



普通高等教育“十二五”电子信息类规划教材

电磁场与电磁波

主编 程 成
参编 张 航 许周速



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

0441.4/163

2012

普通高等教育“十二五”电子信息类规划教材

电磁场与电磁波

主 编 程 成

参 编 张 航 许周速

北方工业大学图书馆



C00268092



机械工业出版社

本书共 7 章。绪论简要介绍了电磁场和电磁波理论的发展历史。第 1 章是电磁场理论基础,概述了麦克斯韦电磁场基本理论和基本方程。第 2 章讲述静电场,介绍了了解静电场问题的几种方法。第 3 章讲述静磁场,介绍了磁矢势、磁标势及其方程等。第 4 章讲述电磁波的辐射,介绍了达朗贝尔方程、电偶极辐射和电多极辐射问题。第 5 章讲述电磁波的传播,介绍了导电介质中的电磁波方程、平面波、介质表面的反射和折射、等离子体中的平面电磁波。第 6 章讲述复杂介质中电磁波传播,介绍了电磁波的吸收、色散、散射和偏振。第 7 章讲述波导和谐振腔,介绍了矩形、柱形和光纤型波导以及谐振腔。附录列出了学习本书所需的矢量和张量运算以及拉普拉斯方程的通解形式等。每章后面附有习题。

本书可作为应用物理、光信息科学和技术、光学工程、通信工程、电子科学与技术、电子信息工程等专业的本科教材,适合于 64 学时教学。打 * 号的章节内容可跳过去而不影响后面内容的学习。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与电磁波/程成主编. —北京:机械工业出版社, 2012. 2

普通高等教育“十二五”电子信息类规划教材

ISBN 978-7-111-37387-2

I. ①电… II. ①程… III. ①电磁场 - 高等学校 - 教材②电磁波 - 高等学校 - 教材 IV. ①O441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 018106 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 闫晓宇 责任编辑: 闫晓宇

版式设计: 石 冉 责任印制: 杨 曦

保定市 中画美凯印刷有限公司印刷

2012 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 11.5 印张 · 279 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-37387-2

定价: 26.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066

门户网: <http://www.cmpbook.com>

销售一部: (010) 68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售二部: (010) 88379649

读者购书热线: (010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前言

经典电磁场与电磁波理论,从建立到现在已经 100 多年。电磁场与电磁波理论内容丰富、含义深刻、体系完整、延伸性强、注重实验,理论性和应用性这两方面的特点都非常突出。其核心的麦克斯韦方程组,经过多年的考验和发展,展现出其光彩熠熠的科学性、前瞻性和适用性,构成了现代通信、电子信息、计算机等许多行业的科学基础。作为高等学校光信息类、通信类、电子类等专业的必修课,电磁场与电磁波理论学习的重要性不言而喻。

本书编者在应用物理和光信息科学与技术专业任教多年,这两个专业介于理科和工科之间。作为传统理科的物理学专业,通常需要学习与本课程相近的电动力学(包括了狭义相对论等内容)。作为传统工科的通信工程、电子工程等专业,通常需要学习工科的电磁场与电磁波理论(包括电工电磁理论等内容)。但对于介于理科和工科之间的光信息和应用物理这类专业,尤其是在近年来通信、信息产业迅速发展的背景下,完全拿来主义地选取理科的电动力学或工科的电磁场与电磁波教材(国内已有许多很好的教材),似有不宜。因此,编者萌发了编写一本适用教材的想法。

本书的前 5 章由程成编写,第 6 章和第 7 章由张航编写,附录及各章的习题由许周速編集,全书由张航初统、程成定稿。本书可作为应用物理、光信息科学与技术、通信工程、光学工程、电子科学与技术等专业的本科教材,课时数在 64 左右。前期宜学习过普通物理的电磁学、特殊函数、矢量分析等课程。其中打*号的章节内容可直接跳过而不会影响阅读。

电磁场与电磁波理论博大精深,其应用深入到许许多多的宏观和微观领域,近年来各种各样的数值计算方法更是层出不穷。虽然编者已努力备至,但限于水平和能力,本书的局限性、缺陷和漏误在所难免,望读者不吝指正,去缪纠误存真,使之成为广大学子喜好的良师、学习的益友和成长的伴侣。

本书被列为“十一五”浙江省重点教材建设项目,在此表示感谢。

程 成

于浙江工业大学理学院

目 录

前言

绪论	1
----	---

第1章 电磁场理论基础

1.1 电荷与电场	4
1.1.1 电荷与库仑定律	4
1.1.2 电场强度	5
1.1.3 高斯定理和静电场的散度	6
1.1.4 静电场的环路定理和旋度	8
1.2 电流与磁场	10
1.2.1 电荷守恒定律	10
1.2.2 毕奥-萨伐尔定律	11
1.2.3 磁场的通量和散度	12
1.2.4 磁场的环量和旋度	12
1.3 麦克斯韦方程组	14
1.3.1 电磁感应定律	14
1.3.2 位移电流	16
1.3.3 真空中的麦克斯韦方程组	16
1.3.4 洛伦兹力公式	17
1.4 电磁介质的物理基础	18
1.4.1 介质的极化	18
1.4.2 电位移矢量	20
1.4.3 介质的磁化	21
1.4.4 磁场强度	23
1.4.5 介质中的麦克斯韦方程组	23
1.5 电磁场的边值关系	25
1.5.1 法向分量	25
1.5.2 切向分量	26
1.6 电磁场的能量和动量	28
1.6.1 电磁场和电荷系统的能量守恒定律	28
1.6.2 电磁场能量的传输	31
1.6.3 电磁场的动量和动量守恒定律	32
1.6.4 光压(辐射压力)	34
习题	36

第2章 静电场

2.1 静电场的标势	38
------------	----

2.1.1 电势与电势梯度	38
2.1.2 静电势的微分方程和边值关系	40
2.1.3 静电场的总能量	42
2.2* 静电场问题的唯一性定理	43
2.3 分离变量法	43
2.4 电像法	47
2.5* 格林函数法	52
2.5.1 泊松方程的格林函数	52
2.5.2 格林公式和边值问题的解	53
2.6 电多极矩	54
2.6.1 电势的多极展开	55
2.6.2 电矩与电多极矩	57
2.6.3 电荷体系在外场中的能量	63
习题	65

第3章 静磁场

3.1 矢势及其微分方程	67
3.1.1 矢势 A	67
3.1.2 矢势 A 的微分方程及基本解	68
3.1.3 矢势 A 的边值关系	69
3.1.4 矢势 A 的物理意义	70
3.2 磁标势	73
3.2.1 引入磁标势的条件与磁标势的方程	73
3.2.2 磁标势法求解静磁问题	74
3.2.3 磁像法	75
3.3* 静磁屏蔽	77
3.4 磁多极矩与磁场能量	79
3.4.1 磁多极矩	79
3.4.2 磁场能量	81
3.4.3 外磁场中的磁偶极子	82
习题	84

第4章 电磁波的辐射

4.1 达朗贝尔方程	86
4.1.1 电磁场的波动性	86
4.1.2 势函数的引入	87

4.1.3 洛伦兹规范	88	6.3.1 散射截面与吸收截面	130
4.1.4 推迟势	90	6.3.2 瑞利散射	132
4.2 电偶极辐射	92	6.4 电磁波的偏振	134
4.2.1 电偶极子的势函数	92	6.4.1 偏振的椭圆表示	134
4.2.2 电偶极子的场强	93	6.4.2 偏振的 Jones 矢量表示	135
4.2.3 $R \ll \lambda$ 情形	95	6.4.3 偏振的 Stokes 参量表示	137
4.2.4 $R \gg \lambda$ 情形	96	习题	138
4.2.5 瑞利-金斯公式	97	第 7 章 波导和谐振腔	139
4.2.6 $l \ll \lambda$ 情形	98	7.1 传输线的演变	139
4.2.7 拉摩尔公式	99	7.2 矩形波导	140
4.3 电多极辐射	99	7.2.1 矩形波导中电磁波的通解	140
4.3.1 推迟势的多极展开	100	7.2.2 横磁波	141
4.3.2 电四极辐射场	100	7.2.3 横电波	143
4.3.3 磁偶极辐射场	101	7.2.4 主波	144
4.4 半波型天线的辐射	102	7.3 柱形波导	145
习题	105	7.4 光纤波导	147
第 5 章 电磁波的传播	107	7.5 谐振腔	149
5.1 导电介质中的电磁波方程	107	7.5.1 矩形谐振腔	149
5.1.1 达朗贝尔方程式	107	7.5.2 柱形谐振腔	151
5.1.2 亥姆霍兹方程	108	7.5.3 Fabry-Perot 谐振腔	156
5.1.3 边值关系	109	习题	159
5.2 平面电磁波	110	附 录	160
5.3 介质表面的反射和折射	113	附录 A 矢量分析和运算 ∇	160
5.3.1 反射定律与折射定律	113	1. 微分算子 ∇ 的定义	160
5.3.2 菲涅耳公式	114	2. 含有 ∇ 算子算式的定义与性质	161
5.3.3 菲涅耳公式的讨论	116	3. 二重 ∇ 算子	162
5.4 导体表面的反射和折射	118	4. 包含 ∇ 算子的恒等式	163
5.4.1 穿透深度	118	附录 B 张量运算	164
5.4.2 趋肤效应	119	1. 并矢的导出及其表达式	164
5.5 等离子体中的平面电磁波	122	2. 并矢的运算规则	166
5.5.1 等离子体的等效介电常数	122	3. 并矢的几点性质	167
5.5.2 平面波在等离子体中的 传播特性	123	附录 C 矢量积分定理	168
5.5.3* 电子等离子体波	124	1. 高斯散度定理	168
习题	125	2. 斯托克斯定理	168
第 6 章* 复杂介质中电磁波的 传播	127	3. 平面格林定理	169
6.1 电磁波的吸收	127	4. 标量格林定理	169
6.2 电磁波的色散	128	5. 矢量格林定理	170
6.2.1 色散与群速度	128	6. 并矢格林定理	170
6.2.2 群速度与相速度的关系	129	7. 其他积分定理	170
6.3 电磁波的散射	130	附录 D 拉普拉斯方程的通解	172
		1. 直角坐标系	172
		2. 柱坐标系	172
		3. 球坐标系	174
		参考文献	176

绪 论

电磁场与电磁波作为一门比较完整地描述电场、磁场以及它们相互之间关系的经典理论,从开始建立到现在已经 100 多年了。在这 100 多年漫长的历史进程中,我们不得不提到那些在电磁理论的发展中做出杰出贡献的科学家。这些在各个不同时期的科学家所做出的不朽贡献,推动了电磁理论的不断发 展,最终构建成电磁理论如今的巍然大厦。

在 1771~1773 年间,英国物理学家和化学家卡文迪许 (Cavendish, 1731—1810) 潜心进行了他的静电学实验。他发现一对电荷间的作用力跟它们之间距离的二次方成反比,这就是后来库仑导出的著名的库仑定律的一部分。他提出每个带电体的周围有“电气”,这与电场理论很接近。卡文迪许演示了电容器的电容与插入平板中的物质有关。他首先提出了电势的概念,对静电理论的发展起了重要作用。他还提出了导体上的电动势与通过之电流成正比关系。在物理学上他最主要的成就是通过扭秤实验验证了牛顿的万有引力定律,确定了引力常数和地球平均密度。

之后,法国物理学家、工程师库仑 (Coulomb, 1736—1806) 1777 年开始研究静电和磁力问题。当时法国科学院悬赏征求改良航海指南针中的磁针问题。库仑认为磁针支架在轴上,必然会带来摩擦,提出用细头发丝或丝线悬挂磁针。研究中发现线扭转时的扭力和针转过的角度成比例关系,从而可利用这种装置测出静电力和磁力的大小,这导致他发明扭秤。他还根据丝线或金属细丝扭转时扭力和指针转过的角度成正比,确立了弹性扭转定律。1785~1789 年,库仑用扭秤测量静电力和磁力,导出了著名的库仑定律。库仑定律使电磁学的研究从定性进入定量阶段,是电磁学史上一块重要的里程碑。

法拉第 (Faraday, 1791—1867) 是 19 世纪电磁学领域中最伟大的实验物理学家。1820 年奥斯特发现电流的磁效应并受到科学界的关注,法拉第开始对电磁现象产生了巨大的兴趣。他仔细分析了电流的磁效应等现象,思考既然电流能产生磁,那么是否磁也能产生电呢? 1822 年,他做了大量的实验,经过历时十年的试验、失败、再试验,直到 1831 年才取得成功。以后又做了几十个类似的试验,直到 1851 年,才从大量的实验现象中总结出电磁感应定律。法拉第另外的一个贡献是提出了场的概念。他反对超距作用的说法,他认为带电体、磁体周围空间存在着一种物质,起到传递电、磁力的作用,他把这种物质称为电场、磁场。1852 年,他引入了电力线 (即电场线)、磁力线 (即磁感线) 的概念,并用铁粉显示了磁棒周围的磁力线形状。场的概念和力线的模型对当时的传统观念是一个重大的突破。法拉第从近距作用的物理图像出发,预见了电磁作用传播的波动性和它们传播的非瞬时性,表现出了法拉第深邃的物理洞察力和深刻的物理思想。

1855 年,英国数学物理学家麦克斯韦 (Maxwell) 开始研究电磁学。在认真研究了法拉第关于电磁学方面的新理论和思想之后,他坚信法拉第的新理论中包含着真理。当时,在电磁学领域已经有了法拉第、安培、奥斯特、高斯等许多人的工作,他对前人所发现的电磁现象作了全面系统的研究,凭借他杰出的数学能力和丰富的想象力,在 1855~1864 年间,接连发表了三篇重要的电磁场理论的论文:《论法拉第的力线》、《论物理的力线》、《电磁场的

动力学理论》。在论文中，他创造性地提出了位移电流的概念，将库仑定律、欧姆定律、安培定律、毕奥-萨伐尔定律、位移电流和电流连续性方程等统一在一组方程中。经过后人整理和改写，成为经典电磁场理论的主要基础——麦克斯韦方程组。1865年，他预言了电磁波的存在，以及电磁波只可能是横波，并计算了电磁波的传播速度等于光速，同时得出结论——光是电磁波的一种形式，揭示了光和电磁现象之间的内在联系。23年后，德国物理学家赫兹（Hertz）首次以实验验证了电磁波的存在。麦克斯韦于1873年出版了科学名著《电磁理论》，全面、系统和准确地描述了电磁场理论，这一理论已经成为经典电磁场理论的重要支柱之一。麦克斯韦对电磁理论的贡献是人类极其宝贵的精神财富。可以说，至麦克斯韦止，经典电磁场理论的大厦已经建立。

100多年以来，随着近现代科学和工业的迅速发展，麦克斯韦电磁场理论得到了广泛的应用。雷达、通信、计算机、导航、遥感、广播电视以及网络技术等许许多多的领域都与电磁理论息息相关。近几十年来，电磁场理论本身也得到了发展，例如出现了量子电磁理论，将量子理论结合到经典的电磁场理论中，很好地揭示了宏观世界与微观世界统一的电磁现象，解释了经典电磁理论中诸如加速电荷的电磁辐射等问题。另一方面，电磁理论深入到一些相关的领域，发展出一些分支，例如：生物电磁学、微纳电磁学、等离子体电磁学、环境电磁学等。生物电磁学研究非电离辐射电磁波与生物系统之间的相互作用规律及其应用，主要涉及电磁场与微波技术在生物医学方面的应用，对于电磁环境对生命体影响的评价具有重要意义。纳米磁学主要研究巨磁电阻与自旋电子学、磁性膜的制备、磁性表征、磁性多层膜的层间耦合与磁输运性质、纳米晶软磁、永磁和纳米复合材料、低维磁性和量子磁性（包括磁性纳米线和量子点等）、计算磁学和微磁学模拟、先进纳米表征方法和核方法在磁学中应用等。纳米材料光学也可简称为纳米光学，主要研究半导体纳米晶体（量子阱、量子线、量子点）及其在介质材料中的光的激发、吸收、辐射和散射等现象，从而使得人们可利用纳米晶体的奇特光学特性，制备出新型的光子和光电子器件。等离子体电磁学研究物质第四态——等离子体中的电磁场和电磁波，研究利用强电磁约束高温等离子体，使得等离子体达到核聚变所需的密度和温度，并稳定可控，从而为人类开发和利用可控聚变能奠定基础。

和电磁学密切相关的是电动力学，两者在本质上并没有很大的区别。电磁学偏重于电磁现象的实验研究，从常见的电磁现象中研究归纳出电磁学的基本规律。作为一门课程，它通常归于普通物理。电磁学的后续课程是电动力学。电动力学偏重于理论，它以一组形式优美的麦克斯韦方程组和洛伦兹力为基础，从理论上研究电磁场的分布、电磁波的产生、辐射和传播，研究带电粒子与电磁场的相互作用、狭义相对论等问题。作为一门课程，电磁场和电磁波一般不涉及理论性较强的带电粒子与电磁场的相互作用、狭义相对论等内容，而偏重于讨论电磁波在各种介质形态中的传播，例如在非均匀介质、谐振腔、等离子体等介质形态中。可以说，广义的电磁学包含了电动力学和电磁场与电磁波。

在研究方法上，近年来计算电磁学等得到了迅速发展。计算电磁学的基本依据还是经典的麦克斯韦方程，只是采用数值计算的方法，例如有限时域差分法、有限单元法、遗传算法等，来研究解决通常解析法无法解决的诸如复杂边界、脉冲快变、非对称、非线性效应等一系列的复杂电磁学问题。计算电磁学作为一个有效的计算方法，在各类光电子器件及系统，例如微波—毫米波—光波领域中的器件设计、衍射光学和二元光学器件、特种光栅（交叉

光栅、多层涂层光栅、金属光栅)、近场倏逝波、负折射率材料、微纳光波导、光子晶体等,都有广泛的应用。数值计算具有低成本、快捷、可模拟理想状态和极限状态、动态图形直观等特点。

电磁学的深入发展和对其他学科的渗透,验证了麦克斯韦电磁场理论的广泛适用性,同时大大充实了麦克斯韦电磁场理论本身,使得麦克斯韦电磁场理论比之从前更为完整,适应面更为广阔,对电磁运动规律的揭示和描述更为深刻。

毫无疑问,无论是电磁理论本身,还是电磁理论的应用,抑或是电磁理论的数值计算方法等,近年来都有令人瞩目的发展,使得这一门相对经典的理论焕发出了勃勃生机和强大的生命力。电磁场与电磁波已经成为高等学校理工科许多专业的一门重要的必修课,也是今后进一步学习光纤通信、纳米光学、移动通信、射频电路、微波技术、电力电子技术、光波技术、电磁兼容技术等课程的专业基础课程。

第 1 章 电磁场理论基础

实验是电磁理论的基本出发点。电磁理论要从实验观测到的现象出发,总结实验现象的规律并加以解释,同时预言未观测到的实验现象和规律。本章从电磁现象的实验定律,即库仑定律、毕奥-萨伐尔定律、电磁感应定律等出发,结合场的线性叠加原理,得到电磁场理论的基本方程。应用电磁场理论的基本方程——麦克斯韦方程,考察电荷和电场、电流和磁场、电荷和电流、电场和磁场相互之间的基本关系,从而认识和把握电磁运动的基本规律,为后面几章的学习打下基础。

1.1 电荷与电场

1.1.1 电荷与库仑定律

在电磁场理论中,电荷是一个最基本的物理量。电荷具有三个基本特征:①电荷只有两种类型:正电荷与负电荷;②电荷是守恒的,系统电荷量不会凭空增加或减少;③电荷是量子化的,电荷拥有不可分割的最小单位。对电荷守恒的表述主要有两个层次,其一是宇宙内电荷总量守恒,而且恒等于零,也就是说正负电荷总量严格平衡;其二是局域守恒,指的是局域电荷量的变化只能通过电荷的有向运动转移来实现。

电荷之间存在相互作用,其规律是由法国物理学家库仑于 1785 年在大量的实验基础上总结出来的,称为库仑定律 (Coulomb's Law)。库仑定律描述的是两个静止点电荷之间的相互作用力的规律,对运动电荷不适用。其表述如下:

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力为

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (1.1.1)$$

式中, $\mathbf{r}$ 为由 Q 到 Q' 的矢径; ϵ_0 为真空介电常数 (即真空电容率), 其值约为 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$ 。库仑定律表明, 两个点电荷相互之间的作用力: ①与每个电荷的电荷量成正比; ②与它们之间距离的二次方成反比; ③方向沿着这两个点电荷的连线; ④如果两个点电荷为异号电荷, 则为吸引力; 如果为同号点电荷, 则为排斥力。

需要指出: 库仑定律只适用于真空中的两个静止点电荷之间的相互作用, 非静止点电荷相互之间的作用力不满足式 (1.1.1)。另外, 点电荷是一个理想的物理模型。在物理世界中, 除了目前人们无法再分的基本粒子 (例如电子、质子、夸克等) 之外, 点电荷其实是不存在的。但是, 在许多情况下, 如果带电体本身的线度比带电体之间的距离小得多时, 就可以近似地把带电体看作点电荷。

如果一个点电荷 Q_0 同时受多个点电荷 Q_1 、 Q_2 、 $\dots$ 、 Q_n 的作用, 实验表明, Q_0 所受到的合力为各个点电荷单独作用时的力的矢量和, 即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_0 Q_1}{r_{01}^3} \mathbf{r}_{01} + \frac{Q_0 Q_2}{r_{02}^3} \mathbf{r}_{02} + \cdots + \frac{Q_0 Q_n}{r_{0n}^3} \mathbf{r}_{0n} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_0 Q_i}{r_{0i}^3} \mathbf{r}_{0i}
 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

式中, $\mathbf{r}_{01}$ 、 $\mathbf{r}_{02}$ 等分别为 Q_1 、 Q_2 等到 Q_0 的位置矢量。上式说明, 静电力是可以线性叠加性的。

如果一个点电荷 Q 受到一个体电荷密度为 $\rho(\mathbf{x}')$ 的连续分布电荷的作用, 则可以将此连续分布的电荷分成许多微电荷元 $\rho(\mathbf{x}') dV'$, 这样式 (1.1.2) 可改写为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q\rho(\mathbf{x}')}{r^3} \mathbf{r} dV' \quad (1.1.3)$$

式中, $\mathbf{x}'$ 为电荷元 $\rho dV'$ 的位置矢量, $\mathbf{r}$ 为电荷元到点电荷的位置矢量, $\mathbf{r}$ 的方向由电荷元指向点电荷。

本书中的带撇符号规则说明:

1) $\mathbf{x}$ 表示场的坐标矢量或表示‘因果’关系中‘果’的坐标, ∇ 算符仅对 $\mathbf{x}$ 空间的物理量起作用, 对 $\mathbf{x}'$ 空间的物理量不起作用;

2) $\mathbf{x}'$ 表示源的坐标矢量或表示‘因’的坐标, ∇' 算符仅对 $\mathbf{x}'$ 空间的物理量起作用, 对 $\mathbf{x}$ 空间的物理量不起作用;

3) $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, 所以 ∇ 和 ∇' 算符对由 $\mathbf{r}$ 表示的物理量均起作用并相差一个负号。

库仑定律唯像地描述了两个静止电荷之间相互作用力的规律, 但并未说明这种作用力的物理本质。历史上, 对库仑定律有两种不同的解释: 一种观点认为两个点电荷之间的相互作用是直接的“超距”作用, 不需要通过任何中间的物质媒介, 而且作用力的传递是即时的。另一种观点则认为电荷间相互作用是通过场来传递的, 其传递速度是有限的, 这种观点称为“近距”作用观点。现在来看, 这两种观点在静电学范畴内是等价的, 能给出相同的结果。但是在运动电荷情况下, 特别是电荷的运动状态及电磁场发生迅速变化的情况下, 两种观点及其所产生的运动规律就不等价了。大量的实验证明, 场的观点是正确的。本书采用场的观点。

1.1.2 电场强度

电荷之间的作用力通过“场”来传递, 那么, 这种“场”的性质如何, 下面进行讨论。

如果在电场中放置另外一个电荷, 则电场将给予该电荷以作用力, 称之为电场力。当这个电荷处在电场中不同地点时, 所受的电场力不相同。在电场中同一点, 不同的电荷所受到的电场力也不相同, 但电荷所受到的电场力与电荷之比是恒定的。由电磁学中关于电场强度的定义可知, 电场中某点的电场强度, 其数值和方向与放置在该点处的试验单位正电荷 Q' 所受的电场力相同, 即

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q'} \quad (1.1.4)$$

电场 $\mathbf{E}$ 是空间的函数, 在笛卡尔坐标系中, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z)$, 式中 $\mathbf{r}$ 为观察点的位置矢量。上述关于电场强度的定义, 不仅对静电场适用, 对时变电磁场也适用。但这

时电场强度 $\mathbf{E}$ 不仅仅是空间坐标的函数, 而且还是时间 t 的函数, 即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 。

由库仑定律, 一个静止点电荷 Q 所激发的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (1.1.5)$$

由实验可知电场具有叠加性, 即多个电荷所激发的电场等于每个电荷所激发的电场的量和。设第 i 个点电荷 Q_i 到电场中某点 P 的距离为 r_i , 则 P 点的总电场强度 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (1.1.6)$$

如果电荷连续分布在某一区域 V 内的, 其电荷体分布密度表示为 $\rho(\mathbf{x}')$, 可把区域 V 分成无限多个体积元 (见图 1-1)。设 V 内某点 $\mathbf{x}'$ 上的体积元为 dV' , dV' 内所含的电荷为 dQ , 则 $dQ = \rho(\mathbf{x}') dV'$, 式中 $\mathbf{x}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z$ 是电荷体积分元 dV' 的位置矢量, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 分别为 x, y, z 三个坐标轴方向上的单位矢量。

电荷元 $\rho(\mathbf{x}') dV'$ 到 P 的距离为 r , P 点的位置矢量为 $\mathbf{x}$, 根据场的叠加原理, P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV' \quad (1.1.7)$$

式中, 积分范围包含电荷分布的整个区域。

若电荷为面或线连续分布, 面电荷和线电荷密度分别用 $\sigma(\mathbf{x}')$ 和 $\lambda(\mathbf{x}')$ 表示, 那么电场强度可由以下两式表示:

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}') \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dS' \quad (1.1.8)$$

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\lambda(\mathbf{x}') \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dl' \quad (1.1.9)$$

然而在一般情况下, 由于电荷分布是非均匀的, 也不一定具有对称性, 因此要由上面的三式来确定电场强度是比较困难的。高斯定理的使用可以为确定电场强度带来方便, 接下来介绍高斯定理。

1.1.3 高斯定理和静电场的散度

在电磁学中高斯定理可表述为: 在静电场中, 通过任一闭合曲面 S 的电通量 Φ 等于此闭合曲面所包含的电荷 Q 的 $1/\epsilon_0$ 倍, 即

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1.10)$$

Q 指 S 面 (高斯面) 内各电荷电量的代数和, 面元矢量 $d\mathbf{S}$ 取曲面的外法线方向为正方向。由高斯定理, 当电荷具有某种对称性时, 如果高斯面内的电荷已知, 就可以求出电场强度。

值得指出: 上式中的电场 $\mathbf{E}$ 是指高斯面上的电场, 而不是高斯面内的电场, 更不是高

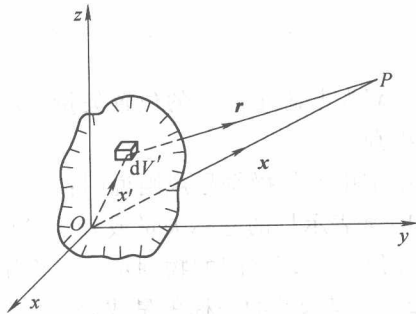


图 1-1

斯面外的电场。另外, 高斯面内的电荷的代数和等于零, 仅仅意味着穿过该闭合曲面的电通量为零, 而并不意味着高斯面上的电场为零。其实, 无论高斯面怎么取, 高斯面内外的电荷都对高斯面上的电场有贡献。

下面, 利用库仑定律和场的叠加原理, 证明高斯定理。先研究只有一个点电荷的情况 (见图 1-2)。

1) 设封闭曲面内只有一个点电荷 Q 。通过面元 dS 的电通量为

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cos\theta dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta dS$$

式中, θ 为 $d\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{E}$ 之间的夹角, $dS \cos\theta$ 为面元 dS 投影到以 r 为半径的球面上的面积。 $dS \cos\theta / r^2$ 为面元 dS 对点电荷 Q 所张的立体角元 $d\Omega$, 即 $d\Omega = dS \cos\theta / r^2$ 。它可取正值或负值, 正负决定于 r 与 $d\mathbf{S}$ 之间的夹角。当点电荷在 S 面内时, S 面对 Q 所张的立体角为 4π 。所以电场强度 $\mathbf{E}$ 对闭合曲面 S 的电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

2) 如果点电荷 Q 在闭合曲面 S 之外 (见图 1-3), 通过以 Q 为顶点与闭合曲面 S 相切的锥面, 把 S 面分为 S_1 与 S_2 两部分, S_1 与 S_2 对 Q 所张的立体角等值反号, 总立体角为零。即 $\oint_S d\Omega = 0$, 故

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

即 S 面以外的电荷 Q 所发出的电场线, 将先穿入 S 面, 然后再穿出来, 因而对该曲面的总电通量没有贡献。

当空间中有多个点电荷时, 根据场的叠加原理, 则

$$\mathbf{E}_{\text{总}} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_n$$

所以

$$\oint_S \mathbf{E}_{\text{总}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_i \quad (Q_i \text{ 在 } S \text{ 内}) \quad (1.1.11)$$

如果电荷为连续分布, 体电荷密度为 ρ , 则电场穿过闭合曲面 S 的通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.1.12)$$

式 (1.1.10) 和式 (1.1.12) 是高斯定理的积分形式。

利用数学中的高斯散度定理, 即面积分转化为散度的体积分, 有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

可得

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

因为上式对任意积分区域都成立, 所以两边的被积函数必定处处相等, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1.13)$$

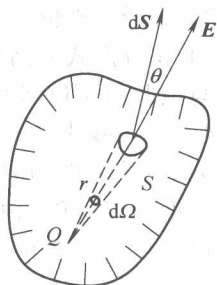


图 1-2

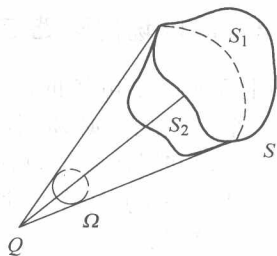


图 1-3

上式是高斯定理的微分形式。对高斯定理讨论如下:

1) 高斯定理依赖于电荷之间作用力的平方反比律, 即静电场的库仑定律。但实验表明: 高斯定理在时变情况下也适用, 因此可以把它推广, 作为电磁场理论的基本方程之一。

2) 高斯定理依赖于不同电荷的效应的线性叠加。

3) 积分形式的高斯定理强调的是平均值 (电通量), 指出通过任意闭合曲面的电通量仅仅与该曲面所包围的总电荷有关, 而与曲面外是否有电荷以及电荷如何分布无关。

4) 微分形式的高斯定律强调的是电荷与电场的空间点域关系。只要空间没有电荷 ($\rho=0$), 则该处电场的散度为零 (不是电场 $\mathbf{E}$ 等于零)。在电荷分布 $\rho \neq 0$ 的空间点, 电场强度的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ 。由数学中对矢量场的散度性质的讨论可知, $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ 说明静电场是有源场, 电荷就是电场的源。电场线从正电荷出发, 终止于负电荷 (或无穷远) 处。

5) 高斯定理的积分形式是普遍适用的, 不论电荷是体分布、面分布或是点电荷, 积分形式总成立。但微分形式在奇点无效。只有对连续分布的电荷系统, 微分形式才处处成立。

高斯定理的积分形式给出了计算对称分布电场的一个简单方法。对于不对称分布的电场, 一般不能利用高斯定理的积分形式求解, 但有某些不对称的电场, 利用场的叠加原理后, 也可用高斯定理求解。

1.1.4 静电场的环路定理和旋度

上面确定了电场的散度。但电场是一个矢量场, 要完全确定一个矢量场, 必须同时确定它的散度和旋度。下面, 根据库仑定律和场的叠加原理来确定静电场的旋度。

先计算一个点电荷 Q 所激发的电场强度 $\mathbf{E}$ 对任一闭合回路 L 的环路积分:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot d\mathbf{l}$$

式中, $d\mathbf{l}$ 为闭合回路的线元 (见图 1-4)。设 $d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{r}$ 之间的夹角为 θ , 则 $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = rdl\cos\theta = rdr$, 因而上式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad (1.1.14)$$

上式表明一个点电荷所激发的电场 $\mathbf{E}$ 的环量为零。对于有多个静止电荷的分布, 根据场的叠加原理, 由于每一个电荷元所激发的电场环量为零, 因此总电场 $\mathbf{E}$ 对任一回路的环量恒为零, 即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

所以式 (1.1.14) 对任意静电场和任一闭合回路都成立。

利用数学中的斯托克斯定理, 积分形式 (1.1.14) 可写为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

由于上式对任意曲面 S 都成立, 因而被积函数必等于零, 即

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.15)$$

上式为微分形式, 表明空间任一点电场强度 $\mathbf{E}$ 的旋度为零。所以, 静电场是无旋的, 电力线分布没有旋涡状结构。请注意 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 依赖于电荷之间作用力的有心性质, 也依赖于力是相对距离的函数, 但它不依赖于平方反比律。

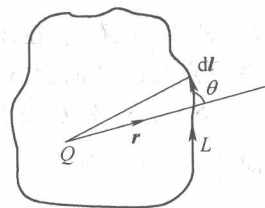


图 1-4

式 (1.1.13) 和式 (1.1.15) 给出了静电场的散度和旋度, 揭示了静止电荷激发的电场以及静电场内部联系的规律, 它是静电场的基本方程。它表明静电场是有源无旋的, 电荷是电场的源, 电场线从正电荷出发而终止于负电荷, 在自由空间中电场线是连续的, 没有旋涡结构。

需要指出: 高斯定理可以推广到非静电时的情况。而环路定理式 (1.1.14) 和旋度定理式 (1.1.15) 在时变情况下不再适用。在非静电的普遍情况下, 电场是有旋的, 必须对式 (1.1.14) 或式 (1.1.15) 加以适当修改才能作为电磁场理论基本方程。

例 1-1 电荷 Q 均匀分布于半径为 a 的球体内, 求空间各点的电场强度, 并计算电场的散度。

解: 由电荷分布的对称性知道, 电场 $\mathbf{E}$ 沿矢径 $\mathbf{r}$ 方向, 并且在与带电球同心的球面上 $\mathbf{E}$ 的值处处相同。分球外空间、球内空间和球面上三种情况来求电场分布。

(1) 当 $r > a$ 时, 可取半径为 r 的同心球面为高斯面, 高斯面上各点 $\mathbf{E}$ 和 $d\mathbf{S}$ 方向相同。于是

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = 4\pi r^2 E$$

根据式 (1.1.10) 有 $4\pi r^2 E = Q/\epsilon_0$ 。考虑到 $\mathbf{E}$ 的方向后, 它的矢量式为

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (r > a) \quad (1.1.16)$$

(2) 当 $r < a$ 时, 作半径为 r 的球面为高斯面, 则

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

式中, Q' 为高斯面内电荷, 其值为

$$Q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \right) = \frac{Qr^3}{a^3}$$

所以

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

改写为矢量式:

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (r < a) \quad (1.1.17)$$

(3) 当 $r = a$, 即在球面上时, 式 (1.1.16) 和式 (1.1.17) 的结果相同。

(4) 计算电场的散度: 当 $r > a$ 时, 由式 (1.1.13), 并考虑到 $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ ($r \neq 0$), 因此

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

当 $r < a$ 时, 由式 (1.1.16) 直接计算可得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\neq 0)$$

由本例题中可知, 在电荷分布不为零的区域中, 电场 $\mathbf{E}$ 的散度不等于零; 在球外空间

中, 没有电荷, 电场 $\mathbf{E}$ 的散度为零, 即电场 $\mathbf{E}$ 的散度具有点域特点。由式 (1.1.16) 和式 (1.1.17), 还可以通过求电场的旋度, 证明静电场是无旋场。

1.2 电流与磁场

1.2.1 电荷守恒定律

导体中的电流通常用通过导体截面的总电流强度 I (一般简称为“电流”) 来描述, 但是电流强度无法描述电荷在导体中各点流动的情况。这里, 引入电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 。定义电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 为单位时间内垂直通过单位面积的电量, 方向为沿该点的电流方向, 因此, 通过面元 $d\mathbf{S}$ 的电流 dI 大小为

$$dI = j dS \cos \theta = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

式中, θ 为 $d\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{j}$ 之间的夹角。通过任一曲面 S 的电流为

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.1)$$

如果空间某点的电荷密度为 ρ , 且电荷以共同的漂移速度 $\mathbf{v}$ 运动, 则该点的电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (1.2.2)$$

需要指出: 在导体或等离子体内, 可以发生 ρ 为零而 $\mathbf{j}$ 不为零的情况。这是因为导体或等离子体中正负电荷密度大小可以相等, 但它们的漂移速度由于质量不同而不同, 不能以共同的 $\mathbf{v}$ 表示。因此, 实际上有

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$$

$$\mathbf{j} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- \neq 0$$

实验证明, 封闭系统中的总电荷既不会减少也不会增多, 不管是经历化学变化还是物理变化, 即电荷是守恒的。电荷守恒是自然界最基本的定律之一。根据电荷守恒定律, 可以导出电流的连续性方程。

考虑空间中一个区域 V , 其边界是闭合曲面 S 。每秒流出闭合曲面 S 的电量为 $\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ (流入的电量为 $-\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$)。根据电荷守恒定律, 它等于每秒体积 V 中电量的减少。设 V 内电荷 Q 以密度 ρ 分布, 每秒体积 V 中增加的电量为

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.2.3)$$

所以

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

这就是电荷守恒定律的数学形式。应用矢量运算中的高斯定理, 把面积分化为体积分, 即

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

得微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.2.4)$$

式 (1.2.4) 称为电流的连续性方程, 是电荷守恒定律的微分形式, 与积分表达式式 (1.2.3) 等效。

如果在式 (1.2.3) 中所取的 V 是全空间, 则 S 为无穷远界面。由于在无穷远面上不可能有电流流出或流进, 所以式 (1.2.3) 左边的积分为零, 因此

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

这表示全空间的总电荷守恒。

在稳恒电流情况下, 空间各点的电荷分布和电流分布不随时间变化, 因而 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 由式 (1.2.4), 得

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.2.5)$$

上式表明稳恒电流是无源的, 其电流线是闭合曲线, 没有源点和终点。所以稳恒电流只能在闭合回路中通过, 如果回路断开, 稳恒电流就不能通过。

1.2.2 毕奥-萨伐尔定律

上面讨论了电荷流动、变化的特点和规律。下面研究电流和磁场的相互作用。实验表明两个电流之间有作用力。和静电作用一样, 这种作用力也需要通过一种物质作为媒介来传递, 这种物质称为磁场。电流在其周围激发磁场, 当另一电流处于该磁场中时, 就要受到磁场对它的作用力。对电流有作用力是磁场的基本性质, 这里就利用这种特性来描述磁场。

实验表明, 一个电流元 $I d\mathbf{l}$ 在稳恒电流的磁场中所受的力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.2.6)$$

式中, $\mathbf{B}$ 是电流元 $I d\mathbf{l}$ 所在处的磁感应强度。式 (1.2.6) 称为磁场的安培定律。磁感应强度是描述磁场性质的基本物理量。

由实验总结出来的毕奥-萨伐尔定律描述稳恒电流激发的磁场。场源 $\mathbf{j}(\mathbf{x}') dV'$ 在观察点 $P(\mathbf{x})$ 产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (1.2.7)$$

式中, $\mathbf{r}$ 为由源点 $\mathbf{x}'$ 到观察点 $P(\mathbf{x})$ 的位置矢量, 方向由 $\mathbf{x}'$ 点指向 P 点, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (单位也可表示为 H/m) 为真空磁导率, 积分遍及整个电流分布区域。

如果电流集中在细导线上, 以 $d\mathbf{l}$ 表示回路 L 上的线元, dS_n 为导线横截面的面元, 则 $\mathbf{j} dV' = \mathbf{j} dS_n d\mathbf{l} = I d\mathbf{l}$ 即为导线的电流元。因此, 对于通过细导线的稳恒电流所激发的磁场, 毕奥-萨伐尔定律可表示为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.2.8)$$

对于以速度 $\mathbf{v}$ 匀速运动的点电荷 q , 它所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (\mathbf{v} \ll c) \quad (1.2.9)$$

式 (1.2.7) 和式 (1.2.8) 两式是稳恒电流所激发的磁场的积分形式, 为了反映次作用力在场中传递的特点, 还需要找出电流和它邻近空间点磁场之间的点域关系, 即电流和磁