JI HE YU XIAN XING DAI SHU

几何与线性代数

主　编　周忠国

河海大学出版社
HOHAI UNIVERSITY PRESS

几何与线性代数

主　编　周忠国

编　著　吴道明　董祖引　王启明

　　　　李水艳　何朝葵　柳庆新

河海大学出版社

HOHAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

几何与线性代数/周忠国主编. —南京:河海大学出版社,2011.12

ISBN 978-7-5630-2980-8

Ⅰ.①几… Ⅱ.①周… Ⅲ.①解析几何—高等学校—教材 ②线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O182 ②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 275820 号

书　　名	几何与线性代数
书　　号	ISBN 978-7-5630-2980-8/O·158
责任编辑	杜文渊
责任校对	蒋振云　李家奇
封面设计	黄　煜
出版发行	河海大学出版社
地　　址	南京市西康路 1 号(邮编:210098)
电　　话	(025)83737852(总编室)　(025)83722833(营销部)
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
排　　版	南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷	丹阳兴华印刷厂印刷
开　　本	787 毫米×960 毫米　1/16
印　　张	14
字　　数	280 千字
版　　次	2011 年 12 月第 1 版
印　　次	2011 年 12 月第 1 次印刷
定　　价	24.00 元

使 用 说 明

本书涉及到的数除非特别说明,都默认是实数.

■ 表示证明的结束或者解题过程的完成.

☞ 表示此段内容是对正文的解释，需要注意的地方.

我们详细地列出了一些重要的计算步骤，请参考使用.

前　言

几何与代数是工科各个专业的一门重要的数学基础课，几何学是研究空间事物的形状、位置和性质的基础学科，它对学生的思维能力的培养和认识客观事物有重要作用，线性代数中的许多概念与方法已深入到工程和科学技术的各个方面．随着信息化时代的到来，科学技术的发展突飞猛进，几何与代数在本科教学中所占有的位置越发显著，为学习其它课程所发挥的作用也日益突出．近年来把代数和几何统一起来的教学思想正在发展与实践中，本教材就是这方面工作的最新尝试．

与传统的高等数学相比，几何与代数这门课程的抽象性、严密性和逻辑性分外突出，对初次接触这门课的同学来说是比较难学的，该门课程的教学也被公认为一个难点．

本书试图采用较新的编排体系来帮助克服教学中的困难，第一章先从较为简单直观的三维向量和空间解析几何开始；第二章通过学生在中学熟悉的解线性方程组的内容引进矩阵这个本课程的核心概念和重要的应用工具，介绍矩阵的基本性质和简单运算，使学生对矩阵这个全新的对象有一个初步的认识；第三章先介绍行列式这个线性代数中比较直观易懂的概念及其运算性质，然后再进一步对矩阵进行讨论，用较大的篇幅强调矩阵的性质和运算，以加深同学的印象．在此基础上，第四章介绍向量组的线性相关性等抽象内容，使得各种抽象概念的引入比较自然，以克服理解上的困难．最后三章介绍矩阵的特征值和二次型等在应用中很重要的内容以及线性空间和线性变换的一般理论．

本教材重点强调工科学生应该掌握的基本概念和基本方法，注意学生基本技能的训练，注重提高学生分析问题和解决问题的能力，不再热衷冗长的推导和内容的全面，扬弃过于追求技巧的浮华，在内容安排上突出重点，对一些

较复杂的理论证明作为附录放在每一章的最后，便于学生的学习和掌握.

本书是河海大学几何与代数课程教研组集体努力的结果，吴道明编写了第一章；周忠国编写了第二章；王启明编写了第三章；第四、五、六、七章分别由何朝葵、柳庆新、李水艳、董祖引编写，最后由周忠国统一修改和定稿.

教学无止境，由于水平所限，本书难免有诸多疏漏及不当之处，敬请广大师生批评指正.

编者感谢河海大学理学院对此项工作的支持，对河海大学出版社为本书做得很多认真、细致的工作表示诚挚的感谢.

河海大学理学院几何与代数教研组

2011 年 10 月

目　录

第一章　几何向量及其应用

在日常生活和科学技术中，某些量完全由它的数值大小所确定，例如长度、面积、温度、时间等，这种量称为数量. 但也有另一类量，如力、速度、位移、电场强度等，它们既有数值大小又有方向，这种量称为向量（或矢量），无论对于数学本身还是在科学和工程技术上，向量都有着广泛的应用.

本章首先介绍几何空间中向量的概念和运算，然后通过建立向量的坐标，使向量的运算代数化，最后以向量为工具来研究空间中的平面与直线.

§1.1　向量及其线性运算

§1.1.1　向量的概念

我们把既有大小，又有方向的量称为向量.

在数学上，往往用一条有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量，记为$\overrightarrow{AB}$. 向量$\overrightarrow{AB}$的大小叫做向量$\overrightarrow{AB}$的模（或长度），记作 $\|\overrightarrow{AB}\|$. 今后为方便起见，也用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\cdots$ 表示向量（图 1.1.1）.

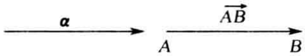

图 1.1.1

用有向线段表示的向量通常称为几何向量.

定义 1.1.1　相等的向量

如果两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的模相等，方向相同，则称其为相等的向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

从定义可知，两个相等的向量经过平移可以重合在一起，也就是我们所讲的向量都是自由向量，它只依赖于向量的大小和方向，而与向量的起点无关.

定义 1.1.2　负向量

如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的模相等，方向相反，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记作 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$，显然也有 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\beta}$.

定义 1.1.3 零向量

模等于零的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{\theta}$.

零向量实质是起点和终点重合的向量，它的方向可以看作是任意的.

定义 1.1.4 单位向量

模等于 1 的向量称为单位向量.

由于每一个方向上都有一个单位向量，故单位向量有无穷多个，若将所有单位向量的起点固定为 O，则空间中所有的单位向量的终点构成一个半径为 1 的球面.

§1.1.2 向量的线性运算

物理学中的力与位移都是向量，平面上作用于一点的两个不共线力的合力，可以用“平行四边形法则”求出，如图 1.1.2 中的两个力 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的合力就是以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线向量 $\overrightarrow{OC}$. 两个位移的合成可以用“三角形法则”求出，如图 1.1.3 中连接两次位移 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$ 的结果，相当于位移 $\overrightarrow{OB}$：

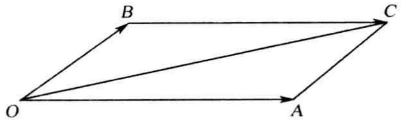

图 1.1.2

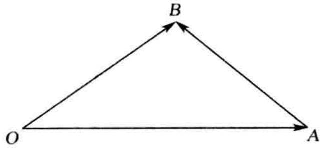

图 1.1.3

定义 1.1.5 向量的和

对于向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$，作 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\boldsymbol{\beta}$，把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$（图 1.1.4），即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$（三角形法则）.

三角形法则和平行四边形法则是等价的（图 1.1.5）.

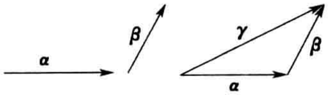

图 1.1.4

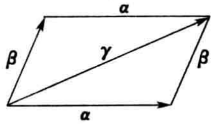

图 1.1.5

由定义不难验证向量的加法满足下列运算规律：

1. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$，(交换律).
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$，(结合律).
3. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.
4. $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

由上述的交换律和结合律，可得任意多个向量的加法如下：把前一个向量的终点作为次一向量的起点相继作 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$，再以第一个向量的起点 A 为起点，最后一个向量的终点 B 为终点作向量$\overrightarrow{AB}$，那么

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\text{(图 1.1.6)}.$$

利用负向量，我们规定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差：$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$(图 1.1.7).

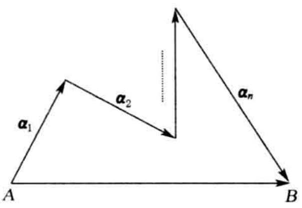

图 1.1.6

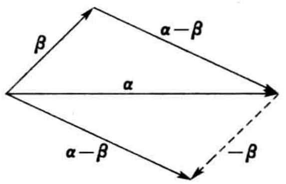

图 1.1.7

定义 1.1.6　向量的数乘

实数 k 和向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积是一个向量，记为 $k\boldsymbol{\alpha}$，称 $k\boldsymbol{\alpha}$ 为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积，简称数乘. 它的模为 $|k|\ \|\boldsymbol{\alpha}\|$；规定它的方向：当 $k>0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向，$k<0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向，$k=0$ 时为零向量.

向量的数乘运算满足下列规律：

1. $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.
2. $k(l\boldsymbol{\alpha})=l(k\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$.
3. $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.
4. $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

其中 k，l 为两个实数，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为两个向量.

由数乘运算可知，若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$ 时，$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}^0$(又称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的单位化).

$$即\ \boldsymbol{\alpha}^0 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha} \quad 或 \quad \boldsymbol{\alpha} = \|\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\alpha}^0.$$

§1.1.3 向量的共线与共面

向量的加法和数乘运算统称为线性运算.

定义 1.1.7 线性组合与线性表示

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$ 是一组向量,若存在一组实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个线性组合或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

例如,若有合力 $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$,则合力 $\vec{F}$ 是分力 $\vec{F_1}$,$\vec{F_2}$ 的线性组合,也可以说 $\vec{F}$ 可由 $\vec{F_1}$,$\vec{F_2}$ 线性表示.

定义 1.1.8 共线向量与共面向量

方向相同或相反的向量称为共线向量,而平行于同一平面的向量称为共面向量. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线,则记为 $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$.

定理 1.1.9 共线的充要条件

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的数 k, l 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}.$$

证明: 必要性　当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ 时,显然有

$$1\boldsymbol{\alpha} + 0\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}.$$

当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta}$ 时,$\|\boldsymbol{\alpha}\| \neq 0$,因而有非负实数 m 使得

$$\|\boldsymbol{\beta}\| = m\|\boldsymbol{\alpha}\|.$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同向时,取 $k=m, l=-1$;当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 反向时,取 $k=m, l=1$ 就都有 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$,这里 k 与 l 不全为零.

充分性　如果 $k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$,这里 k, l 不全为零,不妨设 $k \neq 0$,于是有

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{l}{k}\boldsymbol{\beta},$$

由数乘运算的定义知 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同向或反向,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线. ■

推论 1.1.10 共线的充要条件

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是其中一个向量可以由另一个向量线性表示. ■

定理 1.1.11　共面的充要条件

三个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}.$$

证明: 必要性　若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 中有两个向量共线,如 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线,则由定理 1.1.9,存在不全为零的数 k_1, k_2 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$,从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}.$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 中两两均不共线,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\gamma}$, 过 C 点作直线与 $\overrightarrow{OA}$ 平行,交于 $\overrightarrow{OB}$ 所在直线于 D 点(图 1.1.8).

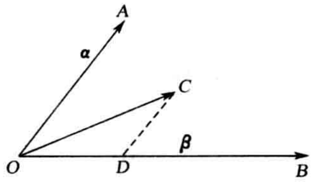

图 1.1.8

于是有 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=k_1\overrightarrow{OB}+k_2\overrightarrow{OA}$. 从而有

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+(-1)\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\theta}.$$

充分性　若有不全为零的实数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}$,不妨设 $k_3\neq 0$, 则有

$$\boldsymbol{\gamma}=-\frac{k_1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}-\frac{k_2}{k_3}\boldsymbol{\beta}.$$

这表明 $\boldsymbol{\gamma}$ 是以 $-\frac{k_1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}$, $-\frac{k_2}{k_3}\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的对角线,因此 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 共面. ■

推论 1.1.12　共面的充要条件

向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是其中一个向量可由另两个向量线性表示. ■

一般地有

定义 1.1.13　线性相关与线性无关

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一组向量,如果存在一组不全为零的数 k_1, k_2, $\cdots$, k_s 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性相关的;否则就称为是线性无关的.

由此可见,共线与共面是线性相关的特殊情况.

习题 1.1

1. 设向量 $\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$,试用 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 表示 $2\boldsymbol{\xi}-3\boldsymbol{\eta}$.
2. 设点 M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\beta}$,试用 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$