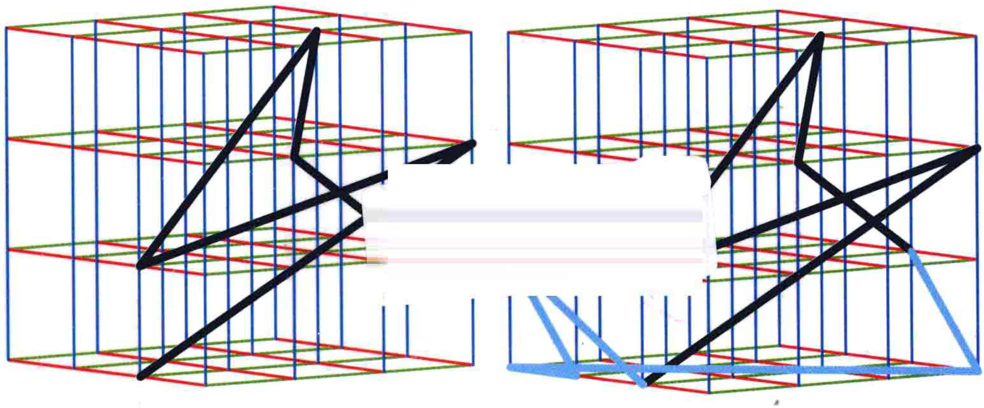
···全新的数学视角···全新的娱乐游戏···全新的智力挑战···

······数形结合的典范——数独形独······

形独

杨青明 主编

赵鸿雁 徐文兵 何晨丽 向永红 张波 杨锦 徐蓉 张钦 张娜 著



清华大学出版社

杨青明 主编
赵鸿雁 徐文兵 何晨丽 向永红 张波 杨锦 徐蓉 张钦 张娜 著

形独

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书在《点可点、非常点——中学数学中的格点问题》中提出的 CG 图的基础上，介绍了一种全新的智力游戏——形独，并在数学上对形独做了初步的探讨，把形独与流行的数独做了比较，相对于花式数独，给出了花式形独的概念，从易到难把形独分为一、二、三级，给出了空间形独的概念，为广大读者提供了大量形独游戏题目，供休闲娱乐和智力开发.

图书在版编目（CIP）数据

形独/杨青明主编. —北京：清华大学出版社，2012. 9
ISBN 978-7-302-30026-7

Ⅰ. ①形…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①智力游戏—青年读物 ②智力游戏—少年读物
Ⅳ. ①G898. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 211511 号

责任编辑：张瑞庆
封面设计：常雪影
责任校对：李建庄
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京世知印务有限公司
装 订 者：三河市李旗庄少明印装厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：145mm×210mm　**印　　张**：9.875　**字　　数**：265 千字
版　　次：2012 年 9 月第 1 版　**印　　次**：2012 年 9 月第1 次印刷
印　　数：1～5000
定　　价：29.50 元

产品编号：048925-01

前　言

“形独”是一个新的名词，它来自两个方面，一是由《点可点、非常点——中学数学中的格点问题》(北京大学出版社 2011 年出版)一书中的概念 CG 图而来；二是与数独类比而来.

所谓 CG 图，就是在一个由边长为 1 的正方形构成的长方形网格里，给定一条折线，然后再作一条折线，使两条折线的首尾相连，并且它们的第一条线段与第一条线段互相垂直，第二条线段与第二条线段互相垂直……直到最后一条线段也互相垂直. 要求这两条折线的每条线段的端点都在网格的格点上. 通常作出的折线不是唯一的，因此，我们可以把 CG 图分为一解 CG 图和多解 CG 图，考虑到数独的唯一性，我们就把只有唯一解的 CG 图叫做“形独”.

本书作为形独的第一本书，主要是介绍形独的基本概念，给形独爱好者提供足够多的题目供大家休闲娱乐、开发智力，期待形独玩家总结出解形独的一套行之有效的方法. 形独是一个数学概念，因此会有一些数学的结论，本书也为数学研究者提供了一些纯数学的结论，希望数学家和数学爱好者能进一步深入研究，

得出更多漂亮的结果，为形独奠定更坚实的数学基础.

因为图形具有直观性和多样性，呈现给人们的是千姿百态，有视觉冲击力，解出一个题就像绘出一幅画，既有智力的挑战，又有艺术的享受，所以能给艺术家灵感，做出形独画展；一个空间形独实际上就是一个建筑设计，希望在大型建筑里能看到形独的理念；形独可以作为电子游戏的素材，开发出各种各样的电子游戏供大家休闲娱乐、智力开发. 展开想象的翅膀吧！你会从形独里得到许多的灵感；一步一步地努力吧！你会从形独里得到意想不到的收获.

最后，我们用几句口号来激励你和我并结束前言：

形独从这里开始！

形独从你开始！

作　者

2012 年 8 月于清华园

目　　录

第 1 章　形独简介

关键词：垂直，连续，封闭，唯一，空间.

1.1　CG 图

定义一：在一个 $p\times q$（p,q 为正整数）的网格中，有一条折线 C：A_1-A_2-⋯-A_n，从 A_1 出发再作折线 C'：A_1-B_2-B_3-⋯-B_{n-1}-A_n，如果 $A_1B_2\perp A_1A_2$，$B_2B_3\perp A_2A_3$，⋯，$B_{n-1}A_n\perp A_{n-1}A_n$，我们就说这个封闭图形是一个 CG 图，其中 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,B_2,B_3,\cdots,B_{n-1}$ 都是格点，C：A_1-A_2-⋯-A_n 中连续三点不共线且 n 为大于等于 3 的整数.

注：CG 图是 $LCFG$ 图的简称，L,C,F,G 是连续、垂直、封闭、格点的汉语拼音的第一个字母.

为了方便起见，我们把折线 C 叫做“题”，折线 C' 叫做“解”，把封闭图形记作 CG 图（C,C'）. 因此，作 CG 图的过程就是给题求解的过程. 特别是当（C,C'）是网格为 $p\times p$ 里的 CG，我们说它是 p 阶 CG.

下面我们看一个求解的过程.

例 1：在 10×10 的网格中，如图 1-1-1 所示，已知折线，求作一个 CG 图.

解：图 1-1-2 和图 1-1-3 就是满足条件的两个 CG 图.

从具体的作图来看，首先是解决求作一条已知线段的垂线问题. 下面我们来解决这个问题.

定义二：正方形网格中长为 a，宽为 b 的矩形叫做 $a\times b$ 形，

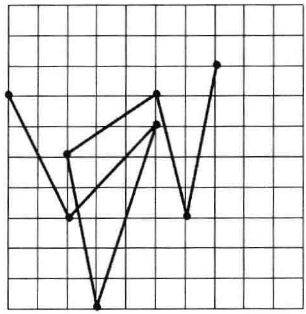


图　1-1-1

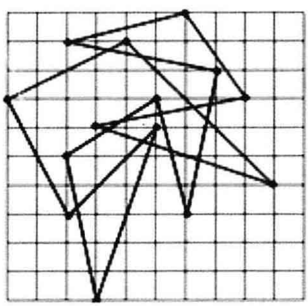


图　1-1-2

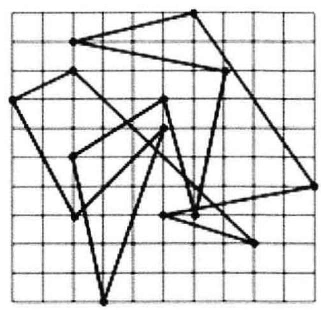


图　1-1-3

其中 $a\times b$ 形的顶点是格点,a,b 都是正整数.

例如,在图 1-1-4 中,$ABCD$ 就是 2×3 形,$BEFG$ 就是 2×1 形.

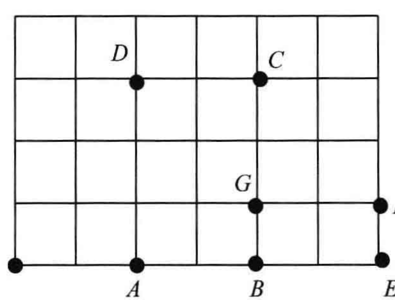


图　1-1-4

由三角形的全等和相似我们很容易得到以下定理.

定理一：$ma \times mb$ 形与 $nb \times na$ 形的对角线构成两对互相垂直的直线. 如图 1-1-5 所示，$AC \perp EG, BD \perp FH, AQ \perp MN$. 其中 a, b, m, n 都是正整数且 a, b 互质.

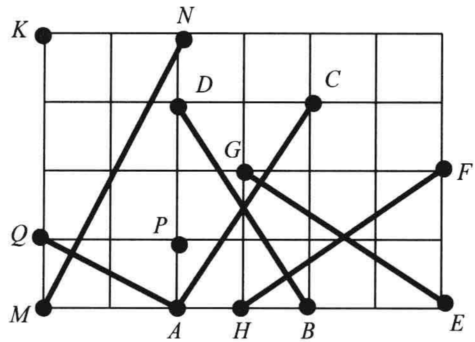


图 1-1-5

其次是满足封闭，目前主要是靠试求和一些特殊的技巧. 而求解的挑战性主要就在这里.

技巧一：唯一确定法.

可以从较长的线段入手，确定答案.

原理：在一个 $m \times n$ 的网格里，如果线段 AB 为 $a \times b$ 形的对角线且 a, b 互质，$a > 0.5n$ 或 $b > 0.5m$，那么过网格中任何一点最多可以作一条端点为格点的线段垂直于 AB.

例如，图 1-1-6 中过 M 作 EF 的垂线只能作一条.

技巧二：首尾逼近法.

从起点与终点同时作垂线，再试求中间的线段.

从求解的过程我们发现：

(1) 试求贯穿整个求解过程；

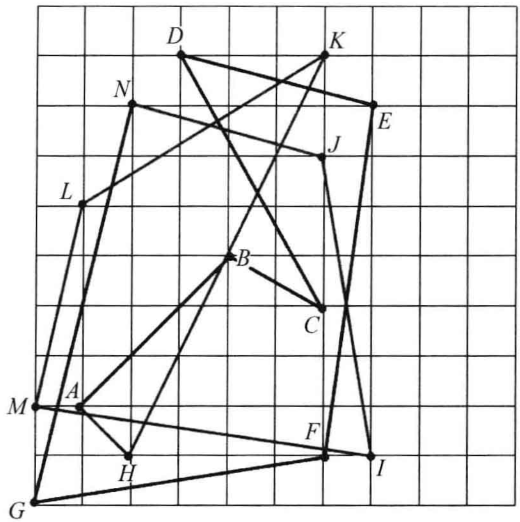


图 1-1-6

(2) 每一个垂直都是简单的;

(3) 封闭却是困难的;

(4) 往往是快做完才能发现自己的错误.

显然,正方形都是 CG 图,因此,对于 CG 图我们有

性质一:任何一个 $p\times q$ 的网格里都有 CG 图.

因为垂直具有交换性,因此 CG 图的题和解也具有交换性,于是对于 CG 图我们有

性质二:如果(C,C')是一个 CG 图,那么(C',C)也是一个 CG 图.

1.2 形独

形独就是有且只有一个解的 CG 图.

定义三:在一个 $p\times q$(p,q 为正整数)的网格里,有一条折线

C：A_1-A_2-A_3-…-A_n，如果有且只有一条折线 C'：A_1-B_2-B_3-…-B_{n-1}-A_n，使得 $A_1B_2 \perp A_1A_2$，$B_2B_3 \perp A_2A_3$，…，$B_{n-1}A_n \perp A_{n-1}A_n$，我们就说由它们围成的图形是一个形独，其中 A_1，A_2，A_3，…，A_n，B_2，B_3，…，B_{n-1} 都是 $p \times p$ 网格里的格点，C：A_1-A_2-…-A_n 中连续三点不共线且 n 为大于等于 3 的整数. 同 p 阶 CG 一样，我们有 p 阶形独的概念. 与 CG 图类似，我们把已知的折线 C 叫做题，折线 C' 叫做解，将封闭图形记作形独(C,C').

例 2：如图 1-2-1 所示，在一个 9×6 的网格里，已知折线 A-B-C-D-E，求作其解.

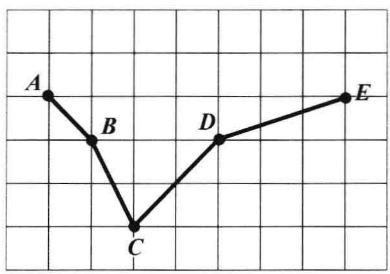


图 1-2-1

解：图 1-2-2 是以折线 A-B-C-D-E 为题的形独.

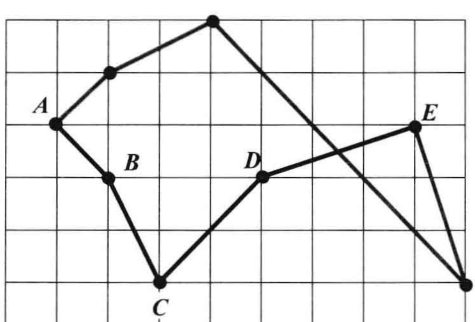


图 1-2-2

经过反复全面的试求,我们发现,图 1-2-2 的解为折线 A-B-C-D-E 的唯一解,因此,图 1-2-2 是一个形独.

形独与 CG 图的求解的方法及思路基本相同,都是通过基本垂直技巧加大量试求得到答案. 但由于形独的唯一性,它们的性质有很大差异.

性质三:在 $p\times q$ 的网格中,如果(C,C')是一个形独,那么(C',C)不一定是一个形独.

证明:如图 1-2-3 所示,以红线为题,蓝线为解,组成的封闭图形为形独;以蓝线为题,则有红线、绿线两个解,不为形独,如图 1-2-3 和图 1-2-4 所示.

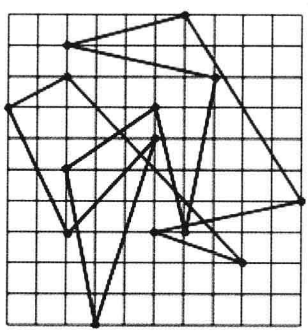


图 1-2-3

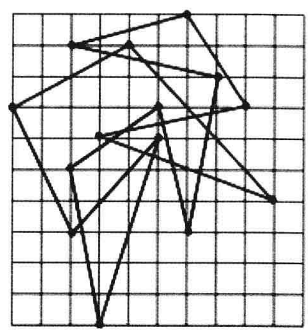


图 1-2-4

同时,如图 1-2-5 所示,以蓝线为题,红线为解,组成的封闭图形为形独;以红线为题,蓝线为解,组成的封闭图形也为形独.

综上所述,$p\times q$ 的网格中,如果(C,C')是一个形独,那么(C',C)可能是一个形独,也可能不是.

性质四:在 $p\times q$ 的网格中,如果(C,C')是一个形独,(C',C_1)是 CG 图,那么(C_1,C')一定为形独.

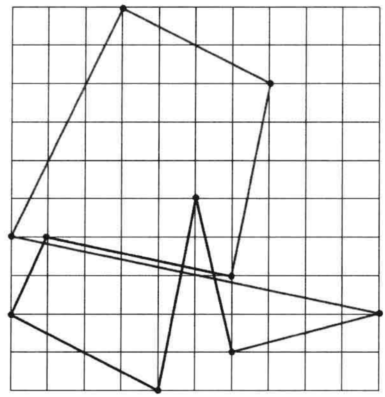


图 1-2-5

证明：我们用反证法证明这一问题.

在 $p\times q$ 的网格中，由于(C',C_1) 是 CG 图，(C_1,C')即为 CG 图，若(C_1,C')不为形独，则必有与 C'不同的折线 C''与 C_1 组成 CG 图(C_1,C''). 由于 C 和 C_1 同为 C'的解，因此 C 与 C_1 的组成线段对应平行或在同一条直线上，又(C_1,C'')为 CG 图，因而 C_1 与 C''的组成线段对应垂直，因此 C 与 C''的组成线段也对应垂直，即(C,C'')为 CG 图，与(C,C')是形独相矛盾.

例如，在图 1-2-6 中，以红线为题，蓝线为解，组成的封闭图形为形独，红线、绿线都为蓝线的解，若绿线有蓝线以外的解，该解就必定为红线的解，与“以红线为题，蓝线为解，组成的封闭图形为形独”相矛盾，因此蓝线为绿线的唯一解，以绿线为题，蓝线为解，组成的封闭图形为形独.

因此，如果(C,C')是一个形独，(C',C_1) 是 CG 图，那么(C_1,C')一定为形独.

性质五：在 $p\times q$ 的网格中，有形独(C,C')，设 C'的一部分

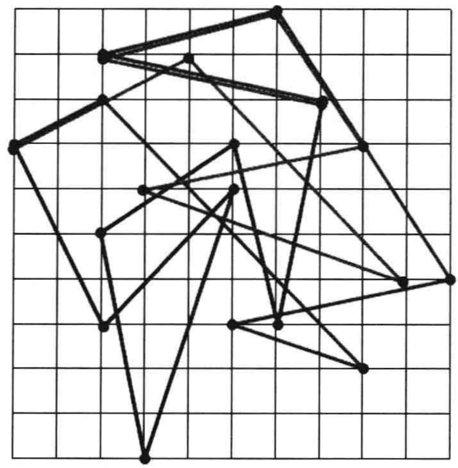


图 1-2-6

为 C''，若有折线 C_1 使 (C'',C_1) 是 CG 图，则 (C_1,C'') 是形独.

证明：我们仍然用反证法证明这一问题.

在 $p\times q$ 的网格中，由于 (C'',C_1) 是 CG 图，(C_1,C'') 即为 CG 图，若 (C_1,C'') 不为形独，则必有与 C'' 不同的折线 C_2 与 C_1 组成 CG 图 (C_1,C_2). (C_1,C'') 与 (C_1,C_2) 都为 CG 图，因此 C'' 与 C_2 对应线段平行或共线，又 C'' 与 C' 剩余部分组成的折线与 C 对应线段垂直，将 C_2 与 C' 剩余部分组成的折线记为 C_3，则 C_3 与 C 也垂直，即 $(C\ ,C_3)$ 为 CG 图，与 (C,C') 为形独相矛盾，因而 (C_1,C'') 为形独.

例如，在图 1-2-7 中，红线是蓝线的解，绿线是红线一部分的解，若绿线还有其他解，则该解与红线剩余部分组成的折线就为蓝线的解，那么蓝线就有两个解，与"以蓝线为题，红线为解，组成的封闭图形为形独"相矛盾，因此红线的一部分为绿线的唯一解，以绿线为题，红线的一部分为解，组成的封闭图形为形独.

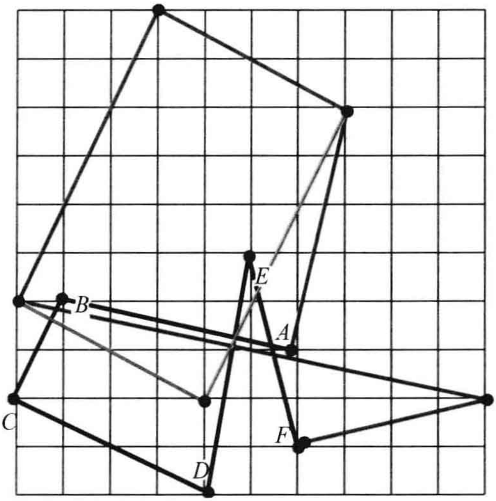


图 1-2-7

因此,在 $p\times q$ 的网格中,(C,C')是形独. 设 C' 的一部分为 C'',若有折线 C_1 使(C'',C_1)是 CG 图,则(C_1,C'')是形独.

性质六:在任何网格中,都存在 4 条线段组成的形独.

证明:显然正方形都是形独,因此结论成立.

性质七:在无限大的网格中,不存在由 4 条以上线段组成的形独.

证明详见附录 1.

最大形独:由性质五,在无限大的网格中,不存在由 4 条以上线段组成的形独,而在 10×10 的网格中,有许多由 4 条以上线段组成的形独,详见本书第 3 章. 于是我们思考,若存在 4 条以上的 n 阶形独,那么 n 的最大值是多少?目前我们求得一个 15 阶形独,即在 15×15 的网格中仍存在 4 条以上的形独,如图 1-2-8 所示.

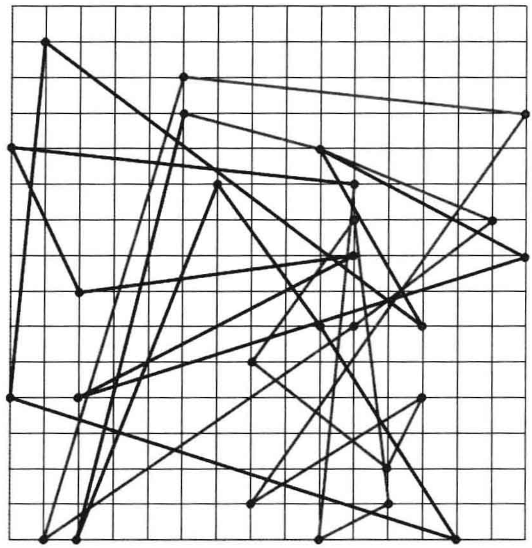


图 1-2-8

通过以上的学习,我们对形独有了一定的了解,但是形独的构造及证明仍然是一件困难而繁琐的事,题目中线段斜率多种多样,线段组合千变万化,难度也随着线条的增多而变大,这也正是形独的魅力之所在. 目前,我们有一些程序可以求解并验证形独. 有兴趣的读者可以做进一步的研究.

1.3 空间形独

前文讲了许多关于平面形独的问题,其中,图形都被局限在平面中,但是随着空间形独概念的引入,一条条线段从纸上一跃而起,而形独问题,也随之变得更加复杂而有趣.

在立体几何里,如果两条直线所成的角为 90°,则这两条直线相互垂直. 垂直包括相交垂直与异面垂直(不相交垂直).