★★★★★根据最新竞赛大纲第四次修订

中小学学科奥赛编辑部组编

全国金牌奥赛教材

九年级数学

（通用版）

京华出版社

全国金牌

奥赛

教材

全国金牌奥赛教材

（通用版）

九年级 数学

主　编　项昭义　陈　斌　周春荔

副主编　屠新民

编　委　程　瑜　张建平　刘富森

丁[illegible]雄　张燕勤　尹克新

陈　杰　刘德寿　王建设

[illegible]谷中　李[illegible]锋　蔡桂荣

京 华 出 版 社

责任编辑:徐秀琴　王　建
封面设计:周春林　默　石

图书在版编目(CIP)数据

全国金牌奥赛教材．九年级．数学/项昭义 主编．
－北京:京华出版社．
ISBN 7－80600－755－5

Ⅰ．全…　Ⅱ．项…　Ⅲ．数学课－初中－习题　Ⅳ．G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 024363 号

著　　者□　项昭义　陈　斌　周春荔
出版发行□　京华出版社(北京市安华西里 1 区 13 楼　100011)
经　　销□　京华时代图书(北京)有限公司
　　　　　　(010)63993657　63993659
印　　刷□　北京国防印刷厂印刷
开　　本□　880 毫米×1230 毫米　32 开本
字　　数□　200000 字
印　　张□　9 印张
出版日期□　2005 年 3 月第 4 次修订　第 1 次印刷
书　　号□　ISBN 7－80600－755－5／G·443
定　　价□　11.00 元

京华版图书,若有质量问题,请与本社联系

丛书出版说明

《中小学奥林匹克学科竞赛》系列丛书分为教材类、入门教材类、练习卷类、模拟试卷类、强化教材类、精典题解类、每周测类、试题汇编类、一题多解类等总计200多品种。本系列丛书是由中小学学科奥赛编辑部组编,北京阶梯素质教育研究所的研究成果。自奥林匹克出版社出版以来独树一帜,深受广大教师、家长、学生的喜爱。在经过较大程度的修订、改版或重新编写后,现更名为《金牌奥赛》、《金牌奥校》等系列丛书,由京华出版社再版发行。值此再版之际,向全国千百万读者表示真挚的感谢。

《金牌奥赛》、《金牌奥校》等系列丛书的封面设计、书名等各种标识均已进行了商标注册,请读者朋友在选购时注意分辨,谨防假冒。如发现有盗用书中内容、盗版、冒用品牌等行为,请及时告知北京阶梯素质教育研究所,我所将根据有关法律追究侵权者的法律责任。在此我们对您表示由衷的感谢。

本书的读者如有疑难问题或发现本书的疏漏之处,请来信与本研究所联系。我们将认真听取您的意见和建议,并竭诚为您服务,与您共同切磋,共同研究,共同进步。

来信请寄:北京市莲宝路2号院盛今大厦10A

北京阶梯素质教育研究所(收)

邮　　编:100073

联系电话:(010)63993657　　63993659

北京阶梯素质教育研究所教育网站:“金牌奥赛网”已经开通,欢迎登录!

网　　址:http://www.jpas.cn

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

导　读

中小学学科奥林匹克竞赛(简称学科奥赛)是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生学科竞赛活动。学科奥林匹克是由体育奥林匹克借鉴、引申而来。国际数学奥林匹克(简称IMO)、国际物理奥林匹克(简称IPHO)、国际化学奥林匹克(简称ICHO)等是国际上影响较大的中学生学科竞赛活动,每年都受到了千百万青少年学生的向往与关注。之所以受到如此关注,究其原因是奥赛具有很强的创新性、灵活性、综合性以及注重培养学生的探索能力和启发学生的创新意识,而这些也恰恰是素质教育的核心内容。这些也正是未来发展的需要。

中小学学科奥赛编辑部在精心研究了多年国内外这项活动及大量该类优秀图书的基础上,邀请了全国各地一些潜心耕耘于这块园地的优秀园丁,陆续编写出版了《金牌奥赛》、《金牌奥校》等一系列有关数学、语文、英语、物理、化学、生物、信息七大学科共计200多个品种的奥赛读物。就我社奥赛类图书的品种、数量、质量而言堪称在国内外同行中影响最大,在中小学师生心目中最具魅力。

《金牌奥赛》、《金牌奥校》等系列丛书的编写宗旨及特点是:

第一:高。来源于教材,又高于教材。来源于教材,就是参照教育部最新[课程标准]编写;高于教材,就是紧扣各级竞赛大纲,注意与各级竞赛在内容、题型及能力要求等各方面全面接轨,培养兴趣,开发智力,提高能力。

第二:准。科学准确,结构合理。各册按照学科特点进行分层设计,科学编排;依照循序渐进的原则,进行深入浅出的分析,教授全面细致的解题方法。

第三:新。书中选用的题型新颖独特,趣味性强。汇集近年国内外奥赛、中考、高考试题精华,代表当前奥赛的最高水平,体现课程改革的新概念及竞赛命题的新思想、新方法、新动态。

第四:精。精选例题,难而不怪,灵活性强,高而可攀。重在举一

反三,触类旁通;重在一题多解、一题多变、一题多问;注重对思维能力的训练,不搞题海战术,使学习成为一种兴趣和爱好。

第五:名。名师荟萃,名赛集锦。中小学学科奥赛编辑部邀请了全国各地一些名牌大学教授、重点中学的特级教师、高级教师、学科带头人、著名奥林匹克金牌教练共同编写。

第六:全。本系列丛书共含以下12套总计200多品种:

1.**《小学数学金牌奥赛入门教材(ABC卷)》**学龄前教材2册,低年级教材2册,低年级ABC卷2册。图文并茂,寓教于乐,目的在于培养学龄前儿童及低年级学生学习数学的兴趣与对数学的感觉,引导他们步入神奇的数学殿堂。

2.**《金牌奥赛教材》(通用版)**小学语文、数学共8册,初中数、理、化、语文、英语共12册。本丛书结合了新课标、老教材、奥赛的共同点,又兼顾特殊才能的学生的需要。全书分知识要点、例题解析、思路分析、典型练习和答案提示等版块。

3.**《金牌奥赛ABC卷》**小学语文、数学共8册,初中数、理、化、语文、英语共12册。在《金牌奥赛教材》的基础上对学生进行测试。全书分A、B、C三种试卷,从易到难,不同水平的学生可进行有针对性的选择训练。

4.**《金牌奥赛模拟试卷》**小学数学共4册,初中数、理、化、语文、英语共12册。是《金牌奥赛教材》系列丛书的组成部分,是全真模拟竞赛的综合训练卷。

5.**《金牌奥赛试题汇编》**小学数学1册,初中数、理、化、英语共4册。是一套记录近五年全国中小学竞赛历史的丛书,她记录了近几年学科教育的辉煌成就,歌颂了教师们的集体智慧,展示了全国中小学生的才华。

6.**《金牌奥赛热点试题分类全解》**小学数学、信息学共2册,初中,高中数、理、化、英语、生物、信息学共12册。这套丛书精选近年奥赛热点试题,分章节,按知识点分类整理,给出详细讲解。非常方便学生学习使用。

7.**《金牌考试热点试题全解》**(暂定名)初中,高中数、理、化、语文、英语、生物共12册。这套丛书是近五年全国10几个教育重点省的中考、高考试卷,分科目,按知识点进行分类整理,给出详细解答。

全书分中考、高考知识要点讲解、热点试题解析、规律总结、模拟训练等版块。

8.**《金牌奥赛百胜教材》(提高版)**小学数学、语文共8册,初中数、理、化、语文、英语共12册。这套书是参照人教版新教材内容次序分科目、按单元编写。全书分知识要点与延伸拓展、解题技巧、例题解读、赛前强化训练等版块,供赛前集训及学有余力的学生使用,是课堂知识的拓展与延伸。

9.**《金牌奥赛(金牌奥校)精典题解》**小学数学共4册,初中,高中数、理、化、语文、英语、生物共29册。本丛书是参照人教版教科书的内容次序,分科目按章节将典型习题、中考题、高考题、难点题按由易到难次序精心编选,著述而成。

10.**《金牌奥赛每周测》**小学数学、语文、英语共12册,初中数、理、化、语文、英语、生物共15册,高中数、理、化、语文、英语、生物共17册。这套丛书是参照人教版教材内容次序,按知识点分单元或每周进行测试使用的测试卷。

11.**《金牌奥赛精典题一题多解》**小学数学1卷,初中、高中数学,物理共4卷。这套丛书精选了近年奥赛典型题的一题多解题,所谓一题多解题就是用不同的思维分析方法,多角度多途径地解答问题,这类习题极富技巧性及趣味性。

12.**《国际金牌奥赛试题解析》**数、理、化、生物学、信息学共5册。这套丛书精选近年国际大赛试题分科目按年代进行分类整理,给出详细解答。这套丛书,代表了当今奥赛的最高水平,是各类奥赛书中的阳春白雪。

本系列丛书在编写和修订过程中,参考并引用了一些国内外优秀试题,在书中未一一注明出处,在此谨向原题的编者表示感谢。

本系列丛书虽然从策划、编写,再到设计、出版,我们兢兢业业、尽心尽力、鞠躬尽瘁,但疏漏之处在所难免。如果您有什么意见和建议,欢迎并感谢赐教,让我们共同努力,以使本系列丛书更好地服务于广大的中小学师生。

中小学学科奥赛编辑部
北京阶梯素质教育研究所

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

祖冲之（429—500）中国南北朝时代南朝的科学家。字文远。范阳遒人。推算出圆周率的值在3.1415926和3.1415927之间，提出了约率22/7和密率355/113，著有《缀术》《九章术义注》，编制《大明历》

第一章　一元二次方程

§1.1　一元二次方程的根

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0). \tag{①}$$

令 $\quad \Delta=b^2-4ac \qquad$ ②

称为一元二次方程①的判别式,并且

(i)方程①有两个不等实根 $\Leftrightarrow \quad \Delta>0$;

(ii)方程①有两个相等实根 $\Leftrightarrow \quad \Delta=0$;

(iii)方程①无实根 $\Leftrightarrow \quad \Delta<0$.

在方程①有实根的情况下,方程①的根可由公式

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{③}$$

求得.

1.根的概念

例1　若 m 是方程 $ax^2+bx+a=0 \quad (a\neq 0)$的一个根,试求方程的另一个根.

【分析】 如果利用求根公式,显然运算比较繁杂,通过观察知,此方程的系数关于一次项对称,这为我们提供了一个很好的条件.

【解】 $\because$ m 是原方程的根,故由根的定义,有

$$am^2+bm+a=0$$

显然 $m\neq 0$(否则推出 $a=0$,矛盾).上式两边同除 m^2,得

$$a+b\cdot\frac{1}{m}+a\cdot\frac{1}{m^2}=0.$$

又由根的定义知$\frac{1}{m}$为原方程的另一根.

【说明】 上述解法的变形有一定的技巧性.若由根与系数的

关系，易知该方程的两根之积为 1，于是所求另一根为$\frac{1}{m}$.

例 2　证明$\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})$是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

【证明】　将 $x=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})$代入原方程：

$$\text{左边}=a\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c$$

$$=a\left(\frac{b^2\pm2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2-4ac}{4a^2}\right)+\frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c$$

$$=\frac{2b^2\pm2b\sqrt{b^2-4ac}-4ac}{4a}+\frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c$$

$$=\frac{b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}-2ac}{2a}+\frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{2ac}{2a}$$

$=0=$右边.

故由根的定义知$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

例 3　已知两数 a 与 b 之积 $ab\neq1$，且

$$2a^2+1234567890a+3=0$$
$$3b^2+1234567890b+2=0,$$

试求$\frac{a}{b}$的数值.

【解】　$\because$　$ab\neq1$，又由 $3b^2+1234567890b+2=0$ 知 $b\neq0$，

$\therefore$　$a\neq\frac{1}{b}$.

由已知条件知，a 是方程 $2x^2+1234567890x+3=0$ 的根，而 b 是方程 $3y^2+1234567890y+2=0$ 的一个根，所以$\frac{1}{b}$是方程 $3\left(\frac{1}{y}\right)^2+1234567890\left(\frac{1}{y}\right)+2=0$ 的根，即$\frac{1}{b}$是 $2y^2+1234567890y+3=0$

哈代（1877–1947）英国数学家。

的一个根，故 a、$\frac{1}{b}$ 是方程 $2x^2+1234567890x+3=0$ 的两个不同的根，由韦达定理知：

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{3}{2}.$$

例 4　证明一元二次方程至多只能有二个不相同的根.

【证明】　利用反证法.假设方程

$$ax^2+bx+c=0\qquad(a\neq 0)\tag{①}$$

有三个不同的根 x_1,x_2,x_3，则

$$ax_1^2+bx_1+c=0,\tag{②}$$

$$ax_2^2+bx_2+c=0,\tag{③}$$

$$ax_3^2+bx_3+c=0.\tag{④}$$

②－③得

$$a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0.\tag{⑤}$$

$\because$　$x_1\neq x_2$，$\therefore$　$x_1-x_2\neq 0$，由⑤式两边同除以 x_1-x_2 得

$$a(x_1+x_2)+b=0.\tag{⑥}$$

②－④得

$$a(x_1^2-x_3^2)+b(x_1-x_3)=0.\tag{⑦}$$

$\because$　$x_1\neq x_3$，$\therefore$　$x_1-x_3\neq 0$，⑦的两边除以 x_1-x_3 得

$$a(x_1+x_3)+b=0.\tag{⑧}$$

⑥－⑧得

$$a(x_2-x_3)=0.\tag{⑨}$$

$\because$　$x_2\neq x_3$，$\therefore$　$x_2-x_3\neq 0$.⑨两边同除以 x_2-x_3，得 $a=0$，而这与已知 $a\neq 0$ 矛盾，故方程①至多有两个不同的根.

例 5　若 m,n 为有理数，$\sqrt{n}$ 是无理数，$m+\sqrt{n}$ 是有理系数方程 $ax^2+bx+c=0$　$(a\neq 0)$ 的一个根，证明 $m-\sqrt{n}$ 也是这个方程的一个根.

【证明】　$\because$　$m+\sqrt{n}$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，故

$$a\cdot(m+\sqrt{n})^2+b\cdot(m+\sqrt{n})+c=0.$$

$\therefore \quad (am^2+an+bm+c)+(2am+b)\sqrt{n}=0$ 由于 a,b,c,m,n 均为有理数,$\sqrt{n}$为无理数,故

$$am^2+an+bm+c=0, \qquad 2am+b=0. \qquad ①$$

再将 $m-\sqrt{n}$代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 的左端,得

$$\begin{aligned}&a(m-\sqrt{n})^2+b(m-\sqrt{n})+c\\&=(am^2+an+bm+c)-(2am+b)\sqrt{n}\\&=0(\text{注意到①式}).\end{aligned}$$

故 $m-\sqrt{n}$是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

【说明】 (i)上述证明过程中用到了实数的如下性质:

$$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}\Leftrightarrow a=c,b=d.$$

其中 a,b,c,d 均为有理数,而$\sqrt{b}$、$\sqrt{d}$为无理数.

(ii)上例告诉我们,当 $m-\sqrt{n}$是有理系数方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq0).$$

的根时,$m+\sqrt{n}$也必是它的根,即 $m\pm\sqrt{n}$作为一个有理系数方程的根必成对出现,这样的一对根称为共轭有理根.

(iii)一般地,如果有理系数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (a_0\neq0).$$

有无理根 $a+\sqrt{b}$,那么此方程必有另一个无理根 $a-\sqrt{b}$其中 a、b 为有理数,$\sqrt{b}$为无理数,n 为大于等于 2 的自然数.

2.一元二次方程的特殊根的应用

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有两个实根 x_1,x_2,则有如下结论成立:

(1)如果 $a+b+c=0$,则 $x_1=1,x_2=\dfrac{c}{a}$;反之,若 $x_1=1,x_2=\dfrac{c}{a}$,则必有 $a+b+c=0$.

(2)如果 $a-b+c=0$,则 $x_1=-1,x_2=-\dfrac{c}{a}$;反之,若 $x_1=-$

$1, x_2 = -\dfrac{c}{a}$,则必有 $a - b + c = 0$.

例 6 解下列方程

① $15x^2 - 23x + 8 = 0$;

② $1998x^2 + 1999x + 1 = 0$.

【解】 ① 因 $a = 15, b = -23, c = 8$,故有

$a + b + c = 15 - 23 + 8 = 0$ 从而由性质 1 得 $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{8}{15}$.

② $\because \quad a = 1998, b = 1999, c = 1$,故

$$a - b + c = 1998 - 1999 + 1 = 0,$$

从而由性质 2 得 $x_1 = -1, x_2 = -\dfrac{1}{1998}$.

例 7 设 a, b, c 是不等的实数,且方程 $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ 有两相等的实根,证明 $2b = a + c$.

【分析】 解决这个问题的一般思考方法是:由方程有两个相等实根得 $\Delta = (c-a)^2 - 4(a-b)(b-c) = 0$,然后化简得出 $2b = a + c$,其运算过程较繁,如果细心观察容易发现

$$(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0.$$

因此知原方程的两个根是 $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{a-b}{b-c}$.再根据方程有等根得出 $2b = a + c$.

【证明】 $\because \quad (b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$,由性质 1 知,$x_1 = 1, x_2 = \dfrac{a-b}{b-c}$ 为原方程的两个根,又 $\because \quad x_1 = x_2$,即 $\dfrac{a-b}{b-c} = 1$,

$\therefore \quad a - b = b - c$,即有 $2b = a + c$.

例 8 m 为何值时,方程

$$(\sqrt{2}+1)x^2 + (\sqrt{2}-m)x - 2\sqrt{2} = 0$$

有一个根是 1 ?

【解】 要使方程有一个根是 1,则只需 $a + b + c = 0$,因此,只需使

高斯(1777—1855)德国数学、物理学、天文学家《算术》。

$\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-m-2\sqrt{2}=0$,即 $m=1$.

例 9 对于任意实数 k,方程

$(k^2+1)x^2-2(a+k)^2x+k^2+4k+b=0$ 总有一个根是 1.

(1)求实数 a、b;

(2)求另一个根的范围.

【解】 (1)$\because$ $x_1=1$ 是方程的解,从而

$$k^2+1-2(a+k)^2+k^2+4k+b=0,$$

即 $4(1-a)k+(b-2a^2+1)=0$.

$\because$ k 取任何实数时,上式总成立,故必有

$$4(1-a)=0,b-2a^2+1=0$$

$\therefore$ $a=1,b=1$.

(2)将 $a=b=1$ 代入原方程得

$$(k^2+1)x^2-2(k+1)^2x+k^2+4k+1=0,$$

从而

$$x_2=\frac{k^2+4k+1}{k^2+1}.$$

整理得

$$(x_2-1)k^2-4k+x_2-1=0.$$

由于 k 是任何实数,故必有

$$\Delta=16-4(x_2-1)^2\geqslant 0.$$

即 $(x_2-1)^2\leqslant 4$,$\therefore$ $-2\leqslant x_2-1\leqslant 2$,也即有 $-1\leqslant x_2\leqslant 3$.

【说明】 上述过程中用到了两个多项式相等、判别式及实数的有关性质.

3.已知方程的根,求其他参变量

例 1 设 a,b 是整数,方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个根是 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$,则 $a+b=$________.

【解】 $\because$ $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$

$$=\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com