数学建模能力培养方法研究

韦程东 著

科学出版社

数学建模能力培养方法研究

韦程东　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是一部关于数学建模能力培养方法的专著.本专著分四篇，共有 26 章.第一篇(1～7 章)以问卷调查、访谈和分析学生数学建模作品的质量等方法，了解大学生掌握数学的基本理论、大学生的数学建模意识和数学建模能力的状况.第二篇(8～12 章)从学生的实际情况出发，研究如何培养大学生掌握数学的基本技能，以发展的眼光去学习数学理论与方法.第三篇(13～24 章)研究如何在大学数学主干课程教学中，融入数学建模的思想方法.第四篇(25、26 章)探讨了如何用数学元认识等方式，指导学生在日常生活中开展数学建模活动，参加数学建模竞赛.

本书适合于从事数学等方面的科研、教学人员及研究生、大学生、数学建模爱好者学习与参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模能力培养方法研究 / 韦程东著. —北京：科学出版社，2012.3

ISBN 978-7-03-033939-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①韦… Ⅲ. ①数学模型－教学研究－高等学校 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 055866 号

责任编辑：杨　岭　郝玉龙/封面设计：陈思思

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http//www.sciencep.com

成都创新包装印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第　一　版　　开本：B5(720×1000)

2012 年 3 月第一次印刷　　印张：10.5

字数：210 000

定价：34.00 元

前　　言

数学迅速向自然科学和社会科学的各个领域渗透，在工程技术、经济建设及金融管理等各个方面发挥着越来越重要的作用，数学建模就是在这种背景下发展起来的一个新型数学分支. 数学与计算机技术相结合，形成了在当代至关重要的一门技术——数学技术，并且成为当代高新技术的一个重要组成部分. 用数学方法解决各类实际问题或实施数学技术，数学建模均起着关键的作用. 把数学与客观实际问题联系起来，需要用数学的语言、方法去近似地刻画实际问题，而这种数学表达就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程.

引导学生参与数学建模活动，培养学生的创新能力已被越来越多的高校所重视. 以数学建模为平台，引导学生参与科学研究，培养大学生的创新能力是当前大学数学教学重要的目标之一. 我国在 20 世纪 90 年代初开展的大学生数学建模竞赛，目前已发展成为全国乃至全世界规模最大、影响最大的大学生课外科技活动. 通过广泛的调查研究和访谈，以及对大学生在不同时期的数学建模作品的质量分析，笔者了解到目前大学生的数学建模意识不强，运用数学的思想方法去发现、分析、解决实际问题的能力不高，因此开始着手研究培养大学生数学建模能力的方法. 现在奉献给大家的这本书，设法跳出以往数学建模教材、著作的框架，力求从学生的实际出发，以数学类主干课程以及日常教学为平台，从理论与实践两个层面对培养学生数学建模能力的方法进行系统的研究和阐述.

本书得到广西高校重点实验室——科学计算与智能信息处理实验室和广西自治区级精品课程《数学建模》的建设经费的共同资助. 在元昌安等老师的大力支持下，笔者完成本书的充实、完善和修改工作，在此对科学计算与智能信息处理实验室和《数学建模》教学团队的老师们表示衷心感谢. 在科学出版社郝玉龙等同志的帮助和关心下，此书得到很快出版，在此一并表示感谢.

在本书的撰写过程中，笔者得到了广西师范学院数学学院广大师生的帮助，特别是徐庆娟、郭金、陈建伟、欧阳等老师，陈志强、吕孝亮、吴文俊、韦师、邓立凤、江惠英、王弗、魏换其等研究生，以及斯婷、梁宏妃、韦春、李振杰等本科生同学，他们在数学课堂以及日常的数学建模活动中检验相关的理论与方法，为本书部分章节的打印、修改做了大量的工作，在此表示衷心感谢. 另外，在撰写过程中，笔者还参考了有关的文献和书籍，在此谨向作者们表示衷心的感谢.

由于培养学生数学建模能力是一项富有挑战性的新课题，国内外在培养方法等方面都没有定型的模式，加之笔者水平有限，错谬之处在所难免，恳请同行与广大读者批评指正.

韦程东

2012 年 2 月

目　　录

第四篇　培养学生参加全国大学生数学建模竞赛能力研究

第一篇　大学生掌握数学基本技能及数学建模能力的调查研究

本篇通过问卷调查、访谈等形式对大学生掌握数学归纳法、反证法等数学基本技能的情况、开展数学建模活动的情况和在数学建模活动中的元认识能力以及研究生开展数学建模活动状况进行调查研究. 在此过程中，我们发现初等数学教学与高等数学教学有显著的差异，因而，我们在培养学生数学建模能力的过程中，要注意初等数学教学与高等数学教学的衔接问题.

第 1 章　理工科学生掌握数学归纳法状况的调查研究

1.1　问 题 背 景

前几年,我们带学生到中学进行教育实习,发现有的实习生不能解决高中生学习数学归纳法产生的困惑,有的实习生不会更正、讲评高中生用数学归纳法时出现的错误 . 2001 年 11、12 月份,我们在"211 工程"立项学校广西大学、原电子工业部直属院校桂林电子工业学院、广西民族大学、广西师范学院、南宁师范高等专科学校等院校中,对数学、物理、化学、地理、环保、制糖、信息技术、计算机应用、计算机科学、计算机网络等专业的学生进行问卷调查,发出调查表 1000 份,收回有效问卷 696 份 . 本文对调查结果进行了分析,提出了相关教学建议以改善师范生对数学归纳法掌握差的状况. 由于教学的共性,这些教学上的方法、措施对理工科其他专业的高等数学教学也有可参考之处.

1.2　调查的问题、答卷情况及分析

1.2.1　调查的问题及答卷情况

1."虽然我已经用数学归纳法证明了一个命题,但我却并不能肯定我所证的命题是否真正成立,因为我用到了归纳假设,即假设当 $n=k$ 时命题成立,而我却不知道命题对这个 k 是否真的成立."你同意此看法吗? 是/否;说出你的理由.

2."归纳假设只是一种假设,我们不能对它进行证明."你同意此这观点吗? 你有办法检验归纳假设所表示的判断成立吗? 有/无;说出你的理由.

3. 你是否同意下述说法:"在使用数学归纳法的过程中,归纳推理存在一个缺陷: 在这一步中,我们开始假设命题是正确的,进而依赖它去推出命题成立."是/否;说出你的理由.

4."对任意自然数 n,都有 $n>n+1$."这显然是个荒谬的结论,但有人却给出了

下面的证明，请从数学归纳法的角度说明错在哪里.

“证明：设 $n=k$ 时，命题为真，即 $k>k+1$，则两边加 1 得 $k+1>(k+1)+1$. 即 $n=k+1$ 时，命题成立. 所以，对任何自然数命题成立.”

5.“所有人的年龄是一样的.”这显然是个荒谬的结论，但有人却给出了下面的证明，请从数学归纳法的角度说明错在哪里.

“证明：当 $n=1$ 时，命题显然成立. 假设命题对 k 成立，即对任何 k 个人，其年龄是一样的. 任 $k+1$ 个人，将这 $k+1$ 个人编号，记为 $1,2,\cdots,k,k+1$. 这样 $1,2,\cdots,k-1,k$ 总共 k 个. 由归纳假设，有相同年龄 A；同时 $2,3,\cdots,k,k+1$ 总共也是 k 个，也具有相同年龄 B. 于是 $2,3,\cdots,k$ 和 1 同为 A，又和 $k+1$ 同为 B. 这样，例如：编号为 2 的年龄是 A 又是 B，于是 $A=B$ 所以对任何 $k+1$ 个人，命题也是成立的. 由数学归纳法可知，所有人的年龄是一样的.”

6. 数学归纳法与枚举法有何区别和联系？

7. 数学归纳法有多少种等价的形式？是谁先提出数学归纳法的基本形式？

8. 数学归纳法的逻辑基础是什么？

9. 请你举出你最熟悉的历史上用数学归纳法证明的问题.

表 1-1　答卷情况统计

（单位：%）

试　题	1	2	3	4	5	6	7	8	9
正确	40.7	42.4	41.3	91	58	44	13	12.5	26
判断正确但说理不清	36.3	14.5	14.1	5.2	25	30	60.6	54.9	0
错误	8	7.5	10	1	4.7	16.8	8	12.2	64

1.2.2　分析

从第 1～3 题的答题情况（见表 1-1）看，约 60%的学生对数学归纳法的思想方法模棱两可从第 8 题来看，约 87%的学生不了解数学归纳法的逻辑基础和逻辑原理. 从第 5、6 题来看，约 90%的学生会用数学归纳法，也知道用数学归纳法证明问题应注意什么问题，但大部分的人说不清为什么要注意这些问题. 从第 6 题来看，约 60%的学生说不清数学归纳法与枚举法的区别与联系. 从第 7 题的第一问答题情况看，大多数学生平时只用第一、第二数学归纳法，不了解数学归纳法的其他形式. 从第 7 题的第二问及第 9 题的答题情况看，约 80%的学生不了解数学归纳法的来龙去脉以及数学归纳法在科学研究和生产实践中的应用.

近几年来，我们带学生到中学进行教育实习，了解到高中三年的数学内容是两年上完，高三时就开始总复习，高考不考的知识点一般不讲，对数学归纳法的理论依据也不讲. 2002 年 2、3 月份，我们在 4 个班级近 200 名理工科生中就数学归纳法

在教学中出现的问题与学生交换意见，学生们对问卷调查结果表示认可，大多数人承认在此之前没有想过调查表中第1～9题这一类问题，拿到调查表后才觉得，数学归纳法还有这么多的学问，自嘲平时是用了不少数学归纳法做练习，可充其量只是依葫芦画瓢. 近期，我们与10多位高校中青年老师谈及数学归纳法的教学问题，其中有些老师不以为然，觉得掌握数学归纳法是学生在进高校前就应具有的一种技能，他们在高等数学教学中很少谈及数学归纳法的理论依据，认为这些事情应是中学教师的事. 对个案进行分析，我们看出大多数理工科学生对数学归纳法的实质感到困惑，困惑的典型表现与文献[1]、[2]、[3]中提出的类似，可以说现在一些理工科学生难掌握数学归纳法的原因与中学生对数学归纳法的理解感到困难的原因是类似的.

各高校扩大招生，地方性院校理工科学生入学时的数学素质降低. 广西2000年、2001年高考理科数学Ⅱ卷的卷面平均分在30分左右. 现在各高校都在扩大招生，实际上，通过高考进入一般院校的学生的水平一般是中等偏下的，而这种状况令人担忧. 高考数学理科Ⅱ卷有填空题、计算题、证明题等题型，90分是满分. 从广西考生的平均分看，广西理工科学生的数学素质低，这种状况在其他省市也存在，这直接影响到人才的培养，而且后果严重. 如河北地方性师范院校的生源质量大不如前，一些乡村中学教学质量目前正面临质量下降的趋势[4]. 影响理工科学生接受高等数学教育的主要障碍是，他们没有具备必备的基础知识以及用在中学形成的思维方式和学习习惯来适应大学数学的教育. 在高等数学课程中经常遇到要用数学归纳法证明的问题，但多数学生跟中学时一样，只满足于会用数学归纳法，没有自觉地深究数学归纳法的理论依据. 我们高校数学老师应注意到学生素质较低的状况，侧重培养学生学习数学的方法，逐步培养他们阅读数学书籍的能力以及自学能力，提高他们的数学水平.

1.3　思考与建议

1.3.1　搞好高等数学教学与中学数学教学衔接工作

对高中学生来说，学习的目标是会解题. 教师和家长想方设法让学生练习大量的题目，希望构筑一个大网，将高考试题网罗其中. 而有经验的教师从日常教学中的基础题，到阶段复习时的组合题，直至总复习阶段的练习题，都能概括出不同层次和不同难度的题目类型，然后由浅入深、由简单到复杂地进行强化训练，并不断纠正其在解题中的偏差和失误. 在学生的心目中，这样的老师才是好教师. 现在，理

工科学生经常给老师提“多讲一些题型，帮我们归纳解这类题的方法步骤，替我们小结这一章的内容”等此类意见. 我们知道，高等数学知识点较多，每堂课的容量较大，一般不可能在讲授概念之后列举不同类型的大量例题让学生模仿练习，而是注重概念、原理的剖析以及它们在不同情境中的应用，然而现在的理工科学生很难适应这种授课方法. 随着教改的深入，数学课的总课时只有减少，不可能增加. 既要把内容讲完，又要照顾到学生的实际水平和他们的意见，多数老师穷于应付，打有星号的内容不讲，不涉及课本内容的不讲. 尽管高等数学有许多问题要用数学归纳法解决，但纵观我们高等数学，没有哪一章节具体介绍形式逻辑的内容与数学归纳法有联系，我们的学生就这样一次又一次地与数学归纳法的实质失之交臂. 我们高校数学老师应从中吸取经验教训，在新生入学时，摸清他们的数学底子，有针对性地进行教学补漏，补齐他们知识结构中的缺陷，使他们具有学习高等数学知识的基础.

1.3.2　高等数学教学中应进行系统的数学方法理论教育

理工科学生在中学阶段，主要在《代数》的第二册中接触过数学归纳法，但他们得到的教育只是在什么时候用数学归纳法，而怎样去用，以及数学归纳法的每一步的理论依据是什么，则很少有人告诉他们. 这也怪不得中学数学教师，现行的中学数学教材，没有简易形式逻辑的内容，高考试题也没有这方面的题目. 文献[5]指出：“通过教学实践证明，在不增加学习负担的条件下，高中生可以掌握逻辑量词知识. ”上海是我们国家经济文化最发达的地区之一，上海的中学老师给高中生传授逻辑知识都需要考虑“增加负担”与否，其他地区中学老师视逻辑知识为何物便可想而知. 因此，许多中学生在学习数学归纳法时，就没有得到真正的系统的教育. 调查结果表明理工科学生对数学归纳法和中学生有类似的困惑，归根结底是他们不了解数学归纳法的逻辑基础和逻辑原理. 其实，数学归纳法实质上是由以下定理提炼出来的证明方法：对于有关自然数 n 的命题 $p(n)$，如果①$p(1)$真；②对任意的自然数 k，如果 $p(k)$ 真，则有 $p(k+1)$ 真；那么对于满足①和②的命题 $p(n)$ 对所有的自然数 n 都为真. 此定理完全可由自然数的最小数原理证出. 若在 Piano 自然数公理体系中，数学归纳法则完全可由 Piano 自然数公理Ⅴ证出. 运用数学归纳法证题时必须分成两个步骤，也就是看所给的命题是否分别符合上述定理中的条件①和②，这里①、②是互相独立的两个条件. ①只是断言 $p(1)$ 为真（有时虽然是验证），②实质是一个假言命题，如果 $p(k)$ 真，则有 $p(k+1)$ 真. 这里必须要弄清楚的一个逻辑问题是，$p(k)$ 是不是一定真？我们说，假言命题“若 p 则 q”：$p\rightarrow q$，它所断言的是：“如果有 p，则一定有 q”这种关系，至于是不是真的有 p，则在此假言命题中并

未被断定. 这就好像假言命题“如果 $1>2$, 那么 $4>5$”这是真命题,因为尽管 $1\ngtr 2$,但如果有 $1>2$,则由不等式的性质有 $1+3>2+3$ 即 $4>5$. 理工科学生具有较为丰富的数学结构,但他们的逻辑结构相对贫乏,形式逻辑没有很好地掌握,辩证逻辑就更差[6]. 所以,我们应该给学生介绍逻辑知识. 方法有多种多样,如给学生介绍简易的逻辑读本由学生自学;在日常教学中根据需要及时补充逻辑内容;给学生开逻辑知识讲座;等等. 这样做,就如给学生注入新的血液,为他们今后构建自己的逻辑结构打下基础. 我们认为,理工科学生应拥有丰富的逻辑知识,才能在今后的教书育人中教好数学方法,胜任传播科学思想、科学方法的工作,在科学研究与生产实践中自觉灵活地应用数学方法解决实际问题.

1.3.3 给学生介绍数学方法发展的来龙去脉及其在科学研究与实践中的作用

鉴于理工科学生掌握数学方法的水平,我们应在教学中结合教材不失时机地把数学在科学上的应用呈现给学生,让他们了解数学方法在科学史上的巨大作用,激发他们自觉应用数学方法去解决实际问题的热情,也为高师学生今后走上讲台激起中学生学习数学的兴趣准备史料. 比如对于数学归纳法,公元前 6 世纪毕达哥拉斯学派用归纳推理对点子对进行探讨;可靠的归纳推理,即数学归纳法的早期例子可举欧几里得对素数个数是无穷的证明;欧几里得以后,印度的拜斯迦罗和法国的莱维本热尔松用数学归纳法讨论级数求和,以及从 n 个物体中取 r 个的组合数;1575 年意大利数学家莫罗利科明确指出递归推理的思想;1654 年帕斯卡把莫罗利科提出的递归推理思想加以提炼和发扬,发表在《三角阵算术》. 继帕斯卡之后,数学归纳法就成为数学家们得心应手的工具,如在费马、伯努利、欧拉、高斯这些大数学家们的出色工作中,都可以找到运用数学归纳法的例子. 德 · 摩根在 1838 年写的《小百科全书》中最先提出“数学归纳法”这个说法. 1898 年意大利数学家皮亚诺在《算术原理新方法》中建立了自然数理论,从而奠定了数学归纳法的基础. 人类崇尚理性的认识,我们都引以为豪的杨辉三角形在外国却叫做帕斯卡三角形,究其原因是帕斯卡第一次用数学归纳法证明了二项式 $(a+b)^n$ 展开式的系数公式 $C_{n+1}^r=C_n^r+C_n^{r-1}$,从而得到帕斯卡三角形. 波利亚曾作了一个生动比喻: 帕斯卡设计的第二引理一旦成立,简直就像神话故事中的魔王出世. 只要你伸给它一个手指,它就立即抓住你的第二指,进而第三指……即使你长有无穷多手指,它都格抓勿论,一个不漏. 这正是数学归纳法可以代替无穷枚举、无穷验证的关键所在.

通过问卷调查,了解到理工科学生掌握数学归纳法的状况,其中绝大多数人会用数学归纳法,但他们不知道数学归纳法的逻辑基础和逻辑原理. 本章分析产生这

种状况的原因,给学生介绍了数学方法发展的来龙去脉,以此来帮助学生学好数学归纳法.

参考文献

[1]张奠宙.数学教育研究导引[M].南京:江苏教育出版社,1997:399.
[2]李丹艳.关于"数学归纳法"的调查报告[J].数学教学,1999,3:14—15.
[3]季建平.关于理解数学归纳法的心理困难的实验报告[J].数学教学,1998,3:33—35.
[4]李俊义.师资质量下降威胁河北乡村教育[EB/OL].新华网[2002—04—23].
[5]陈永明.在高三学生中进行逻辑量词教学的实验[J].数学教育学报,1998,7(2):39—40.
[6]谢太光.解决"数学分析"教学难的一个新途径[J].数学教育学报,1996,5(2):70—73.

第 2 章　理工科大学生理解反证法问题的调查研究

2.1　问 题 背 景

前几年，我们带学生到中学进行教育实习，发现有的实习生不能正确回答“为什么否定原命题的结论得到的结果和原命题的题设在反证法中能做已知”等高中生的问题，有的实习生不会更正高中生用反证法证明问题时出现的错误. 为了了解理工科学生理解反证法的情况，我们于 2001 年 11、12 月份在广西大学、桂林电子工业学院、广西民院、广西师院、南宁师专等院校，对数学、物理、计算机应用、自动化等十多个专业的学生进行问卷调查，发出调查表 1000 份，收回有效问卷 715 份.

2.2　调查的问题及答卷情况

应用反证法证明“若 A 则 B”的程序是：

①否定 B；②把原题设与否定 B 所得的结论当已知；③$B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n$ 与原题设、反设、定义、定理、公理等之一矛盾；④若 A，则否定 B 为假；⑤“若 A，则 B 为真”.

1.“你在什么时候想到要用反证法？”这问题考察学生应用反证法的意识. 典型的回答有：(1)正难则反；(2)否定性问题；(3)肯定性问题；(4)唯一性问题；(5)无限性问题；(6)“至多”或“至少”问题；(7)某些定理的逆定理. 85.3%的学生提到(1)～(7).

2.“在①中你经常注意什么问题？”这问题考察学生应用反证法的操作水平. (1)84.3% 的学生回答正确(答案略)；(2)8.5%的学生遇到“都……”、“所有……”、“任何……”这一类结论，只是把“不”放到“都”、“所有”、“任何”的前面，就完全否定；(3)3.2%的学生举类似于“甲产品畅销，乙产品滞销”的否定命题为“甲产品滞销，乙产品畅销”的例子；(4)4%的学生未作答.

3.“在③中你常注意什么问题？”这问题也是考察学生应用反证法的操作水平.

82.7%的学生强调：(1)切忌主观制造“矛盾”；(2)在证明过程中，必须紧扣条件，步步有据，符合推理规则；(3)在找出矛盾的过程中注意反设条件是立足点，必须用上. 其中10.3%的学生没有提到(1)和(2)；7%的学生未作答.

4.“②中原题设和否定B后所得的结论为什么能当已知?”这问题考察学生理解反证法的逻辑基础. 典型的回答有：(1)同一律；(2)原题设本身就是已知，而否定B为假设的真命题；(3)因为反证法就是要经过正确的推理后得出的结论与原有结论矛盾，原题设是正确的，推出矛盾的根源就在假设，因此题设和假设可作为已知；(4)因为否定后的B和已知被当成正确命题，所得结论与B有关联，也就是由假设的命题推出正确的结论，所以可当做已知. 其中正确的占38.12%，模糊不清的、错误的占38%.

5.“④的理论依据是什么?”这问题考察学生理解反证法的逻辑基础. 典型的回答有：(1)矛盾律；(2)与已知或公理、定理矛盾后，即④由③推出，③由②推出；(3)原题设、反设、定义、定理、公理等；(4)必须等价. 其中正确的占43.14%，模糊不清的、错误的占30.13%.

6.“⑤的理论依据是什么?”这问题考察学生理解反证法的逻辑基础. 典型的回答有：(1)排中律；(2)若A则否定B为假命题，则肯定否命题为真命题；(3)逻辑推理；(4)反证法；(5)由于假设中是存在一个B的反面，既然不存在一个B的反面，则B为真；(6)逆否命题Z真命题；(7)数学的真理性，唯一性. 正确的占43.17%，模糊不清的、错误的占30.16%，未作答的占25.17%；

7.“与综合法、分析法比较，你认为反证法的优点、缺点是什么?”回答较完善的占28.19%.(1)正难则反. 优点：无限推证，特别适应自然数的问题，无须计算；缺点：步骤严格，逻辑欠严密.(2)综合法、分析法较直观，而反证法较难想到. 优点：反证法可以通过逆向思维考虑问题，使正向比较难的证明更简单；缺点：有时使用起来较繁杂、难度大等. 回答模糊不清的占43%.

8.“请列出你最熟识的历史上用反证法证明的著名问题.”正确的占10.15%，错误的占56.11%.

9.“你认为把反证法的实质等同于原命题的逆否命题的证明正确吗?”典型的回答有：(1)不正确，因为它是逆命题，而不是逆否命题；(2) 不正确，因为反证法是通过逆否命题与已知导出矛盾来说明逆否命题的不成立，而证逆否命题则不要反设与已知作为新的已知；(3)不正确，反证法中，原命题为真，其逆命题必为假，若原命题为真，则其逆否命题必为真；(4)正确，原命题与逆否命题的证法异曲同工. 回答正确的占11.16%，模糊不清的、错误的占60.18%，未作答的占27.16%.

10.“你是通过什么途径了解到反证法的实质?”回答有：(1)中学教师的讲座占