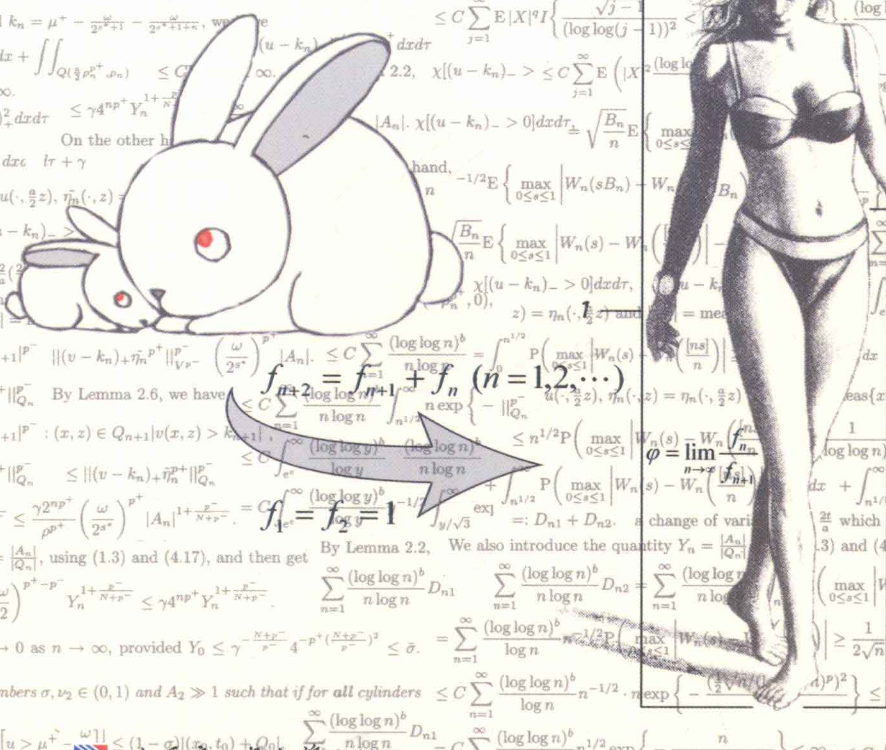
斐波那契数列欣赏

FIBONACCI SEQUENCE APPRECIATION

吴振奎 编著

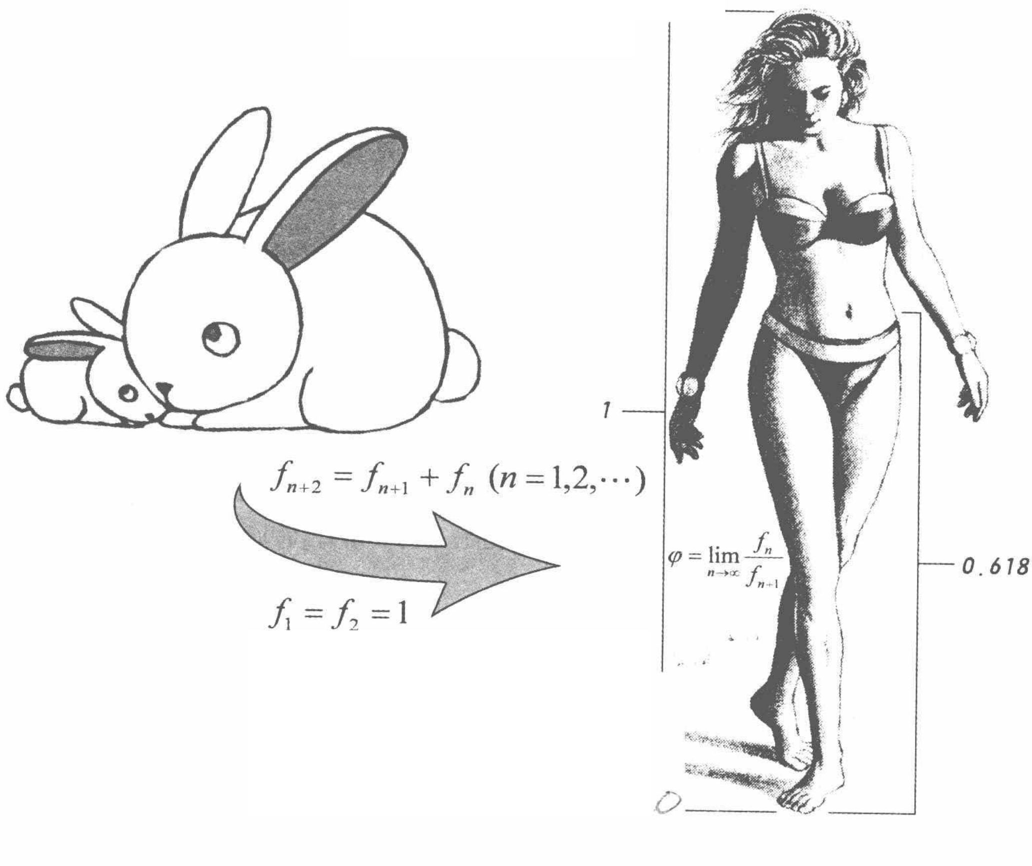


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

斐波那契数列欣赏

FIBONACCI SEQUENCE APPRECIATION

吴振奎 编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

斐波那契数列，产生于12世纪意大利数学家斐波那契叙述的“生小兔问题”。从一个十分简明的递推关系出发，竟引出了一个充满奇趣的数列，它与植物生长等自然现象，以及几何图形、黄金分割、杨辉三角、矩阵运算等数学知识有着非常微妙的联系，并且在优选法、计算机科学等领域中得到广泛应用。本书系统地介绍了斐波那契数列的性质和应用，将知识性与趣味性融为一体，阐述了几代数学家的思维方法，内容丰富，妙趣横生.

本书适用于大学、中学师生.

图书在版编目(CIP)数据

斐波那契数列欣赏/吴振奎编著—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5603-3464-6

Ⅰ.①斐… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①斐波那契序列 Ⅳ.①O156

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第280862号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张12 字数219千字
版 次 2012年1月第1版 2012年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3464-6
定 价 28.00元

前言

1985年前后，我与后来成为辽宁教育出版社社长的俞晓群闲聊选题，当时话很投机．晓群是极有头脑的数学达人（他是数学系出身）．没过多久，《世界数学名题欣赏》选题欣然敲定，且让我担纲《斐波那契数列》分册的撰写．

凭心而论，当时自己的功力、底蕴、资历等皆不能，也不应承担此任，尽管有晓群的力鼎，仍只能是硬着头皮答应．

领命之后，我便为本书写作立下宗旨：①内容通俗；②知识严谨；③语言简练；④材料生动；⑤视角新颖．此外还要尽可能多的涵盖诸学科、领域．

尔后，除了兢兢业业，只有谨慎小心，只有埋头苦干．

一番努力后，此书终在1987年初面市，尔后又重印4次．

此外，台湾地区九章书店于1990年前后推出繁体字版（未作任何修订）．

近年来，人们似乎越来越感该数列的重要，因而也吸引更多有志之士的兴趣与关注．培杰君即是其中一位．

听说他已拟定多部该数列选题，从不同角度、全方位推介这个神奇的数列．趁此，笔者将拙作进行全面修订，补充一些新内容，添加一些新材料，然而撰写宗旨仍未改变．

谢谢刘培杰数学工作室给了本书一次再版机会！谢谢关爱此书的读者朋友！

作者

2011年5月

目录

一 生小兔问题引起的

13 世纪初，意大利比萨的一位叫莱昂纳多，绰号为斐波那契(Fibonacci，1170—1230)① 的数学家，在一本题为《算盘书》② 的数学著作中，提出下面一个有趣的问题：

兔子出生以后两个月就能生小兔，若每次不多不少恰好生一对(一雌一雄)，且每月生一次. 假如养了初生的小兔一对，则一年以后共可有多少对兔子(如果生下的小兔都不死的话)?

我们来推算一下. 如图 1.1 所示.

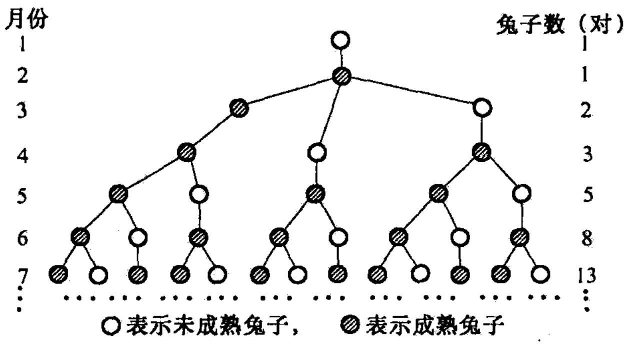


图 1.1

① Fibonacci 是 filius Bonacci 的简写，意思是“波那契之子”.

② 这里的“算盘”是指用来计算的沙盘，不是我国的算盘.《算盘书》(Liber Abaci，1202) 是一本研究算术(及代数) 的书籍，abacus 直译为“算盘”，它源自希腊文 αβαξ. 这是对后几个世纪欧洲数学发展起着重要作用的书籍，也是向欧洲人传播印度——阿拉伯字码的最早论著.

第 1 个月：只有 1 对兔子；

第 2 个月：兔子没有长成不会生殖，仍然只有 1 对兔子；

第 3 个月：这对兔子生了 1 对兔子，这时共有 2 对兔子；

第 4 个月：老兔子又生了 1 对兔子，而上月出生的兔子还未成熟，这时共有 3 对兔子；

第 5 个月：这时已有 2 对兔子可以生殖（原来的老兔和第 3 个月出生的兔子），于是生了 2 对兔子，这时共有 5 对兔子；

……

如此推算下去，我们不难得出下面的结果（这里列成一张表）.

月份数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
兔子数（对）	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

从表中可知：一年后（第 13 个月时）共有兔子 233 对.

用这种办法来推算，似乎有些“笨”，而且越往后越使人觉得复杂. 有无简单办法推算？

我们把上表中下面一列数用 $\{F_n\}$ 表示（有时也用 $\{u_n\}$ 表示，下标 n 表示月份数，兔子数可视为月份数的函数），则它们被称为斐波那契数列，记

$$\{F_n\}:1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$$

且 F_n 称为**斐波那契数**.

1634 年数学家吉拉德（A. Girard，1595—1632）发现（那已是斐波那契死后四百年的事了）：斐波那契数列之间有如下递推关系

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$$

其实这个式子并不难理解，试想：第 $n+1$ 个月时的兔子可分为两类：一类是第 n 个月时的兔子，另一类是当月新出生的小兔，而这些小兔数恰好是第 $n-1$ 个月时的兔子数（它们到第 $n+1$ 个月时均可生殖）.

由于这一发现，生小兔问题引起了人们的极大兴趣，首先计算这列数方便多了：人们不仅可以轻而易举地算出一年以后的兔子数，甚至可以算出两年、三年等以后的兔子数（这要用原来的办法推算恐怕是烦琐至极）. 再者由于人们继续对这个数列探讨，又发现了它的许多奇特的性质.

比如它们项数间的更一般关系是

$$F_{m+n}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}\ (m,n\in\mathbf{Z}^+)$$

我们可以用数学归纳法证明如下（对 m 归纳）：

①$m=1$ 时，$F_{n+1}=F_{n-1}+F_n=F_{n-1}F_1+F_nF_2$，即命题真（注意到 $F_1=F_2=1$）.

类似的，我们可以证明 $m=2$ 时命题也真，即

$$F_{n+2}=F_{n-1}F_2+F_nF_3$$

② 设 $m\leqslant k$ 时真，今考虑 $m=k+1$ 的情形：

由归纳假设有

$$F_{n+k-1}=F_{n-1}F_{k-1}+F_nF_k$$

及

$$F_{n+k}=F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}$$

两式两边相加有

$$F_{n+k-1}+F_{n+k}=F_{n-1}(F_{k-1}+F_k)+F_n(F_k+F_{k+1})$$

注意到：
$$F_{n+k+1}=F_{n+k-1}+F_{n+k}$$

及
$$F_{k-1}+F_k=F_{k+1},F_k+F_{k+1}=F_{k+2}$$

故
$$F_{n+k+1}=F_{n-1}F_{k+1}+F_nF_{k+2}$$

即 $m=k+1$ 时亦真，从而对任何正整数 m 命题成立(这里用的是第二归纳法).

1680 年，卡西尼(G. D. Cassini，1625—1712) 发现了下面关于斐波那契数列项间重要的关系式

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$$

它可以直接用数学归纳法去证明，但更为巧妙的证明方法，可由矩阵恒等式

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n=\begin{bmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{bmatrix}\tag{*}$$

的简单证明得到：

①$n=2$ 时，用矩阵乘法规则

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}F_3&F_2\\F_2&F_1\end{bmatrix}$$

② 设 $n=k$ 时结论真，即

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^k=\begin{bmatrix}F_{k+1}&F_k\\F_k&F_{k-1}\end{bmatrix}$$

今考虑 $n=k+1$ 的情形，即

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}F_{k+1}&F_k\\F_k&F_{k-1}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}F_{k+1}+F_k&F_{k+1}\\F_k+F_{k-1}&F_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{k+2}&F_{k+1}\\F_{k+1}&F_k\end{bmatrix}$$

此即说 $n=k+1$ 时命题亦真，从而对任何正整数式(*)成立.

对式(*)两边取行列式再展开化简后即为

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$$

从这个关系式中我们还可以发现，F_n 与 F_{n+1} 互质，即

$$(F_n, F_{n+1}) = 1$$

(这里(a,b)表示a,b的最大公因子)因为从式中可见:F_n与F_{n+1}的任何公因子,都是$(-1)^n$的一个因子.

上面关系式的推广形式是

$$F_{n-k}F_{m+k} - F_nF_m = (-1)^n F_{m-n-k}F_k$$

它的证明要用到后面我们将提到的一个公式.至于它的讨论,我们在以后给出.

注 利用等式(*)我们还可以证明前面的结论

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$$

这只需注意到

$$\begin{pmatrix} F_{m+n} & F_{m+n-1} \\ F_{m+n-1} & F_{m+n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m+n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} F_m & F_{m-1} \\ F_{m-1} & F_{m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

由矩阵乘法后再比较两边矩阵中左上角第一元素即可.

18世纪初,棣美佛(A. de Moivre,1667—1754)在其所著《分析集锦》(Miscellanea Analytica)中,给出斐波那契数列的通项表达式(又称为"封闭形式",但它不唯一)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

它又称为比内公式,这是以最初证明它的法国数学家比内(J. P. M. Binet,1786—1856)命名的,它又是一个十分耐人寻味的等式:式左是正整数,而式右却是由无理数来表达的.公式的重要性我们不说即明,因为斐波那契数列的许多重要性质的证明都是通过它来完成的.

我们先来用数学归纳法证明这个等式,稍后我们还将给出它的另外两种证明(直接推导给出,详见后文).

①$n=1$时,直接验算即可.

② 设$n \leqslant k$时结论真,今考虑$n=k+1$的情形.

注意到关系式$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$及下面的推演

$F_k + F_{k-1} =$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

从而命题对 $n=k+1$ 时真，因而对任何自然数公式都成立.

1753 年，西姆森(Simson，1687—1768) 发现斐波那契数列中前后两项 F_n 和 F_{n+1} 之比 F_n/F_{n+1} 是连分数

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

的第 n 个渐近分数.

这一点我们后文还要叙及.

1864 年，法国数学家拉梅(G. Lame，1795—1870) 利用斐波那契数列证明：

应用辗转相除法(欧几里得除法) 的步数(即辗转相除的次数) 不大于较小的那个数的位数的 5 倍.

这是斐波那契数列的第一次有价值的应用(证明请见后文).

1876 年，数学家鲁卡斯(E. Lucas，1842—1891) 发现：

方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的任何次方幂的线性组合都满足关系式

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$$

同时他还发现并证明了下述结论：

一个数整除 F_m 和 F_n 的充要条件是这个数是 F_d 的因子，这里 $d=(m,n)$. 特别的，$(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$.

证 我们已经证明了关系式

$$F_{m+n}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n$$

由之我们可有：F_m 和 F_n 的任何公因子也是 F_{m+n} 的因子；且 F_{m+n} 和 F_n 的任何公因子也是 F_mF_{n+1} 的因子.

又 $(F_m,F_n)=1$，即 F_m,F_n 互质，故 F_{m+n} 和 F_n 的公因子也能整除 F_m，这样对整数 d，*$d\mid F_m$ 且 $d\mid F_n\Longleftrightarrow d\mid F_{n+m}$ 和 $d\mid F_n$，这里"$|$"表示整除.*

这个结论还可以推广为(可以用数学归纳法证)：

$d\mid F_m$ 且 $d\mid F_n\Longleftrightarrow d\mid F_{m+kn}$ 和 $d\mid F_n$，这里 k 是非负整数.

若 $r\equiv m(\bmod n)$，则 F_m 和 F_n 的公因子亦为 F_r 和 F_n 的公因子.

又若 $r_1\equiv n(\bmod r)$，则 F_r 和 F_n 的公因子即为 F_r 和 F_{r_1} 的公因子.

……

如此下去，最后 $r_s=0$ 时，即 F_m 和 F_n 的公因子即为 $F_0=0$(规定！) 和 $F_{(m,n)}$ 的公因子.

此外，鲁卡斯还利用斐波那契数列的性质证明 $2^{127}-1$ 是一个质数[①]（它有 39 位，要验证这一点并非轻而易举），这也是斐波那契数列的一个应用.

顺便指出："斐波那契数列"的名称，正是出自鲁卡斯之口.

20 世纪 50 年代出现的"优选法"（如今称为"最优化方法"）中，也找到了斐波那契数列的巧妙应用，从而也使得这个曾作为故事或智力游戏的古老的"生小兔问题"所引出的数列，绽开了新花.

由于这个数列的越来越多的性质被人们所发现，越来越多的应用被人们找到，因而引起了敏感的数学家们的极大关注，一本专门研究它的杂志——《斐波那契季刊》(Fibonacci Quarterly) 于 1963 年开始发行（V. E. Hoggatt 等人创办）.

---

① 形如 2^p-1 的质数叫梅森质数. 若 $M_n=2^n-1$ 是质数，则 n 必定是质数，反之则不然.

到 2010 年为止，人们共找到 46 个梅森型质数，这些 $p=2,3,5,7,13,17,\cdots,44497,86243,132049,216091,756839,859433,1257787,1398269,2976221,3021377,6972593,13466917,20996011,24036583,25964951,30402457,3715667,43112609$ 等 46 个，其中 $2^{30402457}-1$ 共有 12978189 位. 从第 13 个梅森质数 M_{521} 开始，都是借助电子计算机找到的.

该类质数之所以引起人们的兴趣，一是它与所谓完全数（包括 1 的除自身外的全部约数和等于该数的自然数，如 $6=1+2+3$ 等）有关，即若 2^p-1 是梅森质数，则 $2^{p-1}(2^p-1)$ 是完全数，完全数是"数论"中的一个重要课题；此外有关该类质数个数（是有限还是无穷多）的讨论，亦为人们关注.

二 它们也产生斐波那契数列

斐波那契数列不只是在生小兔问题中才会遇到，它也出现在自然界、生活中……

先来看该数列在植物叶序、花蕾中的表现．植物学家认为：一些尚未被人认识的植物生长规律，决定了叶序、花蕾的形状，该问题的答案可能在于植物学与动力学系统之间通过射影几何而建立起来的巧妙联系．

1．植物叶序中的斐波那契数列

16 世纪德国天文学、数学家开普勒（J. Kepler，1571—1630）对生物学中的数学问题很感兴趣，他曾经仔细地观察过蜂房的结构和形状后指出：

这种充满空间的对称蜂房的角应和菱形的十二面体的角一样．

而后，法国的天文学家马拉尔弟（Maraldi）经仔细观测后指出：

这种菱形的角，一个为 $109°28'$，另一个为 $72°32'$．

法国的昆虫学家列俄木（de Réaumur，1683—1757）曾猜想：用这种角度建造蜂房大概是在相同的体积下最省材料的．

这个猜想后为瑞士的数学家寇尼希（Köenig，？—1757）证得．

开普勒还研究了"叶序"问题，即植物生长过程中叶、花、果在茎上的排列顺序问题，在他的结论里也出现了与斐波那契

数列有关的数字(尽管当时这个数列还没有冠以斐波那契数列的尊号):

植物的叶子在茎上的排列,对同一种植物来说是有一定规则的,若把位于茎周同一母线位置的两片叶子叫做一个周期的话,那么

$$W=\frac{\text{每个周期叶子绕的圈数}}{\text{每个周期里的全部叶子数}}$$

将是一些特定的数,它只是随植物品种不同而不同.比如下面的一些植物.

榆树:叶子排列在茎的相对两翼(对称地排列),即它一周期有两片叶子,且一周期叶子仅绕一圈,故 $W_{\text{榆}}=\frac{1}{2}$.

山毛榉:它的叶子从第三片开始循回,故 $W_{\text{山毛榉}}=\frac{1}{3}$.

樱桃(橡树等):叶子排列如图 2.1 所示,可知 $W_{\text{樱桃}}=\frac{2}{5}$.

梨树:$W_{\text{梨}}=\frac{3}{8}$.

柳树:$W_{\text{柳}}=\frac{5}{13}$.

……

图 2.1

乍看上去,似乎没有什么规律,但若把它们写在一起

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{13},\ \cdots$$

细心的读者也许已经看到:这些分数的分子、分母都恰好各自组成一个斐波那契数列,更确切地讲:它们分别是斐波那契数列的第 n 项与第 $n+2$ 项之比.

(顺便插一句:植物叶子在茎上的排列是按螺线方式进行的,且每三片叶子在螺线上的距离都服从黄金分割比.关于黄金分割我们后面将会谈到.)

此外,花的瓣数多为斐波那契数列中的某项(数):3,5,8,….

2. 菠萝的鳞片与斐波那契数列

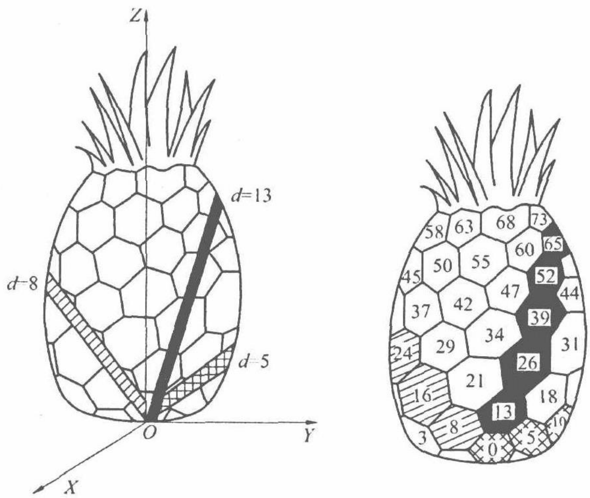
我们再来看看菠萝.菠萝果外面的鳞状表皮均是一些不很规则的六边形.

把菠萝轴(中心线)视为 Z 轴,与之垂直的平面叫 XOY 平面(图2.2(a)),量一量菠萝的鳞状表皮六边形中心距 XOY 平面的距离(按照某个比例单位),把它们记下来填到图 2.2(b) 上.这个图上的数字初看上去似乎杂乱无章,其实不然,若仔细观察便会发现:

那些彼此联系着的鳞状表皮上的数,有三个方向(系统)是按照等差数列方式排列的:

0,5,10,15,20,…(公差 d 是 5,与之方向平行的诸鳞片上的数字也如此);

0,8,16,24,32,…(公差 d 是 8,与之方向平行的诸鳞片上的数字也如此);



(a) (b)

图 2.2

0,13,26,39,52,…(公差 d 是 13,与之方向平行的诸鳞片上的数字也如此).

这三个方向所给出的诸等差数列,其公差分别是 5,8,13 ——它们恰好是斐波那契数列中的三项.

3. 树枝生长、蜂进蜂房、上楼方式中的斐波那契数列

波兰数学家史坦因豪斯(H. Steinhaus,1887—1972) 在其名著《数学万花镜》中有这么一个问题[①]:

一棵树一年后长出一条新枝;新枝隔一年后成为老枝,老枝便可每年长出一条新枝.如此下去,十年后树枝将有多少(图 2.3)?

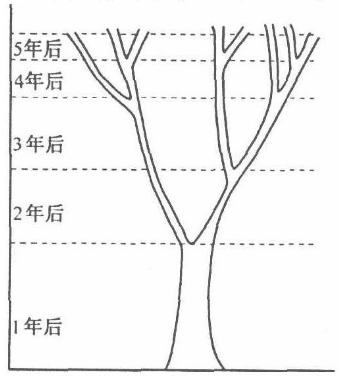


图 2.3

① 这个问题实际上是数学家泽林斯基(Zerlisky) 在一次国际数学会议上提出的.

读者早已悟到：这个问题只是斐波那契数列问题的变化而已，即树枝的繁衍方式是按照斐波那契数列增加的.

我们再来考虑一个问题：它也和生物现象有关，即蜜蜂进蜂房问题.

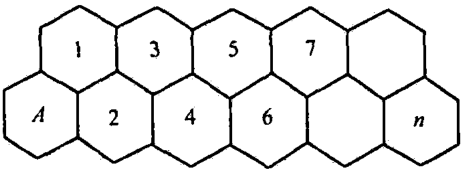
一只蜜蜂从蜂房 A 出发，想爬到第 $1,2,3,\cdots,n$ 号蜂房(图 2.4(a))，但只允许它自左向右(不许反向倒走)，那么它爬到各号蜂房的路线数也恰好构成一个斐波那契数列.

事实上，蜜蜂爬到 1 号蜂房有 $F_2=1$ 条路线，爬到 2 号蜂房有 $F_3=2$ 条路线($A\to 2$ 或 $A\to 1\to 2$).

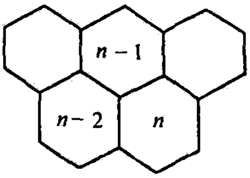
蜜蜂爬到 n 号蜂房的路线有两类：

一类是不经过 $n-1$ 号蜂房，直接从 $n-2$ 号蜂房进入第 n 号蜂房；

另一类是经过 $n-1$ 号蜂房(图 2.4(b)).



(a)



(b)

图 2.4

从 A 爬到 $n-2$ 号蜂房的路线有 F_{n-1} 条，从 A 爬到 $n-1$ 号蜂房的路线有 F_n 条，这样蜜蜂从 A 爬到第 n 号蜂房的路线有 $F_{n-1}+F_n=F_{n+1}$ 条，显然 F_n 恰为斐波那契数列(注意到 $F_1=1$).

这个问题与下面的问题无实质差异：

如图 2.5，有 n 个村庄，分别用 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 表示. 某人从 A_1 出发按箭头方向(不许反向)绕一圈后，再回到 A_1 有多少种走法?

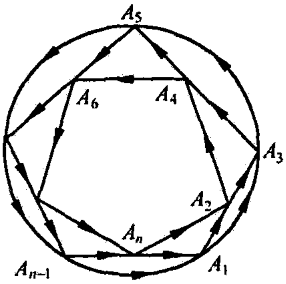


图 2.5

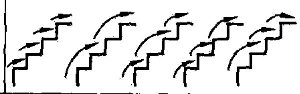
稍稍分析不难有：设走法数为 a_n，则 $a_1=1,a_2=1,a_{k+1}=a_k+a_{k-1}\ (k>1)$.

这恰好构成一个斐波那契数列.

上面的问题其实与下面的问题也是类似的：

上楼梯时，若允许每次跨一磴或两磴，那么对于楼梯数为 $1,2,3,4,\cdots$ 时上楼的方式数恰好也是斐波那契数列：$1,2,3,5,8,\cdots$.

这一点可由下表中显示出来.

楼梯磴数	上 楼 方 式	上楼方式数
1		1
2		2
3		3
4		5
…	…	…

当然下面的问题实质与上两个问题也是相同的：

有 1 分和 2 分的硬币若干，问用它们组成（或支付）币值为 1，2，3，4，5，… 分的方式各有多少（这里各种组成或支付方式都是一枚一枚进行的，比如支付 3 分时，②① 和 ①② 看做两种不同方式，这是因为前者先付 2 分又付 1 分，而后者是先付 1 分又付 2 分）？

再来看一个摆放硬币问题，它也与斐波那契数列有关.

n 枚相同的硬币排成若干行，使上一行的每个硬币总能碰到下一行两个相邻的硬币（它被称为 Propp 硬币分析，如图 2.6 所示）.

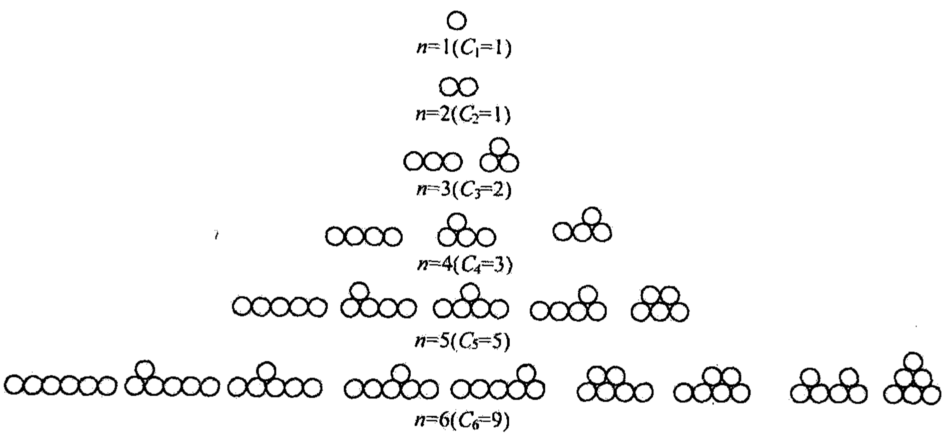


图 2.6

其方法数 C_n 与 n 的关系为下表.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
C_n	1	1	1	2	3	5	9	15	26	45	78	135	234	406	704	1222	2120	…

注意到这样摆放(或分拆)数产生的序列的生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 9x^6 + 15x^7 + \cdots$$

可表为一个无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-\alpha(n)}$$

其中 $\alpha(n)$ 除去前面两项外,皆为 $\{F_n\}$ 的相继项,如下表所示.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$\alpha(n)$	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	…

4. 雄蜂家族、钢琴键盘与斐波那契数列

我们再来看一个例子,它也和生物现象有关.

在蜜蜂王国里:雌蜂虽多,但仅有一只(蜂后)能产卵,余者皆工蜂.蜂后与雄蜂交配后产下蜂卵,其中绝大多数是受精卵,其孵化后为雌蜂(工蜂或蜂后),少数未受精卵孵化成雄蜂.

若追溯一只雄蜂的家系,其任何一代的祖先数目,均为斐波那契数列中的数,即它们构成斐波那契数列.

如图 2.7,一只雄蜂仅有一个母亲,故其两代数目均为 1;而这只雄蜂的母亲必须是有父、母的,故其上溯第三代的数目是 2;这一代雄蜂(即原来雄蜂的祖父)仅有母亲,而雌蜂(即原来雄蜂的祖母)则有一父一母,故上溯第四代的数目是 3……

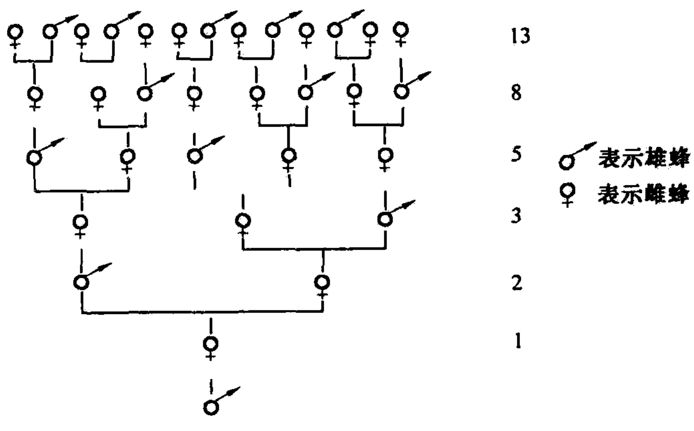


图 2.7

雄蜂家系上溯第六代祖先(图 2.7),若雄蜂用 ● 表示,雌蜂用 ○ 表示,则此 13 只蜂的排布如图 2.8 所示.