Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学三）

清华大学 王 欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童 武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

2013 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学三）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺超越135分. 数学三／王欢主编
—北京：中国石化出版社，2012.2
ISBN 978-7-5114-1353-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第011589号

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　录

最后冲刺试卷一

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 点外的微分 dy 是(　　)。

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

2. 设 $I_1=\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$，$I_2=\int \frac{du}{u(1+u)}$，则存在函数 $u=u(x)$，使(　　)。

(A) $I_1=I_2+x$　　(B) $I_1=I_2-x$

(C) $I_2=-I_1$　　(D) $I_2=I_1$

3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} b_n=+\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$(　　)。

(A) 发散　　(B) 收敛于 0

(C) 收敛于 $\frac{1}{b_1}$　　(D) 其敛散性不确定

4. 设 $k=\iint\limits_D (x^2+f(xy))\,d\sigma$，其中 f 为连续的奇函数，D 是由 $y=-x^3$，$x=1$，$y=1$ 所围成的平面闭域．则 k 等于(　　)。

(A) 0　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $-\frac{2}{3}$　　(D) 2

5. A 是 n 阶矩阵，且 $A^3=\mathbf{0}$，则(　　)。

(A) A 不可逆，$E-A$ 也不可逆　　(B) A 可逆，$E+A$ 也可逆

(C) A^2-A+E 与 A^2+A+E 均可逆　　(D) A 不可逆，且 A^2 必为 $\mathbf{0}$

6. 已知 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$ 且有关系 $b_{ij}=a_{ij}+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}b_{ik}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则下列关系式正确的是(　　)。

(A) $A(B+E)=B$　(B) $(B+E)A=B$　(C) $B(A-E)=A$　(D) $(E-A)B=A$

7. 设 X 服从正态分布 $N(0, 2^2)$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $Y=\frac{X_1^2+\cdots X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots X_{15}^2)}$ 所服从的分布为(　　)。

(A) $\chi^2(15)$　(B) $t(14)$　(C) $F(10, 5)$　(D) $F(1, 1)$

8. 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则(　　)。

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=$________。

10. 某公司每年的工资总额在比上一年增加20%的基础上再追加200万元，若以W_t表示第t年的工资总额(单位百万元)，W_t满足的差分方程为________。

11. $\int\dfrac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$________。

12. 函数$F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\ (x>0)$的单调减少区间________。

13. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正交矩阵，将A以行分块为$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^T$，则方程组$AX=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)^T$的通解为________。

14. 设随机变量X的数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫(Chebyshev)不等式，有$P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant$________。

三、解答题：15～23小题，共94分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分10分)

设$z=f(2x-y,y\sin x)$，其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

16. (本题满分10分)

已知曲线L的方程为$\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}\quad(t\geqslant 0)$

(Ⅰ)讨论L的凹凸性；

(Ⅱ)过点$(-1,0)$引L的切线，求切点(x_0,y_0)，并写出切线的方程；

(Ⅲ)求此切线与L(对应于$x\leqslant x_0$的部分)及x轴所围成的平面图形的面积。

17. (本题满分10分)

设a，b为正常系数，λ为非负常数，微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=be^{-\lambda x}$。

(Ⅰ)求该方程的通解；

(Ⅱ)证明：当$\lambda=0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\dfrac{b}{a}$，当$\lambda>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。

18. (本题满分10分)

设函数$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续，且$f(0)>0$，已知其在$[0,x]$上的平均值等于$f(0)$与$f(x)$的几何平均值，求$f(x)$。

19. (本题满分10分)

求微分方程$y''+5y'+6y=2e^{-x}$的通解。

20. (本题满分11分)

已知4阶方阵$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$均为4维列向量，其$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$

线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解。

21.（本题满分11分）

设A是n阶正定矩阵，E是n阶单位阵，证明$A+E$的行列式大于1。

22.（本题满分11分）

设总体X的分布函数为$F(x)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自此总体的一个子样，若$F(x)$的二阶矩阵存在，$\overline{X}$为子样均值，试证$(X_i-\overline{X})$与$(X_j-\overline{X})$的相关系数

$$\rho=-\frac{1}{n-1},\ i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

23.（本题满分11分）

设总体X服从于正态分布$N(\mu, \sigma^2)\ (\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_{2n}(n\geqslant 2)$，其样本均值为$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$的数学期望$E(Y)$。

最后冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】等价无穷小

【解题分析】由导数与微分的关系$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x_0)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$（当$\Delta x=\mathrm{d}x\to 0$），$\mathrm{d}y$是与$\Delta x$同阶且不等价的无穷小，应选(B)。

2.【考点提示】不定积分的计算

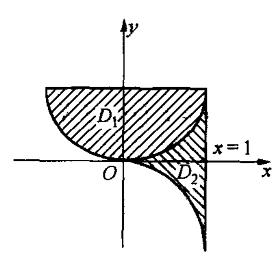
【解题分析】$\int\frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+x)\mathrm{e}^x}{x(1+x\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，设$u=x\mathrm{e}^x$，则上式$=\int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$。应选(D)。

3.【考点提示】级数敛散性的判定

【解题分析】$S_n=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_1}-0=\frac{1}{b_1}$。应选(C)。

4.【考点提示】二重积分



【解题分析】如图：加一条曲线$y=x^3$，将D分为D_1和D_2，

则$\iint\limits_D[x^2+f(xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

而$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

因为f为奇函数，所以$f(-xy)=-f(xy)$，

而D_1，D_2分别对称y轴和x轴，故有$\iint\limits_{D_1}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0, \iint\limits_{D_2}f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

从而原积分$\iint\limits_D[x^2+f(xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\int_{-x^3}^{1}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$。(B)为正确答案。

5.【考点提示】矩阵的可逆性

【解题分析】由行列式性质 $|A^3| = |A|^3 = 0$，可知 A 必不可逆，

但从 $(E-A)(E+A+A^2) = E-A^3 = E$，$(E+A)(E-A+A^2) = E+A^3 = E$，知 $E-A$，$E+A$，$E+A+A^2$，$E-A+A^2$ 均可逆。

当 $A^3 = \mathbf{0}$ 时，A^2 是否为 $\mathbf{0}$ 是不能确定的，

例如：$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有 $A_1^3 = \mathbf{0}$，但 $A_1^2 \neq \mathbf{0}$，$A_2^3 = \mathbf{0}$，且 $A_2^2 = \mathbf{0}$，

故选(C)。

6.【考点提示】矩阵的乘法

【解题分析】由关系 $b_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} a_{kj}b_{ik} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\ (i, j=1, 2, \cdots, n)$，

得 $B = A + BA$，从而得 $B = (E+B)A$。即选(B)。

7.【考点提示】χ^2 分布

【解题分析】$\dfrac{X_1^2 + \cdots X_{10}^2}{4} \sim \chi^2(10)$，$\dfrac{X_{11}^2 + \cdots X_{15}^2}{4} \sim \chi^2(5)$

所以 $\dfrac{\dfrac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{40}}{\dfrac{X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2}{20}} \sim F(10, 5)$，即 $Y = \dfrac{X_1^2 + \cdots X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots X_{15}^2)} \sim F(10, 5)$，(C)是答案。

8.【考点提示】随机变量的概率密度函数

【解题分析】首先可否定选项(A)与(C)，因

$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x = 2 \neq 1$，

$F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 1 + 1 = 2 \neq 1$。

对于选项(B)，若 $f_1(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x < -1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，$f_2(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则对任何

$x \in (-\infty, +\infty)$，$f_1(x)f_2(x) \equiv 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x = 0 \neq 1$，因此也应否定(C)，综上分析，用排除法应选(D)。

进一步分析可知，若令 $X = \max(X_1, X_2)$，而 $X_i \sim f_i(x)$，$i = 1, 2$，则 X 的分布函数 $F(x)$ 恰是 $F_1(x)F_2(x)$。

$F(x) = P\{\max(X_1, X_2) \leqslant x\} = P\{X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x\} = P\{X_1 \leqslant x\}P\{X_2 \leqslant x\} = F_1(x)F_2(x)$

二、填空题

9.【考点提示】根据级数的敛散性来求极限

【解题分析】由级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛知，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n} = 0$，

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛，因此其通项趋于0。

10.【考点提示】差分方程

【解题分析】由题设，第 $t-1$ 年的工资总额为：W_{t-1}，则 $W_t = 1.2W_{t-1} + 2$。

11.【考点提示】不定积分

【解题分析】原式 $=-\int\ln(\sin x)\mathrm{d}(\cot x)=-\cot x\ln(\sin x)+\int\cot x\mathrm{d}[\ln(\sin x)]$

$$=-\cot x\ln(\sin x)+\int\cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\cot x\ln(\sin x)+\int\cot^2x\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x\ln(\sin x)+\int(\csc^2x-1)\mathrm{d}x=-\cot x\ln(\sin x)-\cot x-x+C\text{。}$$

12.【考点提示】导数的应用

【解题分析】$F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$，所以 $0<x<\frac{1}{4}$。即单调区间为 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$。

13.【考点提示】方程组的通解

【解题分析】因 A 为正交矩阵，故 $A^{-1}=A^T$，而方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解为：

$$X=A^{-1}\boldsymbol{b}=(\alpha_1^T\quad\alpha_2^T\quad\cdots\quad\alpha_n^T)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{\alpha}_i^T\text{。}$$

14.【考点提示】切比雪夫不等式

【解题分析】依切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$，有 $P\{|X-\mu|\geqslant3\sigma\}\leqslant\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}$。

三、解答题

15.【考点提示】复合函数的偏导数

【解题分析】这是求带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数，先求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

由复合函数求导法得$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\frac{\partial}{\partial x}(2x-y)+f'_2\frac{\partial}{\partial x}(y\sin x)=2f'_1+y\cos xf'_2$，

则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2f'_1+y\cos xf'_2)$

$$=2\left(f''_{11}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f''_{12}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right)+\cos xf'_2+\left(f''_{21}\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)+f''_{22}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right)y\cos x$$

$$=2(-f''_{11}+\sin xf''_{12})+\cos xf'_2+(-f''_{21}+\sin xf''_{22})y\cos x$$

$$=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+y\sin x\cos xf''_{22}+\cos xf'_2\text{。}$$

16.【考点提示】切线方程、平面图形的面积

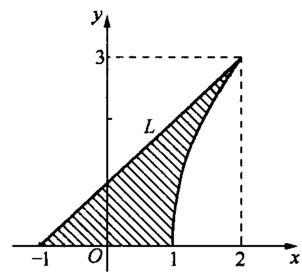
【解题分析】（Ⅰ）先求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. 由已知 $x=t^2+1\Rightarrow t=\sqrt{x-1}\,(x\geqslant1)$，

代入 y 得 $y=4\sqrt{x-1}-x+1$，于是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}-1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}<0\,(x>1)$，

所以曲线 L 是凸的。

（Ⅱ）设 L 上切点 $(x_0,\ y_0)$ 处的切线方程是 $y-y_0=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(x-x_0)$。

令 $x=-1$，$y=0$，则有 $-4\sqrt{x_0-1}+x_0-1=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0)$。



再令 $t_0=\sqrt{x_0-1}$，得 $-4t_0+t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(-2-t_0^2)$，

即 $t_0^2+t_0-2=0$。

解得 $t_0=1$，$t_0=-2$(不合题意)，所以切点是(2，3)，相应的切线方程是

$$y=3+(x-2)，即 y=x+1。$$

(Ⅲ) 切点为$(x_0,\ y_0)$的切线与 L 及 x 轴所围成的平面图形如右图所示，则所求平面图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3-\int_1^2 y(x)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{2}-\int_0^1(4t-t^2)\cdot 2t\mathrm{d}t=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{4}\right)=\frac{7}{3}。$$

17. **【考点提示】**微分方程的通解

【解题分析】(Ⅰ) 通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int a\mathrm{d}x}\left(\int b\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{\int a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{-ax}\left(b\int \mathrm{e}^{(a-\lambda)x}\mathrm{d}x+c\right)$

$$=\begin{cases} c\mathrm{e}^{-ax}+\dfrac{b}{a-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} & \lambda\neq a \\ (bx+c)\mathrm{e}^{-ax} & \lambda=a。\end{cases}$$

(Ⅱ) 当 $\lambda=0$ 时，$y=c\mathrm{e}^{-ax}+\frac{b}{a}$，所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(c\mathrm{e}^{-ax}+\frac{b}{a}\right)=\frac{b}{a}$。

当 $x>0$ 且 $\lambda\neq a$ 时，$y(x)=c\mathrm{e}^{-ax}+\frac{b}{a-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(c\mathrm{e}^{-ax}+\frac{b}{a-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)=0$，

当 $x>0$ 且 $\lambda=a$ 时，$y(x)=(bx+c)\mathrm{e}^{-ax}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(bx+c)\mathrm{e}^{-ax}=0$。

综上有，当 $\lambda>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。

18. **【考点提示】**平均值的相关计算

【解题分析】由题意得 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sqrt{f(0)f(x)}$，令 $a=\sqrt{f(0)}$，

有 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=ax\sqrt{f(x)}$，两边求导，得 $f(x)=a\sqrt{f(x)}+ax\cdot\frac{1\,f'(x)}{2\,f(x)}$，

即 $f'(x)+\frac{2}{x}f(x)=\frac{2}{ax}[f(x)]^{\frac{3}{2}}$。令 $z=[f(x)]^{-\frac{1}{2}}$，得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{ax}$，

可求得 $z=Cx+\frac{1}{a}$，即 $f(x)=\left(Cx+\frac{1}{a}\right)^{-2}=\frac{f(0)}{(1+C\sqrt{f(0)}x)^2}(x\geqslant 0)$。

19. **【考点提示】**微分方程的通解

【解题分析】所给微分方程的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0$，
故特征根为 -2 和 -3。于是，对应齐次微分方程的通解为 $\bar{y}(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}$，其中 C_1，C_2 为任意常数。设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x)=A\mathrm{e}^{-x}$，将 $y^*(x)$代入原方程，可得 $A=1$，由此得所给非齐次微分方程的一个特解是 $y^*(x)=\mathrm{e}^{-x}$。
从而，所给微分方程的通解为 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{-x}$。

20. **【考点提示】**线性方程组的通解

【解题分析】由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关及 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 知，向量组的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)=3$，即矩阵 A 的秩为3，因此 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含一个向量，那么由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

知，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系是$(1,\ -2,\ 1,\ 0)^T$。

再由$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$知，$(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解。

故 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是 $k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数。

21. **【考点提示】**正定矩阵的相关计算

【解题分析】因为 A 是正定阵，故存在正交矩阵 Q，使

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\lambda_i$ 是 A 的特征值。

因此 $Q^T(A+E)Q=Q^TAQ+Q^TQ=\Lambda+E$，

两端取行列式得$|A+E|=|Q^T||A+E||Q|=|Q^T(A+E)Q|=|\Lambda+E|=\Pi(\lambda_i+1)$。

从而$|A+E|>1$。

22. **【考点提示】**分布函数的计算

【解题分析】由于二阶矩阵存在，不妨设 $E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\sigma^2$，

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X_i-\overline{X},\ X_j-\overline{X})}{D(X_i-\overline{X})}=\frac{E[(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})]}{D(X_i-\overline{X})},\ i\neq j$$

$$D(X_i-\overline{X})=D\Big(X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)=\frac{(n-1)^2}{n^2}D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}D(X_i)$$

$$=\frac{(n-1)^2+n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$E[(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})]=E(X_iX_j)-E(X_i\overline{X})-E(X_j\overline{X})+E(\overline{X}^2),$$

$$=\mu^2-\frac{2}{n}E\Big(X_i\sum_{j=1}^{n}X_j\Big)+E(\overline{X}^2)-[E(\overline{X})]^2+[E(\overline{X})]^2,$$

$$=\mu^2-\frac{2}{n}E\Big(X_i\sum_{j=1}^{n}X_j\Big)+\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}=2\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2}{n}\Big[E(X_i^2)+\sum_{j\neq i}E(X_i)E(X_j)\Big]$$

$$=2\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2}{n}[\mu^2+\sigma^2+(n-1)\mu^2]=-\frac{\sigma^2}{n}，因而\rho=\frac{-\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{n-1}{n}\sigma^2}=-\frac{1}{n-1}。$$

23. **【考点提示】**随机样本的正态分布

【解题分析】设 $Z_i=X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$，为从总体 Z 中取出的样本容量为 n 的样本。

则 $E(Z_i)=E(X_i)+E(X_{n+i})=\mu+\mu=2\mu$

$D(Z_i)=D(X_i+X_{n+i})=D(X_i)+D(X_{n+i})$（$X_i$ 与 X_{n+i}相互独立）$=\sigma^2+\sigma^2=2\sigma^2$

$\therefore\quad Z\sim N(2\mu,\ 2\sigma^2)$，

由样本与总体同分布，则 $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$，样本方差为$\frac{1}{n-1}Y=S^2$

$\because\quad S^2$ 是总体 Z 的方差的无偏估计量

$\therefore\quad E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=\frac{1}{n-1}E(Y)=2\sigma^2$

$\therefore\quad E(Y)=2(n-1)\sigma^2$。

最后冲刺试卷二

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 已知函数$f(x)$在区间$(1-\delta, 1+\delta)$内具有二阶导数，$f''(x)<0$，且$f(1)=f'(1)=1$，则(　　)。

   (A) 在$(1-\delta, 1)$和$(1, 1+\delta)$内均有$f(x)<x$

   (B) 在$(1-\delta, 1)$和$(1, 1+\delta)$内均有$f(x)>x$

   (C) 在$(1-\delta, 1)$内$f(x)<x$，在$(1, 1+\delta)$内$f(x)>x$

   (D) 在$(1-\delta, 1)$内$f(x)>x$，在$(1, 1+\delta)$内$f(x)<x$

2. 已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则当n为大于2的正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$为(　　)。

   (A) $n!\ [f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　　(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n!\ [f(x)]^{2n}$

3. 设$f(x)$在$x=0$的邻域内有定义，$f(0)=1$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-2xf(x)}{x^2}=0$，则$f(x)$在$x=0$处(　　)。

   (A) 可导，且$f'(0)=0$　　(B) 可导，且$f'(0)=-1$

   (C) 可导，且$f'(0)=2$　　(D) 不可导

4. 当$x\to 0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则(　　)。

   (A) $a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$

   (C) $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$

5. 如果向量$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则(　　)。

   (A) 存在一组不全为零的数k_1，k_2，…，k_s使$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$成立

   (B) 存在一组全为零的数k_1，k_2，…，k_s使$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$成立

   (C) 存在一组数k_1，k_2，…，k_s使$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$成立

   (D) 对$\boldsymbol{\beta}$的线性表达式惟一

6. 设λ_1，λ_2是n阶矩阵A的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$分别是A的属于λ_1，λ_2的特征向量，则(　　)。

   (A) $\lambda_1=\lambda_2$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$必成比例　　(B) $\lambda_1=\lambda_2$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$必不成比例

   (C) $\lambda_1\neq\lambda_2$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$必成比例　　(D) $\lambda_1\neq\lambda_2$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$必不成比例

7. 已知$0<P(B)<1$，且$P[(A_1+A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$，则下列选项必然成立的是(　　)。

   (A) $P[(A_1+A_2)\mid \overline{B}]=P(A_1\mid \overline{B})+P(A_2\mid \overline{B})$

   (B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$

8. 设随机变量 X 与 Y 服从正态分布，$X\sim N(\mu,\ 4^2)$，$Y\sim N(\mu,\ 5^2)$，记 $p_1=P\{x\leqslant\mu-4\}$，$p_2=\{Y\geqslant\mu+5\}$，则(　　)。

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$　　(B) 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$　　(D) 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________。

10. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,\ y)$ 在点 $(1,\ 0,\ -1)$ 处的全微分 $dz=$ ________。

11. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$，则 $a=$ ________。

12. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$ 的和函数为________。

13. 设 3 阶方阵 $A=(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2)$，$B=(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$ 都是 3 维列向量，且 $|A|=3$，$|B|=4$，则 $|5A-2B|=$ ________。

14. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立，则 $X\sim N(1,\ 1)$，$Y\sim N(1,\ 4)$，又 $P\{aX+bY\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$ 则 a 与 b 应满足关系式________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解。

16. (本题满分 10 分)

假设生产和销售某产品的收益是 R 产量的 q 二次函数。经统计得知：当产量 q 分别为 0，2，4 时，总收入 R 分别为 0，6，8 万元，试确定 R 与 q 之间的函数关系。

17. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\dfrac{g(x)}{1+x}-\dfrac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$。

18. (本题满分 10 分)

如果 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$。

19. (本题满分 10 分)

设 $z=f(2x-y,\ y\sin x)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

20. (本题满分 11 分)

设 A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $A_{11}\neq 0$，证明：方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 有无穷多解的充要条件中 $\boldsymbol{b}$ 为 $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

21. (本题满分 11 分)

已知 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$ 是实对称矩阵 A 的三个特征值，且对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)^T$，求 A 对应于 $\lambda_1=6$ 的特征向量及矩阵 A。

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 D：$0<x<1$，$|y|=x$ 内服从均均分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$。

23. (本题满分 11 分)

设 X_1，X_2，…，$X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，

记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$，求：

(Ⅰ) Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

(Ⅱ) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$。

最后冲刺试卷二参考答案与解析

一、选择题

1. **【考点提示】**函数单调性、函数的极值

【解题分析】设 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-1$，$\varphi''(x)=f''(x)$，

由 $f''(x)<0$ 得 $\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减少，

则当 $x<1$ 时，$\varphi'(x)>\varphi'(1)=f'(1)-1=0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<\varphi'(1)=0$；

则 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，

当 $x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ 时 $\varphi(x)<\varphi(1)=f(1)-1=0$，即 $f(x)<x$，应选(A)。

2. **【考点提示】**函数的高阶导数

【解题分析】为方便记 $y=f(x)$，由 $y'=y^2$，逐次求导得

$y''=2yy'=2y^3$，$y'''=3!\,y^2y'=3!\,y^4$，…，归纳可证 $y^{(n)}=n!\,y^{n+1}$，应选(A)。

3. **【考点提示】**函数的极限

【解题分析】
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-2xf(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-2x-2x[f(x)-f(0)]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}-2\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{1+2x}-2}{2x}=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-1$，选(B)。

4. **【考点提示】**等价无穷小

【解题分析】
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-\frac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1,$$

则 $a^3=-6b$，故选项(B)，(C)错误。