Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学必做客观题1800题精析（理工类）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点

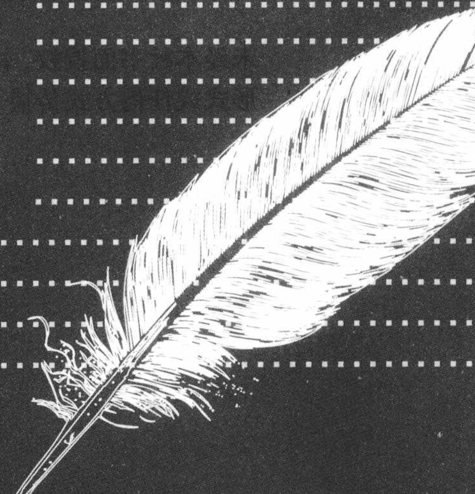
赠送MP3盘
考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学必做客观题1800题精析（理工类）



清华大学 王 欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童 武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

赠送MP3盘

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学必做客观题1800题精析:理工类/王欢,王德军,童武主编.—北京:中国石化出版社,2012.3
ISBN 978-7-5114-1439-7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第022110号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 8.5印张 201千字
2012年3月第1版 2012年3月第1次印刷
定价:20.00元(赠送MP3盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的最新考试大纲，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限与连续

一、选择题

1. 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

【答案】A

【解析】由函数$f(x)$的表达式知，它在实数轴上除点$x=0$，$x=1$及$x=2$外处处有定义，在它的定义域上有

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right|=\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\cdot\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}$$

由此可见$f(x)$在区间$(-1,0)$内有界，而在任何以$x=1$或$x=2$为端点的开区间内无界.故应选(A).

2. 设函数$f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则$f(x)$是(　　).

(A) 偶函数　　(B) 无界函数　　(C) 周期函数　　(D) 单调函数

【答案】B

【解析】由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan x e^{\sin x}=\infty$，故$f(x)$无界. 或考察$f(x)$在$x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$的函数值，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=+\infty$，可见$f(x)$是无界函数. 故应选(B).

3. 设$\{x_n\}$是无界数列，则下列结论中正确的是(　　).

(A) 若$\{y_n\}$是有界数列，则$\{x_n-y_n\}$一定是无界数列

(B) 若$\{y_n\}$是无界数列，则$\{x_ny_n\}$一定是无界数列

(C) 若$\{y_n\}$是有界数列，则$\{x_ny_n\}$一定是无界数列

(D) 若$\{y_n\}$是无界数列，则$\{x_n+y_n\}$必是无界数列

【答案】A

【解析】①$x_n=\begin{cases}n & 当 n 为偶数时\\ 0 & n 为奇数时\end{cases}$　　$y_n=\begin{cases}0 & 当 n 为偶数时\\ n & n 为奇数时\end{cases}$

则$\{x_n\}$、$\{y_n\}$都无界. 但$x_n\cdot y_n=0$，$\{x_ny_n\}$有界. 故(B)不正确. ②若设$y_n=0$，x_n如①，则$\{y_n\}$有界，$x_n\cdot y_n=0$，$\{x_ny_n\}$有界. 故(C)不正确. ③$x_n=n$，$y_n=-n$，$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都无界，但$x_n+y_n=0$，$\{x_n+y_n\}$有界，故(D)不正确.

4. 下列各式中正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

【答案】A

【解析】由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{1}{1+t}}=e^0=1$，应选(A)．这里应注意$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq -e$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq e$.

5. 命题“①$f(x)$，$g(x)$在x_0点的某邻域内都无界，则$f(x)$，$g(x)$在x_0点的该邻域内一定无界；②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\infty$；③$f(x)$及$g(x)$在$x_0$点的某邻域内均有界，则$f(x)$，$g(x)$在$x_0$的该邻域内一定有界；④$f(x)$，$g(x)$是当$x\to x_0$的无穷小量，则$x\to x_0$时$f(x)$和$g(x)$中至少有一个是无穷小量.”中正确的是(　　).

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ③④　　(D) ①④

【答案】B

【解析】设$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数}\\ 1/x, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}1/x, & x\text{ 为有理数，且 }x\neq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则$f(x)g(x)=0$．当$x\to 0$时，$f(x)g(x)\to 0$．但$x\to 0$时，$f(x)$及$g(x)$都不是无穷小，命题④不正确；且本例中$f(x)$及$g(x)$在$x=0$的任何邻域内都无界，但$f(x)g(x)=0$，在与前相同的邻域内有界，即命题①不正确.

6. 当$x\to 1$时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限(　　).

(A) 等于2　　(B) 等于0　　(C) 为∞　　(D) 不存在但不为∞

【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，当$x\to 1$时函数没有极限，也不是$\infty$，故应选(D).

7. 设$f(x)=2^x+3^x-2$，则当$x\to 0$时(　　).

(A) $f(x)$是x等价无穷小　　(B) $f(x)$与x是同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$比x更高阶的无穷小　　(D) $f(x)$是比x较低阶的无穷小

【答案】B

【解析】因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3,$$

且$\ln 2+\ln 3\neq 1$，所以应选(B).

8. 当$x\to 0$时，下列四个无穷小量中，(　　)是比其他三个更高阶的无穷小量.

(A) x^2　　(B) $1-\cos x$　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D) $x-\tan x$

【答案】D

【解析】是于$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，

故x^2，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$是同阶无穷小，可见应选(D).

9. 设$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$，当$x\to0$时，$\ln\cos x^2$是比$x^nf(x)$高阶的无穷小量，而$x^nf(x)$是比$e^{\sin^2x}-1$高阶的无穷小，则正整数$n$等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【答案】A

【解析】由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$知，当$x\to0$时，$f(x)\sim-x^2$，于是$x^nf(x)\sim-x^{n+2}$.

又当$x\to0$时，$\ln\cos x^2=\ln[1+(\cos x^2-1)]\sim\cos x^2-1\sim-\frac{1}{2}x^4$.

再根据题设有：$2<n+2<4$. 可见$n=1$，故应选(A).

10. 设对任意的x，总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

【答案】D

【解析】用排除法.

令
$$\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2},\ f(x)=1,\ g(x)=1+\frac{1}{x^2}$$
显然
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$
且
$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$$
此时
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$
故(A)和(C)都不正确.

为排除(B)，再令$\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$，显然$\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$满足题设全部条件，但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，故应选(D).

11. 若$\lim\limits_{x\to0}\frac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}=0$，则(　　).

(A) $a=b$，$b\neq0$，c、d不同时为0　　(B) $a\neq b$，$b=0$，c、d为任意常数

(C) $c=0$，$d\neq0$，a、b为任意常数　　(D) $c\neq0$，$d=0$，a、b为任意常数

【答案】A

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{ae^{\sin x}\cos x+b(1-\cos x)}{c\sec^2x+d\sin x}$

当$a\neq0$时，原式$\neq0$，故选A.

12. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c=\infty$，则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$对任意n成立　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

【答案】D

【解析】(A)、(B)显然不对，因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当n充分大时”的情况，不可能得出“对任意n成立”的性质.

(C)也明显不对，因为“无穷小 · 无穷大”是未定型，极限可能存在也可能不存在.
故应选(D).

13. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

【答案】B

【解析】排除法. 由于当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to0$ 可能是无穷振荡的，$f'(x)$ 可能没有极限，如 $f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在. 故(A)不对；例如 $f(x)=\sin x\to0(x\to0^+)$，但 $f'(x)=\cos x\to1\neq0$，故(C)、(D)不对. 应选(B).

14. 下列函数在其定义域内连续的是(　　).

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$　　(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

【答案】A

【解析】由基本初等函数的连续性及连续函数的四则运算法则知 $f(x)=\ln x+\sin x$ 在其定义域 $0<x<+\infty$ 内连续，故应选(A).

15. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$(　　).

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在　　(D) 有可去间断点 $x=0$

【答案】D

【解析】由 $f(x)$ 是奇函数有 $f(0)=0$. 又因为 $f'(0)$ 存在，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}g(x)$$

又因为 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=f'(0)$，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.
故应选(D).

16. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

【答案】B

【解析】易计算得 $f(x)=\begin{cases}1+x & |x|<1\\ \frac{1+x}{2} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，讨论即知

由题设得极限为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

可知 $x=-1$，$x=1$ 为函数的分段点，作为函数图形可知 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点，$x=-1$ 为 $f(x)$ 的连续点，因此应选(B).

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则(　　).

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\underline{\underline{\frac{1}{x}=y}}\lim\limits_{x\to\infty}f(y)=a$，

从而，当 $a=0=g(0)$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，当 $a\neq 0$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 故应选(D).

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2}{x}=$________.

【答案】$\dfrac{6}{5}$

【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{6}{5}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=$________.

【答案】e

【解析】

[解法一] 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)^x$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{2x^2}}{\dfrac{1}{x}}=1,$$

故原式 = e.

[解法二]设 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$时，$u\to 0$，于是

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}$$

而由洛必达法则，得

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-\sin u}{\sin u+\cos u}=1,$$

故原式 = e.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=$________，其中 n 为给定的自然数.

【答案】$e^{\frac{n+1}{2}}$

【解析】此极限是 1^∞ 型未定式.

[解法一]原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{n}\right\}$$

其中大括号内的极限是$\frac{0}{0}$型未定式，因此由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

于是原式 $=e^{\frac{n+1}{2}}$

[解法二] 由于$\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})^{nx}}{2}=\left(1+\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

又因 $$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{nx}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to 0}\frac{e^{nx}-1}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}(n+1)$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}(n+1)}$

4. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________，$b=$________.

【答案】1，-4

【解析】不难得出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\begin{cases}0, & a\neq 1,\text{ 任何 } b\\ 1-b, & a=1,\text{ 任何 } b\end{cases}$$

从而，若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则必须且只需 $a=1$，$1-b=5$，即 $a=1$，$b=-4$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=$________.

【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解析】

［解法一］$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ \sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\dfrac{1}{4}\sin 4x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\frac{4}{3}$$

［解法二］$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ \sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x(1-\sin^2 x)}{x^4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}+1$$

$$=1+2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=1+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{4}{3}$$

6. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(2x)}=\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$________.

【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】

$\because\ \lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}=\ln\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}=\ln e^2=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(2x)}=2$，$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{f(2x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{f(u)}=2$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{4}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{ax^2-x+2}+x+1}{\sqrt{x^2-\cos x}}=3$，则 $a=$________.

【答案】16

【解析】原式$\xlongequal{\text{令}\ x=-t}\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{\sqrt{at^2+t+2}-t+1}{\sqrt{t^2-\cos t}}=\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{\sqrt{a+1/t+2/t^2}-1+1/t}{\sqrt{1-(\cos t)/t}}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{1}=3$

故 $a=16$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=$________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}3^x\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}$$

9. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

【答案】2

【解析】原式$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2$

10. 已知当$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，则常数$a=$________.

【答案】$-\frac{3}{2}$

【解析】由$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}ax^2$，$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1,$$

可得$a=-\frac{3}{2}$

11. 设$a\neq\frac{1}{2}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

【答案】$\frac{1}{1-2a}$

【解析】由于$\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]$，

利用等价无穷小代换，有

$$\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$$

于是　　原式$\lim\limits_{x\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$________.

【答案】$4e^{-1}$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{(n+n)}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]\right\}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=4e^{-1}$$

第二章 导数与微分

一、选择题

1. 函数$f(x)=\cos\sqrt[5]{x^4}$在点$x=0$处(　　).

(A) 不可导且$f'(0)\neq\infty$　　(B) 不可导且$f'(0)=\infty$

(C) 可导且$f'(0)=0$　　(D) 可导且$f'(0)=\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt[5]{x^4}-1}{x}=0$，即$f'(0)=0$.

2. 设$f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数n为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】C

【解析】因$3x^3$处处任意阶可导，只需考查$x^2|x|\triangleq\varphi(x)$，它是分段函数，$x=0$是连接点.

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 0\\ x^3, & x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^3, & x<0\\ 3x^3, & x>0\end{cases}$$

又$\varphi'+(0)=(x^3)=(x^3)'_+|_{x=0}=0$，$\varphi'_-(0)=(-x^3)'_-|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0$

即 $\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x\leqslant 0\\ 3x^3, & x\geqslant 0\end{cases}$

同理可得 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0,\\ 6x, & x>0,\end{cases}$　$\varphi''(0)=0$

即 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant 0,\\ 6x, & x\geqslant 0\end{cases}=6|x|$

因$y=|x|$在$x=0$不可导$\Rightarrow\varphi'''(0)$不存在，应选(C).

3. 由$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$所确定的函数$y=y(x)$的图形在$(0,1)$内(　　).

(A) 单调下降且向下凹　　(B) 单调下降且向上凹

(C) 单调上升且向下凹　　(D) 单调上升且向上凹

【答案】B

【解析】当$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$x\in(0,1)$. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t<0$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\tan t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\tan t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\sec^2 t\cdot\frac{1}{3\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}>0.$$

故选(B).

4. 已知$f(x)$在$(-\delta,\delta)$内具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f''(x)>0$，则(　　).

(A) 在$(-\delta,0)$内$f(x)>x$，在$(0,\delta)$内$f(x)<x$

(B) 在$(-\delta,0)$内$f(x)<x$，在$(0,\delta)$内$f(x)>x$

(C) 在$(-\delta,\delta)$内$f(x)<x$

(D) 在$(-\delta,\delta)$内$f(x)>x$

【答案】D

【解析】由题设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$知，$f(0)=0$，$f'(0)=1$.

令$F(x)=f(x)-x$，则$F'(x)=f'(x)-1$，$F''(x)=f''(x)>0$.

于是$F'(x)$在$(-\delta,\delta)$内单调增加，且$F'(0)=0$. 当$x\in(-\delta,0)$时，$F'(x)<F'(0)=0$；当$x\in(0,\delta)$时，$F'(x)>F'(0)=0$. 可见$F(x)$在点$x=0$处取极小值，也即最小值，从而有$F(x)>F(0)=0$，即$f(x)>x$，$x\in(-\delta,\delta)$，故应选(D).

5. 已知函数$f(x)$在区间$(1-\delta,1+\delta)$内具有二阶导数，$f''(x)<0$，且$f(1)=f'(1)=1$，则(　　).

(A) 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有$f(x)<x$

(B) 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有$f(x)>x$

(C) 在$(1-\delta,1)$内$f(x)<x$，在$(1,1+\delta)$内$f(x)>x$

(D) 在$(1-\delta,1)$内$f(x)>x$，在$(1,1+\delta)$内$f(x)<x$

【答案】A

【解析】设　$\varphi(x)=f(x)-x$，则$\varphi'(x)=f'(x)-f$，$\varphi''(x)=f''(x)$.

由$f''(x)<0$得$\varphi''(x)<0$，故$\varphi'(x)$单调减少，则当$x<1$时，

$\varphi'(x)>\varphi'(1)=f'(1)-1=0$，当$x>1$，时$\varphi'(x)<\varphi'(1)=0$. 则$\varphi(x)$在$x=1$处取得极大值，当$x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$时$\varphi(x)<\varphi(1)=f(1)-1=0$，即$f(x)<x$.

6. 设$f(x)$在$x=0$处满足$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$，$f^{(n+1)}(0)>0$，则(　　).

(A) 当n为偶数时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

(B) 当n为偶数时，$x=0$是$f(x)$的极小值点

(C) 当n为奇数时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

(D) 当n为奇数时，$x=0$是$f(x)$的极小值点

【答案】D

【解析】因为$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x)$$

$$=f(0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x)$$

$$(由题设f'(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0)$$

所以当$|x|$很小时，$f(x)-f(0)$与$\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$同号. 而$f^{(n+1)}(0)>0$，当$n$为偶数时，$\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$在$x=0$点两侧异号，$f(0)$不是极值点；当$n$为奇数时，在