篇、第三篇的内容，第二篇线性代数分为“行列式”、“矩阵”、“线性方程组”与“矩阵的特征值和特征向量”四章；第三篇概率统计分为“随机事件及其概率”、“随机变量的分布与数字特征”、“抽样分布”、“统计推断”和“一元线性回归分析”五章。内容安排由浅入深，循序渐进，粗细合理，结构严谨，既保持了数学学科理论体系的完整，又注重数学在经济管理中的应用。全书每节后均配有练习，每章后附有内容小结和习题，并在书后附有练习和习题的参考答案。全套教材可供一学年（每周约4课时，有条件的每周加习题课1课时）讲授，其中上、下册各讲授一个学期。

本书在编写和出版过程中，得到中国物资出版社领导和北京科发文化交流有限公司董事长张辉先生的大力支持，安徽财贸学院数学教研室吴述金老师对本书提出了修改意见，书中引用和借鉴了一

些国内同类教材,对此,我们一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中错误和疏漏之处在所难免,敬请有关专家和广大读者提出宝贵的意见,以便不断修订完善。

高职、高专及成人高校系列教材编委会

2000 年 3 月

目 录

上 册

下 册

上篇 微积分

第一章 函数的极限与连续性

实数、函数和极限被称为微积分学理论的三大基石，函数是微积分研究的对象，而极限法是微积分研究问题的基本方法. 本章将复习和加深函数的有关概念及性质，讨论函数的极限和函数的连续性.

§1.1 函 数

一、邻域

微积分中，常用到的集合是实数集 R 的一些子集，这些子集通常是区间(或区间的并集)和邻域，区间的概念在初等数学中已学过，我们下面给出邻域的概念.

定义 1.1 我们把数轴上一个以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域，其中 $\delta(>0)$ 称为邻域半径. 从 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0 而形成的集合

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

称为 x_0 的 δ 空心邻域.

例如，1 的 $\frac{1}{3}$ 领域是 $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，4 的 0.1 邻域为(3.9,4.1)，10 的 $\frac{1}{2}$ 空心邻域为 $(9.5,10)\cup(10,10.5)$.

二、函数的概念

(一)函数的定义

定义 1.2 设 D,M 是两个实数集，若对任意的 $x\in D$，按照某个对应关系 f，集合 M 中总有惟一确定的 y 与之对应，则称 y 为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作

$$y=f(x) \quad x\in D$$

其中，x 称为自变量，自变量的允许值集合 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，y 称为因变量，全体函数值即因变量的所有取值构成的集合称为函数的**值域**.

有时，变量 x 在一定的范围内变化时，y 的值保持不变，则根据函数的定义，y 仍是 x 的函数，我们称之为常值函数，记作

$$y=C \quad (C\text{ 为常数})$$

函数反映了两个变量之间的依存关系，它涉及到定义域、对应关系和值域. 显然，如果函数的定义域和对应关系被确定以后，其值域必然随之确定. 因此，定义域和对应关系构成了函数的两个要素，若两个函数的定义域和对应关系都相同，则称两个**函数相同**. 如 $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 是两个相同的函数；$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 因其定义域不同，所以它们是两个不同的函数.

例 1 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 由 $4-x^2\geqslant 0$ 得 $x\in[-2,2]$；又由 $x-1>0$ 得 $x\in(1,+\infty)$，所以函数的定义域 $D=\{x|1<x\leqslant 2\}$.

例 2 求函数 $y=\lg(2-\sqrt{x-1})$ 的定义域.

解 由 $x-1\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 1$；又由 $2-\sqrt{x-1}>0$ 得 $x<5$，所以函数的定义域 $D=\{x|1\leqslant x<5\}$.

例 3 下列函数与函数 $y=x$ 是否相同？为什么？

(1) $y=\sqrt{x^2}$；(2) $y=(\sqrt{x})^2$；(3) $y=\sqrt[3]{x^3}$

解　(1)$y=\sqrt{x^2}=|x|$和 $y=x$ 有相同的定义域 R，但当 $x<0$ 时，两函数有不同的对应关系，所以函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是不相同的函数.

(2)函数 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是$[0,+\infty)$，而函数 $y=x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，它们的定义域不同，所以函数 $y=x$ 和函数 $y=(\sqrt{x})^2$ 不相同.

(3)因为函数 $y=x$ 和函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 的定义域都是 R，且对于任何 $x\in R$，都有$\sqrt[3]{x^3}=x$，即两函数具有相同的对应关系，所以函数 $y=x$ 和函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 是相同的.

(二)函数的四个性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；若对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $y=x^2-4$，$y=\cos x$ 为偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 为奇函数；$y=\lg x$，$y=(x-1)^2$ 既不是奇函数，也不是偶函数，称之为**非奇非偶函数**.

由定义可知，偶函数图像关于 y 轴对称(如图 1－1 所示)，奇函数的图像关于坐标原点对称(如图 1－2 所示).

2. 函数的单调性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b)内有定义，对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，满足 $x_1<x_2$. 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内**单调递增**，区间(a,b)称为函数的**单调递增区间**；

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内**单调递减**，区间(a,b)称为函数的**单调递减区间**. 单调递增与单调递减的函数统称为**单调函数**.

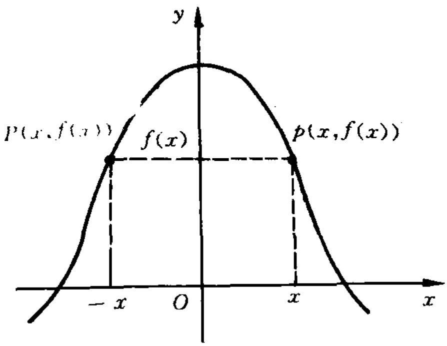


图 1—1

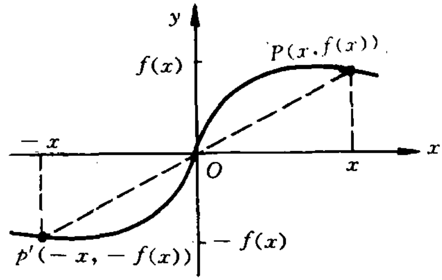


图 1—2

单调增加函数的图像沿 x 轴的正向逐渐上升(如图 1—3 所示),单调减少函数的图像沿着 x 轴的正向逐渐下降(如图 1—4 所示)

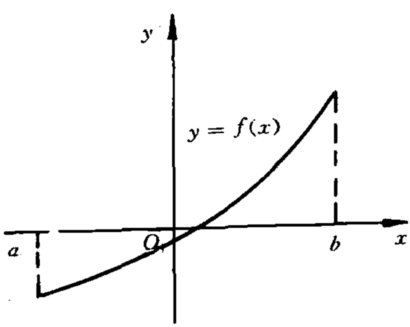


图 1—3

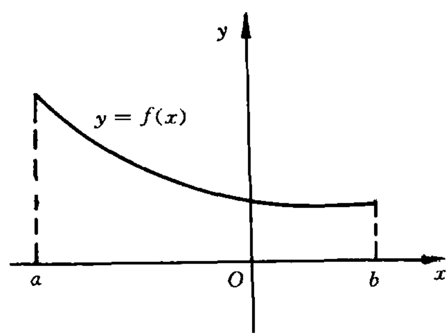


图 1—4

例如,区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$分别是函数 $y=x^2$ 的单调递减区间和单调递增区间.

事实上,任取 $x_1<x_2\in(-\infty,0)$则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=x_1^2-x_2^2\\&=(x_1+x_2)(x_1-x_2)\end{aligned}$$

显然,$x_1+x_2<0,x_1-x_2<0$

则 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$

因此,区间$(-\infty,0)$是函数 $y=x^2$ 的单调递减区间.

同样可以证明,区间$(0,+\infty)$是函数 $y=x^2$ 的单调递增区间.

3. 函数的有界性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对任意的 $x\in(a,b)$，存在一个正实数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**；若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

上述定义也适用于闭区间的情形.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，因为对于一切的 $x\in R$，都有 $\left|\dfrac{x^2}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ 成立，所以 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 是 R 上的有界函数.

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的；而在区间 $(1,2)$ 内，有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，则函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界.

显然，有界函数的几何意义是：在自变量的某个区间内，函数 $f(x)$ 的图形介于直线 $y=M$ 和直线 $y=-M$ 之间（如图 1—5 所示）.

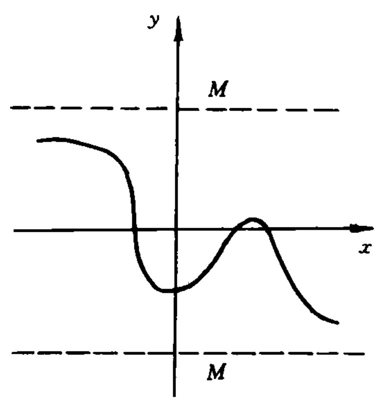


图 1—5

4. 函数的周期性

定义 1.6　对于函数 $f(x)$，如果存在一个正的常数 L，使得对于定义域内的一切 x，等式 $f(x+L)=f(x)$ 都成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足该等式的最小正数 L 称为函数的**最小正周期**，简称**周期**.

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数；$y=\mathrm{tg}x$ 和 $y=\mathrm{ctg}x$ 是周期为 π 的周期函数；$y=A\sin(wt+\varphi)\quad(w>0)$ 是周期为 $\dfrac{2\pi}{w}$ 的周期函数.

周期函数图像的特点是在定义域内每隔长度为 L 的相邻区间

上，函数图形有相同的形状如周期函数 $y=\cos x$ 的图像(如图 1－6 所示).

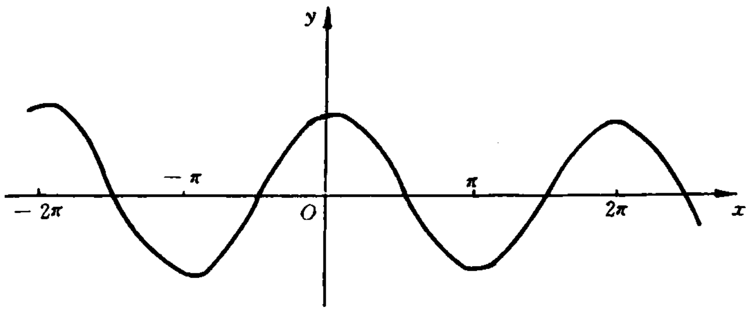


图 1－6

(三)反函数

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，对任意的 $y\in M$，在 D 中有惟一的一个 x 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 M 上定义了另一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ **反函数**. 记为

$$x=f^{-1}(y)$$

例如，$y=2x+1$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=(-\infty,+\infty)$，反函数是 $x=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}$

只有一一对应的函数才有反函数，而且函数 $y=f(x)$ 的定义域就是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域，函数 $y=f(x)$ 的值域就是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域.

反函数的实质在于表示它的对应规则 f^{-1} 中，至于用什么字母表示反函数中的自变量与因变量却是无关紧要的. 习惯上，我们都是以 x 表示自变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 一般表示成 $y=f^{-1}(x)$.

例 4 求 $y=\dfrac{x+5}{x-2}$ 的反函数

解 由 $y=\dfrac{x+5}{x-2}$ 可得

$$(x-2)y=x+5$$

解得　　$x=\dfrac{2y+5}{y-1}$

将 x、y 的位置互换，即得 $y=\dfrac{x+5}{x-2}$ 的反函数

$$y=\frac{2x+5}{x-1}$$

例 5　研究 $y=x^2$ 的反函数的存在性.

解　由 $y=x^2$ 可得 $x=\pm\sqrt{y}$. 由于 x 与 y 不是一一对应的，故 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在反函数. 若将 $y=x^2$ 限定在 $[0,+\infty)$ 上，则 $x=\sqrt{y}$ 就是一一对应的了，故此时 $y=x^2$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$；同理 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上的反函数是 $y=-\sqrt{x}$.

任意函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

三、初等函数

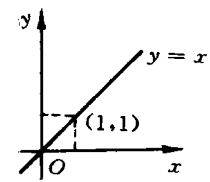
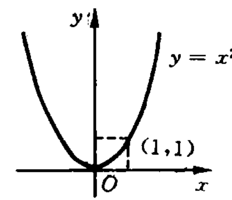
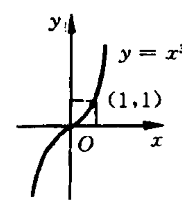
(一)基本初等函数

下列六种函数统称为**基本初等函数**.

1. 常值函数：$y=C$
2. 幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 是任意实常数）
3. 指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）
4. 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）
5. 三角函数：$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\mathrm{tg}x$；$y=\mathrm{ctg}x$；$y=\sec x$；$y=\csc x$.
6. 反三角函数：$y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$；$y=\cos x, x\in[0,\pi]$；$y=\mathrm{tg}x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$；$y=\mathrm{ctg}x, x\in(0,\pi)$ 的反函数叫做反三角函数，分别记为 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$ 和 $y=\mathrm{arcctg}x$.

这些基本初等函数的主要性质见表 1－1.

表 1—1　　基本初等函数表

	函数	定义域和值域	图　像	特　征
幂函数	$y=x$ $(\alpha=1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$ $(\alpha=2)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$ $(\alpha=3)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加