

机械工业中等专业教育 机械制造专业系列教材

黄英娴 主编

应用 数学基础

修 订 版
东 南 大 学 出 版 社



51.9/82/-02



机械工业中等专业教育机械制造专业系列教材

应用数学基础

图书记录(913)目録照查并图

(修订版)



黄英娴 邱顺大
张永仙 张绪绪
江儒根

编

主审



东南大学出版社

内 容 提 要

本书是根据1994年3月机械工业中专教育研究会机制专业教材编审委员会审定的计划和大纲编写而成,是机械工业中等专业教育机制专业系列教材之一。

全书共16章,内容包括代数、三角、平面解析几何、一元微积分、概率初步、行列式与矩阵初步、微分方程、级数和拉氏变换。

本书是中专机电类专业的数学教学用书,也可作为工科中专、职工中专有关专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/黄英娴主编. —修订版. —南京:东南大学出版社,1999.8 重印

机械工业中等专业教育 机械制造专业系列教材

ISBN 7-81050-039-2

I. 应… II. 黄… III. 应用数学-中等专业教育-教材
IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 20744 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编 210018)

出版人:洪焕兴

江苏省新华书店经销

南京航空航天大学飞达印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 28.75 字数 717 千
1995 年 7 月第 1 版 1999 年 8 月修订版第 4 次印刷
印数:16001~20000 册 定价:35.00 元

中国机械工业教育协会高职与中专教育分会
机械制造专业教材编审委员会

主任委员	程益良		
副主任委员	王希平		
委 员	刘际远	李铁尧	陈行毅
	高文征	聂建武	黄剑滕
	司徒渝	翟 轰	储克森
	苏群荣		

修订版说明

由中国机械工业教育协会高职与中专教育分会组织编写的这套由 18 门课程组成的中等专业教育机械制造专业教材,出版发行已 4 年多时间了。这套专业教材得到行业内外不少学校的赏识,使用后反响不凡。为使这套教材更能适应中专教育的改革,适应培养面向 21 世纪中等专业人才的需要,编委会征求了使用学校的意见后召开了 18 本教材主编研讨会,拟订了修订本套教材的指导思想和修订原则,并用一年多的时间对本套教材进行了修订。修订后的教材除保留原有特点外更能体现职业教育的特色,且面向 21 世纪增添了新技术内容,采用最新国标,突出应用,多举实例,尽力做到图文并茂,便于教学与自学,并注意到对学生素质的全面培养。

修订后的教材适用于招收初中毕业生四年制机制专业,也可供职业中专、职工中专、函授中专机制专业使用。其中语文、应用数学、物理通用于机电类专业,机械制图、工程力学、工程材料与金属热加工、机械设计基础、电工学与工业电子学、计算机应用基础通用于机类专业。

在修订过程中得到了咸阳机器制造学校、福建高级工业专门学校、四川省机械工业学校、上海市机电工业学校、常州机械学校、西安仪表工业学校、芜湖机械学校、东风汽车公司汽车工业学校、靖江市工业学校、廊坊市工业学校、湖南省机械工业学校、邯郸市工业学校、嘉兴市中等专业学校、成都市工业学校、浙江机械工业学校、西安机电学校、辽宁仪器仪表学校、江苏省无锡机械制造学校和东南大学出版社等单位的大力支持,谨致诚挚的谢意。衷心希望广大教师和学生在使用中提出宝贵意见,以便再次修订时改进,使之日臻完善。

中国机械工业教育协会高职与中专教育分会
机械制造专业教材编审委员会

1999 年 5 月

出版说明

这套由 18 门课程组成的中等专业学校机械制造专业教材,是由机械工业中专教育研究会组织编写的。为适应社会主义市场经济和机械工业发展的需求,机械工业中专教育必须改革。机械工业部自 1986 年起,组织了机械制造专业的教改试点工作,确立培养生产现场工艺实施型人才为专业培养目标,调整知识结构,重视工程实践能力的培养,加强素质教育,为此,必须改变课程体系,编写新的教学用书。

1993 年底,机械工业中专教育研究会确定成立中专机制专业教材编审委员会,组织行业学校拟订了机械工业中专机制专业实施性教学计划和教学大纲(已出版合订本),并联合编写语文、英语、应用数学基础、物理、机械制图、工程材料与金属热加工、工程力学、机械设计基础、电工学与工业电子学、计算机应用基础、测量技术、液压传动、机械加工基础、机械加工工艺、机械加工工艺装备、金属切削机床、机床电气控制、机械工业企业车间管理等 18 门课程的教材。经过广大编审人员的共同努力,现在,这套教材由东南大学出版社正式出版。

这套教材相对于过去的课程体系、课程大纲、课程内容有较大幅度的变化。其主要特点是:这 18 门课程相互有机结合,形成整体优化的教学体系,它不强调一门课程自身体系的完整性、学科性,对邻近学科适当综合,例如,把原公差配合与技术测量中公差与配合标准插入机械制图和机械设计基础课程的相关部分,而把测量技术单独设课并加强实验综合练习;重视各门课程的相互联系和分工,避免内容重复、交叉和脱离实际,例如工程力学与物理有关力学内容彼此照应;把专业课中的常规内容组织为一门《机械加工基础》课,提前在二年级教学实习中现场讲授;各门课程围绕以培养能力为基础加强了实践环节,如增设实验专用周等;普通课重在学生职业素质培养,注重专业的针对性和实用性。18 门课的学时均有较大的削减。

这套教材适用于招收初中毕业生机制专业四年制的“3+1”模式和三年制学生,也可供职业中专、职工中专、函授中专使用。其中语文、英语、应用数学基础、物理通用于机电类专业;机械制图、工程材料与金属热加工、工程力学、机械设计基础、电工学与工业电子学、计算机应用基础通用于机械类专业。

这套教材由机械行业 16 所中专校的 70 余名教师参加编写,由主审和编委会对文稿和图稿作了认真审校。在编审过程中,得到了咸阳机器制造学校、福建机电学校、四川省机械工业学校、上海市机电工业学校、常州机械学校、西安仪表工业学校、芜湖机械学校、湖北汽车工业学院中专部、靖江市工业学校、廊坊市工业学校、湖南省机械工业学校、邯郸市工业学校、嘉兴市中等专业学校、成都市工业学校、浙江机械工业学校、陕西第一工业学

修 订 版 前 言

《应用数学基础》教材自 1995 年 7 月由东南大学出版社出版发行以来,已重印 3 次,经全国机械及其他行业部分中等专业学校、职工中专、职业高中等学校使用 4 年来的教学实践表明,本教材深受广大老师和学生的好评,同时,也提出了宝贵的意见和修订要求。为适应科学技术的迅猛发展和制造技术工艺的快速更新,为满足学校使用要求,编委会于 1998 年 10 月召开了系列教材主编会议,决定修订再版。根据会议确定的修订原则和规划,在广泛征求意见的基础上,我们对《应用数学基础》教材作了修订,它与 1995 年 7 月版相比,主要有以下几个特点:

1. 在保持原教材的体例题、结构不变的前提下,对某些章节内容、顺序作适当调整,使教材让教师好用,让学生好学。

2. 坚持“必需、够用”的原则,精减内容。如删去“5.1 两个重要公式”、“2.3.2 查对数表”、“11.2.2 第二类换元积分法”等,简化了一些数学概念的叙述,如大大简化了连续型随机变量密度函数定义的引入,降低了有关技巧性例题、习题的难度,增加了“解斜三角形”。

3. 遵守规范,细致地规范了个别数学语言的表述。

4. 提高应用意识,变动了某些例、习题,更利于培养学生简单的实际应用能力。

本次修订工作由咸阳机器制造学校黄英嫻老师任主编,张绪绪老师任副主编,福建高工学校江儒根老师主审,咸阳机器制造学校段瑞老师、欧向阳老师协编。

由于编者水平有限,对修订版的不当之处,敬请赐教。

编 者

1999 年 3 月

前 言

《应用数学基础》是机械工业中等专业教育机制专业系列教材之一。

机械工业中等专业教育研究会机制专业教材编审委员会根据中专学校机制专业培养目标和毕业生主要从事的工作,拟定了实施性教学计划。该计划规定本门课程的教学任务是:使学生学习和掌握机电类专业必需的数学基础理论知识和基本运算技能,为学习后续课程及从事技术工作奠定良好的基础。教学时数为 224 学时。

本课程是根据工科中专的培养目标,作为一门重要的基础课和工具课而开设的,与原设置的中专《数学》相比,有以下几个特点:

- (1) 保证基础,内容广泛实用,注意但不强调数学的学科性和系统性;
- (2) 重视数学概念的本质表述,有关定理、结论、方法的给出与叙述力求通俗易懂、直观,避免繁琐推证;
- (3) 教学内容注重实际应用,例题、习题选择有利于学生对从实际问题提炼数学模型的能力的培养;
- (4) 使用法定计量单位。

本教材编写的指导思想是:适当降低理论要求,重视技能训练,强化能力培养,提高应用意识。在内容取舍上,保留了作为车间工艺技术人员必不可少的初等数学、高等数学及应用数学等有关内容,坚持“必需”、“够用”,强化以应用为目的、理论联系实际的原则。在编写体例上,遵循数学体系和教学规律,注意与初中数学知识的衔接,由浅入深、循序渐进;在能力训练方面,着重计算能力和运用能力的提高,选例典型、恰当,习题难易适度,每章安排有一定数量的标准化练习题。通过本教材的教学,力图使学生达到以下要求:

- (1) 掌握技术员所必需的应用数学的基础知识;
- (2) 具有正确、熟练的基本运算能力及一定的逻辑思维能力;
- (3) 提高运用数学方法分析解决专业技术中常见数学问题的能力。

本书由咸阳机器制造学校黄英娴老师主编;常州机械学校邱顺大老师、四川省机械工业学校张永仙老师、咸阳机器制造学校张绪绪老师协编;福建机电学校江儒根老师主审。编写分工:黄英娴撰写第 3、8、13、14 章,张绪绪撰写第 1、2、16 章,邱顺大撰写第 4、5、6、7、15 章,张永仙撰写第 9、10、11、12 章。

本书在编写中参考了工科中专通用《数学》试用教材(1979 年第 1 版),并得到了咸阳机器制造学校教育研究室、数学教研组及拓晓华、唐保明、陈堪兔等老师的帮助,在此一并致谢。

由于编者水平所限,加之时间仓促,错误与不足之处在所难免,请不吝赐教,以便修订时改进。

编 者

1994 年 12 月

目 录

1 集合 不等式 函数	(1)
1.1 集合的概念	(1)
1.2 集合的运算	(5)
1.3 不等式	(10)
1.4 函数	(13)
复习题一	(22)
2 幂函数 指数函数 对数函数	(24)
2.1 幂函数	(24)
2.2 指数函数	(28)
2.3 对数	(32)
2.4 对数函数	(37)
复习题二	(41)
3 三角函数与反三角函数	(43)
3.1 角的概念的推广 弧度制	(43)
3.2 任意角的三角函数	(48)
3.3 同角三角函数间的关系	(53)
3.4 三角函数的简化公式	(56)
3.5 三角函数的图像和性质	(63)
3.6 正弦型曲线	(68)
3.7 解斜三角形	(73)
3.8 两角和与差的三角函数	(77)
3.9 二倍角的正弦、余弦和正切	(81)
3.10 半角的正弦、余弦和正切	(83)
3.11 三角函数的积化和差与和差化积	(86)
3.12 反三角函数	(90)
3.13 简单的三角方程	(95)
复习题三	(99)
4 复数	(102)
4.1 复数的概念和运算	(102)
4.2 复数的几何表示法	(106)
4.3 复数的三角形式与指数形式及其运算	(109)
复习题四	(116)
5 直线和二次曲线	(118)
5.1 直线	(118)
5.2 圆	(128)
5.3 椭圆	(132)
5.4 双曲线	(137)
5.5 抛物线	(141)

复习题五	(145)
6 参数方程和极坐标	(147)
6.1 参数方程	(147)
6.2 极坐标	(151)
复习题六	(158)
7 数列	(160)
7.1 数列的概念	(160)
7.2 等差数列	(163)
7.3 等比数列	(167)
复习题七	(172)
8 排列 组合	(174)
8.1 两个基本原理	(174)
8.2 排列	(175)
8.3 组合	(179)
8.4 排列、组合综合应用举例	(181)
复习题八	(183)
9 极限与连续	(185)
9.1 初等函数	(185)
9.2 函数的极限	(191)
9.3 极限的运算	(196)
9.4 无穷小量与无穷大量	(201)
9.5 函数的连续性	(205)
复习题九	(210)
10 导数与微分及其应用	(212)
10.1 导数的概念	(212)
10.2 求导法则和导数公式	(218)
10.3 二阶导数	(227)
10.4 函数的极值及其应用	(229)
10.5 函数图形的描绘	(236)
10.6 函数的微分	(241)
10.7 微分在近似计算中的应用	(246)
复习题十	(249)
11 不定积分及其应用	(251)
11.1 不定积分的概念	(251)
11.2 换元积分法	(256)
11.3 分部积分法	(261)
11.4 简易积分表及其使用	(264)
11.5 不定积分的应用	(266)
复习题十一	(269)
12 定积分及其应用	(272)
12.1 定积分的概念	(272)
12.2 定积分的计算	(279)
12.3 定积分的应用	(284)

12.4 无限区间上的广义积分	(291)
复习题十二	(293)
13 概率初步	(295)
13.1 随机事件	(295)
13.2 事件间的关系与运算	(296)
13.3 事件的概率	(300)
13.4 概率的加法公式	(303)
13.5 概率的乘法公式	(306)
13.6 事件的独立性	(309)
13.7 离散型随机变量及其分布列	(312)
13.8 连续型随机变量及其密度函数	(315)
13.9 正态分布	(319)
13.10 随机变量的数学期望	(323)
13.11 随机变量的方差	(327)
复习题十三	(330)
14 行列式和矩阵初步	(333)
14.1 行列式	(333)
14.2 矩阵的概念及其运算	(342)
14.3 逆矩阵 矩阵的初等变换	(350)
14.4 线性方程组的矩阵解法	(353)
14.5 线性方程组的应用举例	(360)
复习题十四	(363)
15 常系数线性微分方程	(366)
15.1 一阶线性微分方程	(366)
15.2 二阶常系数线性齐次微分方程	(369)
15.3 二阶常系数线性非齐次微分方程	(374)
复习题十五	(378)
16 无穷级数和拉氏变换	(379)
16.1 数项级数	(379)
16.2 傅里叶级数	(385)
16.3 周期为 $2l$ 的函数展开为傅氏级数	(391)
16.4 拉普拉斯变换	(394)
16.5 拉氏逆变换	(402)
复习题十六	(407)
附表 1 简易积分表	(409)
附表 2 标准正态分布表	(417)
习题答案	(418)

1 集合 不等式 函数

集合理论是近代数学的基本内容之一,集合思想已被广泛地渗透到自然科学的许多领域.函数是数学中最基本的概念之一,也是管理科学的重要工具.本章将介绍集合的初步知识、不等式与函数的有关基础知识.

1.1 集合的概念

群体观念在数学上的反映就是集合概念.

1.1.1 集合的意义

在人们的日常生活中,常把具有某种特定性质的对象当作一个整体加以研究.例如:

- (1) 某校机制专业的全体学生;
- (2) 某工厂车队的所有汽车;
- (3) 自然数的全体;
- (4) 所有的直角三角形.

我们把具有某种特定性质的对象全体称为**集合**,简称**集**;集合中的每一个对象称为该集合的**元素**.例如,上例(1)是由某校机制专业的全体学生组成的集合,其中每一个学生都是这个集合的元素.

集合一般用大写英文字母 A, B, C 等表示,而集合的元素用小写英文字母 a, b, c 等表示.元素可以是人、事、物、数、点等等.

若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A ,并记为 $a \in A$;若 a 不是 A 的元素,则称 a 不属于 A ,并记为 $a \notin A$ (或 $a \bar{\in} A$).

由数组成的集合称为**数集**,常用数集的记号为:

数集	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记号	N	Z	Q	R

若数集中的元素均为正数或负数,则可在集合记号的右上角标以“+”号或“-”号,例如 Q^+ 表示正有理数集, R^- 表示负实数集.

一个“给定集合”的含义是指这个集合中的元素是确定的,因此,当给定集合后,元素与这个集合的关系只有属于或不属于的两种情形.例如,对于自然数集 N , $2 \in N$, 而 $\sqrt{2} \notin N$.又如,高个子的学生全体不能当作给定集合,因为无法判定某学生的归属.

含有有限个元素的集合称为**有限集**;含有无限个元素的集合称为**无限集**.如前面例子中(1)、(2)为有限集,而(3)、(4)为无限集.

由一个元素组成的集合称为**单元素集**.没有任何元素的集合称为**空集**,记作 $\emptyset$;当

然,有元素的集合就统称为非空集.例如,由元素0组成的单元素集 $\{0\}$ 是非空集.

声明:本书所讨论的数集,如无特殊说明,都是指实数集 R .

1.1.2 集合的表示法

1) 列举法 把集合的元素一一列出在大括号 $\{\}$ 内,每个元素只写一次,不论顺序,这种表示集合的方法称为集合的列举法.

例如,由方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的所有解组成的集合,可表示为 $\{2, 3\}$ 或 $\{3, 2\}$;又如,由1、2、3、4组成的集合,虽然有各种正确的写法,显然依序写出元素的集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 会更好.

当集合的元素很多,而且不需要或不可能全部一一列出时,可只写几个元素.其它的元素用省略号表示.例如,自然数集 N 可表示为 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

2) 描述法 把集合中的元素所具有的特性直接描述在大括号 $\{\}$ 内,或写成 $\{\text{元素} \mid \text{元素特性}\}$ 的形式,这种表示集合的方法称为集合的描述法.

例如,由所有直角三角形组成的集合,可表示为 $\{\text{直角三角形}\}$;由方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的所有解组成的集合,可表示为 $\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

由点组成的集合称为点集,因为实数与数轴上的点是一一对应的,所以可以用数轴上与实数对应的点所组成的点集来表示数集.例如,集合 $\{x \mid 0 < x \leq 3\}$ 可以用数轴上满足条件 $0 < x \leq 3$ 的所有点,即线段 MN (不包括左端点 M ,而包括右端点 N)上所有点的集合来表示(图1-1).

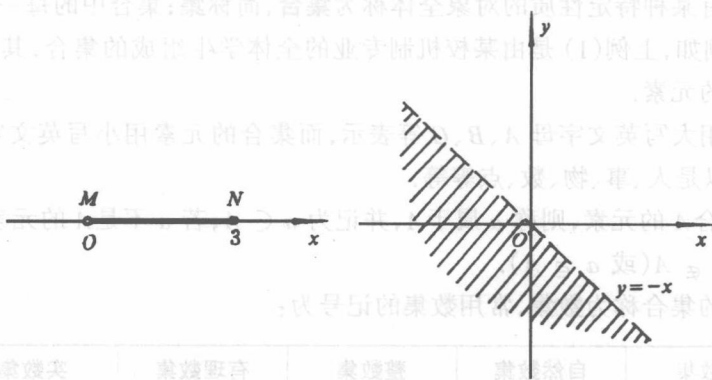


图1-1

图1-2

又如,集合 $\{(x, y) \mid x + y < 0\}$ 是有序实数对组成的集合(图1-2),这个点集是直角坐标平面内,在直线 $y = -x$ 以下的所有点而不包括虚线上的点的集合.

由方程(组)或不等式的所有解组成的集合称为该方程(组)或不等式的解集.例如,不等式 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 的解集为 $\{x \mid 2 < x < 3\}$.

1.1.3 集合与集合的包含关系

1) 集合相等 例如,集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 与 $B = \{1, 2\}$, A 的所有元素是 $x_1 = 1$ 与 $x_2 = 2$,很明显 A 与 B 的元素完全相同.若两个集合 A 与 B 的元素完全相同,则

称这两个集合相等(简称等集),记作 $A = B$; 否则称 A 与 B 为非等集,记作 $A \neq B$.

2) 真子集 例如, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. 若 A 的每个元素都是 B 的元素, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$, 分别读作“ B 内包含 A ”或“ A 内包含于 B ”.

3) 子集 例如, 当集合 A 为 $\{1, 2\}$ 或 $\{1, 2, 3\}$ 时, 而集合 $B = \{1, 2, 3\}$. 若 A 的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $B \supseteq A$ 或 $A \subseteq B$, 分别读作“ B 包含 A ”或“ A 包含于 B ”. 由此可见, 记号“ $\subseteq$ ”雷同于记号“ $\leq$ ”.

等集、真子集与子集之间的关系统称为集合与集合的包含关系, 而 A 的等集与真子集合称为 A 的子集. 应当指出, 当 A 、 B 为给定集合, 并且相互间有包含关系时, 则只有 $A = B$ 与 $A \supset B$ (或 $A \subset B$) 的两种情形.

设 A 为任意集合(空集或非空集), 从集合所属的元素范围来看, 显然有如下的包含关系:

$$(1) A \supseteq \emptyset; \quad (2) R \supset Q \supset Z \supset N.$$

4) 全集

在研究某一问题时, 所涉及到某些集合的元素总是在一定范围内, 在这个特定范围内的所有元素组成的集合称为在这个问题中的全集, 记作 Ω . 例如, 在实数范围内研究代数方程的解集, 则 R 是全集; 若在整数范围内研究代数方程的解集, 则 Z 是全集.

对于任何一个集合都有

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$$

为了形象地说明集合之间的关系, 通常用圆(或其它任何封闭曲线围成的图形)表示集合, 这样的图形称为文氏图. 如图 1-3 表示集合 $A \subseteq \Omega$; 图 1-4 表示 $A \subseteq B \subseteq \Omega$.

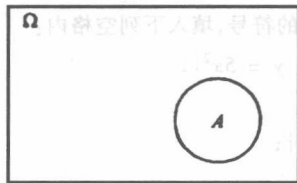


图 1-3

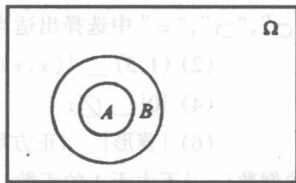


图 1-4

例 1 写出集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集及真子集.

解 集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集是 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$. 其中 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ 是真子集.

例 2 讨论集合 $A = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$ 与集合 $B = \{(x, y) \mid xy > 0\}$ 的包含关系.

解 $\because A$ 表示第 I 象限内的点, 而 B 表示第 I 或第 III 象限内的点, 所以 $A \subset B$.

例 3 若 $n \in \{1, 3, 4\}$, 讨论集合 $A = \{x \mid x = n^3 + 19n\}$ 与集合 $B = \{x \mid x = 4(2n^2 + 3)\}$ 的关系.

解 当 n 分别取数 1, 3, 4 时, 可求得 A 和 B 两集合中的元素分别为:

$$A = \{x \mid x = n^3 + 19n\} = \{20, 84, 140\},$$

$B = \{x \mid x = 4(2n^2 + 3)\} = \{20, 84, 140\}$,
 $\therefore A = B$.
 应该注意,空集 $\emptyset$ 与元素为 0 的单个元素集合 $\{0\}$ 间的区别.

习题 1-1

1. 用列举法写出下列集合:

- (1) 大于 3 小于 21 的偶数的集合;
- (2) 与 3 互质的一位数全体;
- (3) 一元二次方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 的解集;
- (4) 英文元音字母的集合;
- (5) $\{x \mid 1 < x < 6, x \in \mathbb{Z}\}$.

2. 用适当的方法表示下列集合:

- (1) 小于 10 的所有正整数的平方数;
- (2) 直线 $y = kx$ 上所有点;
- (3) 在第 II 象限内到原点距离为 1 的所有点;
- (4) 与 2 相差 1 的所有数;
- (5) 方程组 $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$ 的解集;
- (6) 不等式 $3(x - 1) < 2x - 5$ 的解集.

3. 用点集表示下列集合:

- (1) $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$;
- (2) $\{(x, y) \mid x + 3 > 2\}$;
- (3) $\{x \mid -5 < x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$.

4. 在“ $\in$ ”, “ $\notin$ ”, “ $\subset$ ”, “ $\supset$ ”, “ $=$ ”中选择出适当的符号,填入下列空格内:

- (1) a $\underline{\quad}$ $\{a, b\}$;
- (2) $(1, 5)$ $\underline{\quad}$ $\{(x, y) \mid y = 5x^2\}$;
- (3) -2 $\underline{\quad}$ N ;
- (4) $\{0\}$ $\underline{\quad}$ $\emptyset$;
- (5) 0 $\underline{\quad}$ $\emptyset$;
- (6) $\{\text{菱形}\}$ $\underline{\quad}$ $\{\text{正方形}\}$;
- (7) $\{\text{全体自然数的倒数}\}$ $\underline{\quad}$ $\{\text{不大于 1 的正数}\}$.

5. 写出集合 $A = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, \text{且 } x + y = 4\}$ 的全部子集.

6. 设全集 $\Omega = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 写出 Ω 中符合下列条件的所有子集:

- (1) 元素都是质数;
- (2) 元素都能被 3 整除;
- (3) 元素都能被 2 整除.

7. 指出下列集合之间的关系,并用文氏图表示:

$A = \{\text{等边三角形}\}$, $B = \{\text{等腰三角形}\}$, $C = \{\text{有一个角为 } 45^\circ \text{ 的直角三角形}\}$, $D = \{\text{等腰直角三角形}\}$.

8. 判断下列各题中的两个集合是否相等:

- (1) $A = \{x \mid x = 5n, n \in N\}$ 与 $B = \{5, 15, 25, 10, 20\}$;
- (2) $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 与 $D = \{\text{小于 10 的正奇数}\}$.

1.2 集合的运算

1.2.1 并集

设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 把 A 和 B 两个集合的元素合并在一起, 可以组成一个集合 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 对于这样的集合, 给出下面的定义.

定义 设 A 和 B 是两个集合, 把属于 A 或 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 图 1-5 中阴影部分表示了 $A \cup B$ 中元素的几种情况.

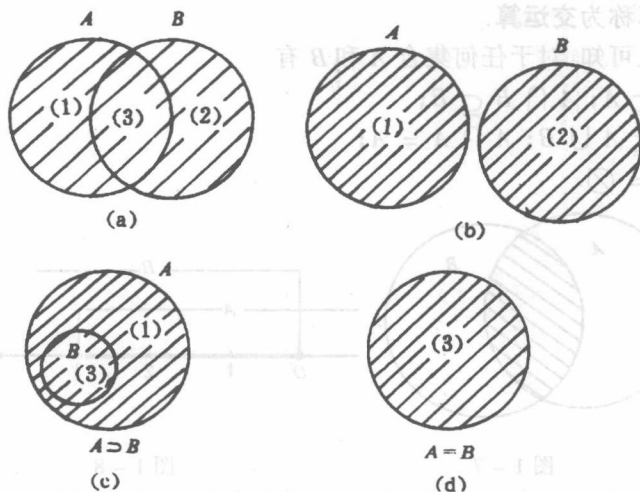


图 1-5

求并集的运算称为**并运算**.

由并集的定义和图 1-5 可知, 对任意集合 A, B , 有

$$A \subseteq A \cup B; \quad B \subseteq A \cup B.$$

即 A, B 都是 $A \cup B$ 的子集, 对于任意一个集合 A , 显然有 $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$.

例 1 设 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x < 4\}$, 求 $\{A \cup B\}$ 并在数轴上画出所对应的点集.

$$\begin{aligned} \text{解 } A \cup B &= \{0 \leq x \leq 2\} \cup \{x \mid 1 \leq x < 4\} \\ &= \{x \mid 0 \leq x < 4\}, \end{aligned}$$

数集 $A \cup B$ 在数轴上所对应的点集如图 1-6 所示.

例 2 设 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 4\}$.

求 (1) $(A \cup B) \cup C$; (2) $A \cup (B \cup C)$.

$$\text{解 } \because A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 6\},$$

$$\therefore (1) (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$(2) A \cup (B \cup C) = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

集合的并运算满足交换律和结合律, 即:

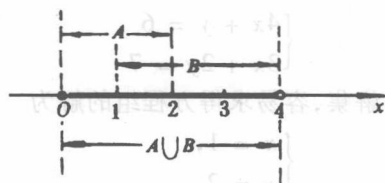


图 1-6

交换律 $A \cup B = B \cup A$;

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

真子集与合集 2.1

1.2.2 交集

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 把属于 A 且属于 B 的所有元素组成一个集合 $C = \{4, 5\}$. 对于这样的集合, 给出下面定义:

定义 设 A 和 B 是两个集合, 把属于 A 且属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$. 读作“ A 交 B ”, 即

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

图 1-7 中阴影部分即为 $A \cap B$.

求交集的运算称为交运算.

由交集的定义可知, 对于任何集合 A 和 B 有

$$A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B;$$

$$A \cap B \subseteq A \cup B; A \cap A = A;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

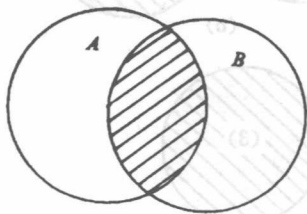


图 1-7

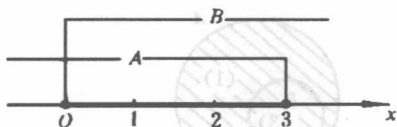


图 1-8

例 3 设 $A = \{x \mid x < 3\}$, $B = \{x \geq 0\}$, 求 $A \cap B$, 并在数轴上画出对应的点集.

解 $A \cap B = \{x \mid x < 3\} \cap \{x \geq 0\}$

$$= \{x \mid x < 3 \text{ 且 } x \geq 0\}$$

$$= \{x \mid 0 \leq x < 3\}.$$

交集 $A \cap B$ 在数轴上所对应的点集如图 1-8 所示.

例 4 设 $A = \{(x, y) \mid 4x + y = 6\}$, $B = \{(x, y) \mid 3x + 2y = 7\}$, 求 $A \cap B$.

解 要求 $A \cap B$, 就是求方程组

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

的解集, 容易求得方程组的解为

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

因此

$$A \cap B = \{(x, y) \mid 4x + y = 6\} \cap \{(x, y) \mid 3x + 2y = 7\} = \{(1, 2)\}.$$

根据交集的定义可知, 交运算满足:

交换律 $A \cap B = B \cap A$;

结合律 $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

分配律: