二十一世纪高职高专教育规划教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学

（理工版）

主编◎牛 莉 朱艳玲 张万芹

中国传媒大学出版社

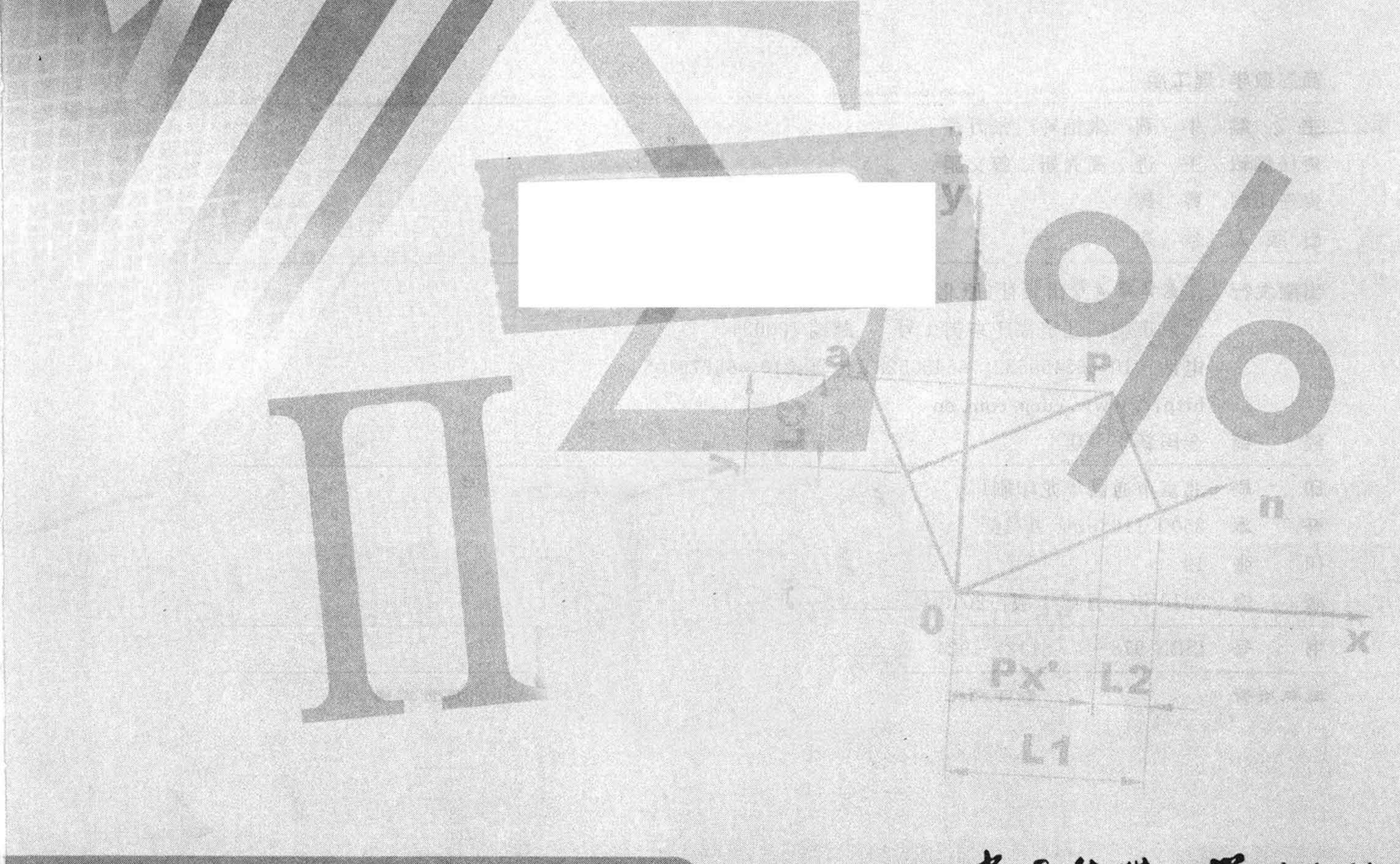
二十一世纪高职高专教育规划教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学

（理工版）

主编 牛 莉 朱艳玲 张万芹
编者 牛 莉 朱艳玲 张万芹 毕晓华 戴江涛



中国传媒大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工版/牛莉,朱艳玲,张万芹主编.
—北京:中国传媒大学出版社,2010.5
ISBN 978-7-81127-924-5
Ⅰ.①高… Ⅱ.①牛… ②朱… ③张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 080660 号

高等数学:理工版

主　　编	牛　莉　朱艳玲　张万芹
责任编辑	王　进　高秀妍　曾文鹏
责任印制	曹　辉
出 版 人	蔡　翔
出版发行	中国传媒大学出版社(原北京广播学院出版社) 北京市朝阳区定福庄东街 1 号　邮编 100024 电话:010-65450532　65450528　传真:010-65779405 http://www.cucp.com.cn
经　　销	全国新华书店
印　　刷	北京市通县华龙印刷厂
开　　本	850×1168mm　1/16
印　　张	19
版　　次	2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81127-924-5/O·924　　**定　价**:36.00 元

前　言

FOREWORD

本书参照全日制大学专科高等数学教学大纲和全国普通高等理工院校成人教育研究会数学学科委员会指定的专科“高等数学”课程的基本要求编写的.

高等数学是理、工科院校一门重要的基础课程，它在各个科学领域中都占有重要的地位. 它不仅为后续数学课程和专业课程提供必要的数学基础知识，为学生进一步提高数学素质奠定良好的基础，更重要的是它还为培养适应新世纪各类工程技术人才的数学素质起到了举足轻重的作用. 通过学习本课程，能培养学生的抽象思维能力，概括问题能力，逻辑推理能力，空间想象和自学能力，还特别注意培养学生的运算能力，运用所学知识分析和解决实际问题的能力.

本书力求以通俗易懂的语言介绍高等数学中最基础的知识，全书以微积分学为核心内容，一元函数和多元函数是微积分研究的对象，而极限理论在整个教材中占有至关重要的地位. 无论是导数还是微分，不定积分还是定积分，甚至级数和反常积分，这些基本概念都是借助于极限建立起来的，微分方程则可作为微积分学的延伸和应用.

本书的主要特点是：

1. 本书力求“以例服理”，由浅入深，减弱了部分理论推导及证明过程，但对主要概念的理解，基本方法的应用，本书都作了着重的介绍，更注重数学知识与现实生活的结合，还增加了一些身边数学例子，充分体现了用数学知识解决实际问题的重要性.

2. 本书语言简练，通俗易懂，便于自学，并为教师合理处理教材、取舍相关内容提供了足够的空间；

3. 本书一改传统的编写形式，设置了若干小栏目，各栏目的作用如下：

【学习目标】学习每章之前，读者可以通过此栏目快速浏览到将要学习和讨论的新知识点.

【基本要求】读者可根据该章的基本要求，制定预习计划，做到有的放矢、有备而学，从而提高学习效率.

【同步练习】读者可通过每节后的同步练习，及时消化吸收所学知识，做到及时发现并解决问题.

【一试身手】此栏目为读者设置了一道为提高学习兴趣，亲自动手动脑的“实战”训练题，每章后都设有.

【拓展空间】为读者增加学习兴趣、开拓视野，在这里读者除了可以欣赏到一些史上著名的数学家史实，还可以解读一些利用数学知识解释大自然的奇观景象、趣味数学现象等.

【阶梯训练】分【基础练习】和【综合提高】两部分，主要是为巩固所学基本知识，加深对数学概念的理解，达到循序渐进，举一反三，从而使所学知识能够融会贯通.

【同步测试】可作为阶段性检验自己对基本内容的掌握程度，虽然这两部分中的题型都是按照专科升本科的考试题型设置的，而且大部分题目都是选自历届全国专科起点升本科入学考试真题或为入学考试模拟题，适当配有少量难度题目，但读者也不要满足于此. 本书累计题目达千余道，所有题目(包括填空、单选题)均配有解答过程或相应提示，且另成一册，主要是考虑到课堂上不可能例举更多的例题，也不可能对每个例题都进行详细的剖析，没有大量的例题供参考，给学生课后消化、吸收(理解)、提高带来一定的困难；建议读者应以独立完成所有训练为主，以手册为辅；做到触类旁通，才能得心应手；也希望解答手册能为读者参加(准备)各种相关考试(复习)提供必要的帮助，希望它能真正成为你的良师益友.

本书第 1、第 6 章由朱艳玲编写；第 2、第 7 章由毕晓华编写；第 3、第 5、第 9 章由牛莉编写；第 4、第 10 章及附录由戴江涛编写；第 8 章由张万芹编写；牛莉任主编，全书内容结构由牛莉设计制定、统稿、定稿.

由于时间仓促，加之编者能力水平有限，书中难免存在不足和错误. 真诚的恳请专家、读者不惜给我们提出宝贵的意见与建议，我们将不胜感激！

编　者

CONTENTS

目 录

第8章　多元函数微分学

第9章　多元函数积分学

第10章　无穷级数

课堂速记

第1章 函数、极限与连续

先睹为快

学习目标

本章我们将学习函数、极限、连续的概念,主要学习:

函数及其性质、初等函数、极限的概念、极限的运算、函数的连续性与间断点

基本要求

理解:函数、初等函数的概念;极限的概念;无穷小、无穷大的概念;

函数连续性的概念及闭区间上连续函数的性质

掌握:极限的性质、极限四则运算法则、两个重要极限

了解:无穷小的性质求极限

1.1 函数及其性质

函数是用数学术语来描述现实世界的主要工具,本节我们讨论函数的基本概念和特性.

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集,如果对于每一个数 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$.

通常 x 叫做自变量,y 叫做函数(或因变量),变量 x 的变化范围 D 叫做这个函数的定义域,变量 y 的取值叫函数值,全体函数值构成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$,称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时,函数只有一个确定的值和它对应,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数. 这里我们只讨论单值函数.

构成函数的要素是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则完全一致,我们就称两个函数相等.

2. 函数的表示法

(1) 解析法:用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法.

课堂速记

例 1 设自由落体运动的物体下落时间为 t，落下的距离为 s，如果开始下落的时间 $t=0$，那么 s 与 t 之间的对应关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，g 是重力加速度，若落地时间是 T，则 t 在 $[0,T]$ 区间任意取值时，按照上式 s 就有一个确定的值与其对应.

例 2 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当\ x>0, \\ 0, & 当\ x=0, \\ -1, & 当\ x<0\end{cases}$

定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{-1,0,1\}$，对于任何的 $x\in\mathbf{R}$，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$，如图 1.1 所示.

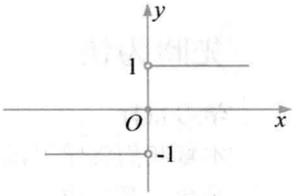


图 1.1

符号函数是分段函数，在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的解析式来表示，但它仍然是一个函数，而不能看成是几个函数.

(2) 表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法. 在实际应用中，我们经常会用到的平方表，三角函数表等都是用表格法表示的函数.

例 3 为在某河上架桥，从河的一个断面每隔 5(m) 测得河深 y 如表 1.1.

表 1.1

x/m	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
y/m	0	1	1.7	2.5	3.2	4.0	4.5	5.3	6.8	7.1	8.2	7.3	6.5	4.8	3.8	3.2	2.7	1.3	0

从表中可看出，当取其中的任意一个数时，河深都有一个值与之对应.

(3) 图像法：用坐标平面上曲线来表示函数的方法.

图 1.2 是某地区一天内的气温变化曲线. 根据这条曲线，对这一天内从 0 点到 24 点的任何时刻 t 都有一温度 T(℃) 与之对应.

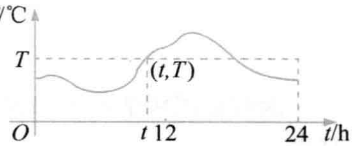


图 1.2

图像法能直观表示变量之间的对应关系，所以常把解析法和图像法结合起来分析问题.

3. 隐函数

形如 $y=f(x)$，把变量 y 用含有变量 x 的解析式直接表示出来，这样的函数称为显函数. 例如，$y=x^2\sin x$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 有些函数的因变量与自变量的对应关系是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定的，称这种由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 为隐函数. 例如，$x-\mathrm{e}^{\frac{x-y}{y}}=0$，$x\in(0.\mathrm{e}^{-1})\cup(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$ 确定了 y 是 x 的隐函数. 若解出 y 得显函数 $y=\frac{x}{1+\ln x}$，这个过程叫做隐函数的显化，但如同 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 的隐函数是不能显化的.

4. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 W_f，若对任意一个 $y\in W_f$，D_f 内只有一个数 x 与 y 对应，此 x 适合 $f(x)=y$，这时把 y 看作自变量，x 看作因变量，这样就得到一个新的函数，称为直接函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯上写成 $y=f^{-1}(x)$.

反函数的存在定理：若 $y=f(x)$，$x\in D_f$ 上单调增加(减少) 的，则存在反函数 $x=$

课堂速记

$f^{-1}(y), y \in W_f$，且该反函数也是单调增加(减少)的.

在同一坐标平面内，$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的，如图 1.3 所示.

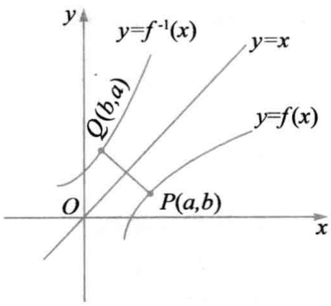


图 1.3

1.1.2 函数的几种特性

1. 有界性

对属于某一区间 I 上的所有 x 值总有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，其中 M 是一个常数，那么我们就称 $f(x)$ 在区间 I 有界，否则称无界.

如果函数在其整个定义域内有界，则称为有界函数.

例如，在 $(-\infty, +\infty)$ 内，$|\sin x| \leqslant 1$，所以 $y = \sin x$ 是有界函数.

2. 单调性

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而增大，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而减小，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减小的.

例如，函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减小的，在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

3. 奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称的.

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数，奇函数的图形关于原点对称.

4. 周期性

对于函数 $f(x)$，若存在一个不为零的数 T，使得关系式 $f(x+T) = f(x)$ 对于定义域内任何 x 值都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，T 是 $f(x)$ 的周期，我们说的周期通常是指最小正周期.

例如，$\sin x, \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

一试身手

讨论函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

同步练习 1.1

1. 判断下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$； (2) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ 与 $g(x) = x-2$；

(3) $f(x) = \sin x$ 与 $g(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$； (4) $f(x) = 3\lg x$ 与 $g(x) = \lg x^3$.

课堂速记

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$；

(3) $y=2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\lg x}$；　　(4) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|<2.\end{cases}$

3. 试确定函数 $f(x)=4-x^2$ 在指定区间上是有界还是无界.

(1) $(1,3)$；　　(2) $(-\infty,+\infty)$.

4. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\log_2\cos x$；　　(2) $f(x)=\cos x+\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $f(x)=x^2-2x+1$；　　(4) $f(x)=x\sin x$.

5. 下列函数中哪些是周期函数?对周期函数指出它的周期.

(1) $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；　　(2) $y=x\sin x$；

(3) $y=\sin^2 x$；　　(4) $y=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 3x$.

1.2　初等函数

1.2.1　复合函数

定义　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域 $R_\varphi\subseteq D_f$，那么，就称 $y=f[\varphi(u)]$ 为定义在 D_φ 上的，由函数 $y=f(u)$ 经 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量.

注意：并不是任意两个函数就能复合成复合函数.

例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成复合函数的，因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值，对应的 u 值都大于或等于 2，所以 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有意义.

复合函数还可以由更多函数构成.

例如，$y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\tan u$，$u=\dfrac{1}{v}$，$v=\sqrt{x^2+1}$ 复合而成的复合函数.

把一个复合函数分解为若干个基本初等函数，将对以后的微分、积分提供许多方便.

例 1　分解 $y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$.

解　$y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=x^2-3$ 复合而成的复合函数.

1.2.2　初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算及有限次函数复合步骤并且能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

其中基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数.

例如 $y=\sin x^2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}$，$y=\ln(\sqrt[3]{4^{3x}+3}+\sin 5x)$ 都是初等函数.

课堂速记

在很多实际问题中，首先需要找出问题中变量之间的函数关系，即建立数学模型，然后再利用有关的数学知识、数学方法去分析、研究、解决这些问题. 然而函数关系会涉及到几何、物理、经济等各门学科的知识，因此，我们应根据具体情况，进行分析，一般应有下面几个步骤：

(1) 分析题意，最好画出草图，借助草图分析理解题意；

(2) 根据题意确定函数及自变量，如果变量个数多于两个，还应进一步找变量之间的其他关系，最终得到一元函数关系式.

下面举例说明建立函数关系式的方法.

例 2 圆的内接正多边形，当边数改变时，正多边形的面积随之改变，试建立内接正多边形的面积 A_n 与其边数 $n(n\geqslant 3)$ 的函数关系式.

解 如图 1.4 所示，设圆的半径为 R，若把内接多边形各顶点与圆心连接，则得 n 个全等的等腰三角形，其中一个三角形 MON 的面积为

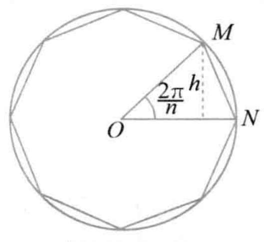


图 1.4

$$\frac{1}{2}Rh=\frac{1}{2}R\cdot\left(R\sin\frac{2\pi}{n}\right),$$

因此圆内接正多边形的面积为 $A_n=n\cdot\frac{1}{2}R\cdot\left(R\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}(n=3,4,5,\cdots)$.

一试身手

设 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3-x}{x^4+1}(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

同步练习 1.2

1. 设 $f(x)=x^2, g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)], g[f(x)], f[f(x)], g[g(x)]$.

2. 将下列函数分解成基本初等函数的复合.

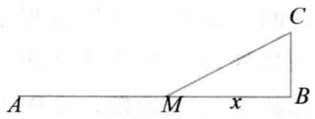
(1) $y=\arctan x^2$； (2) $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$；

(3) $y=\lg\sin\sqrt{x}$； (4) $y=(\sin\ln x)^2$；

(5) $y=\sin^3(8x+5)$； (6) $y=\tan(\sqrt[3]{x^2+5})$.

3. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从北京到某地每千克收费 0.15 元. 当超过 50 千克时，超重部分每千克按 0.25 元收费. 试求北京到某地的行李费 y(元) 与重量 x(千克) 之间的函数关系式，并画出图形.

4. 有一条由西向东的河流，经相距 150 千米的 A、B 两城，从 A 城运货到 B 城正北 20 千米的 C 城，先走水道，运到 M 处后，再走陆道，已知水运运费是每吨每千米 3 元，陆运运费是每吨每千米 5 元，求沿路线 AMC 从 A 城运货到 C 城每吨所需运费与 MB 之间的距离的函数关系如右图所示.



课堂速记

1.3 极限的概念

1.3.1 数列的极限

极限的概念是求实际问题的精确解答而产生的. 下面我们作圆的内接正多边形,近似求出圆的面积,如图 1.5 所示.

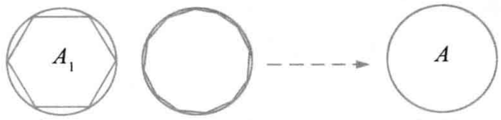


图 1.5

首先作圆内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作圆的内接正十二边形,其面积记为 A_2;再作圆的内接正二十四边形,其面积记为 A_3;依次作下去,把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n,可得一系列内接正多边形面积 $A_1,A_2,A_3\cdots A_n\cdots$,它们就构成一列有序数列.

我们可以发现,当内接正多边形的边数无限增加时,A_n 也无限接近某一确定的数值,即圆的面积.

按照一定的法则,当 $n(n\in \mathbf{N}^*)$ 依次取 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 时,对应的实数列排成一列数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$,这列数就称为数列,记作 $\{x_n\}$. 数列中的第 n 个数 x_n 叫做数列的第 n 项或一般项.

例如,数列

$2,4,8\cdots,2^n,\cdots,\quad \{2^n\}$;

$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots,\quad \left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$;

$2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots,\quad \left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$;

$1,-1,1,-1\cdots,(-1)^{n+1},\cdots,\quad \{(-1)^{n+1}\}$.

数列的几何意义:

(1) 数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 对应着数轴上的一个点列;

(2) 数列的项 x_n 是整标 n 的函数,即 $x_n=f(n)$.

例如,数列 $1,\dfrac{4}{3},\dfrac{6}{4},\dfrac{8}{5}\cdots,\dfrac{2n}{n+1},\cdots$,如图 1.6 所示,$n$ 为横作标,项 x_n 为纵作标.

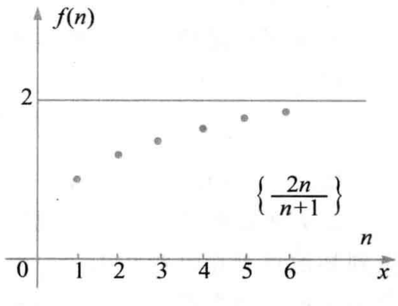


图 1.6

定义 1 一般地,数列 $\{x_n\}$ 的项数 n 无限增大时,它的一般项 x_n 无限接近于某个确定的常数 a,则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$;否则称数列 $\{x_n\}$ 发散,或称 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在,习惯上也称 $\{x_n\}$ 的极限是无穷大,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

例如,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ 或 $\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$,收敛;$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$,发散.

数列 $\{x_n\}$,若存在着正数 M,使得一切 $\{x_n\}$ 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$,则称数列

$\{x_n\}$是有界的，若正数 M 不存在，则数列$\{x_n\}$是无界的.

定理 1　若数列$\{x_n\}$收敛，那末数列$\{x_n\}$一定有界.

但有界的数列不一定收敛，数列有界是数列收敛的必要条件.

例如，数列 $1,-1,1,-1\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$，是有界的，但它是发散的.

1.3.2　函数的极限

前面学习了数列的极限，已经知道数列可看作一类特殊的函数，即自变量取正整数，若自变量不再限于正整数的顺序，而是连续变化的，就成为函数. 函数的极限有两种情况.

1. 自变量 $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 2　设函数 $y=f(x)$，在 $|x|>M$ 处有定义，如果当自变量 x 的绝对值无限增大（记 $x\to\infty$）时，对应的函数值无限接近于某个确定的数值 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$；否则称 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

从几何上看，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 表示：随着 $|x|$ 无限增大，曲线 $y=f(x)$ 上对应的点与直线 $y=A$ 的距离无限地变小，即曲线 $y=f(x)$ 以直线 $y=A$ 为水平渐近线.

例如，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x+1})=0$，所以 $y=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的水平渐近线. 如图 1.7 所示.

如果 x 只取正值或只取负值，我们就分别记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，称当 x 趋于正无穷（或负无穷）时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限.

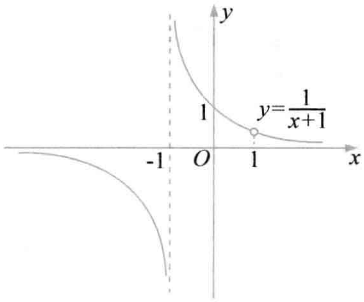


图 1.7

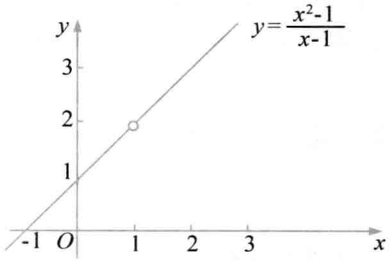


图 1.8

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

一般地，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$），则直线 $y=A$ 称为函数 $y=f(x)$ 图形的水平渐近线.

2. 自变量 $x\to x_0$ 函数的极限

例 1　观察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$（图 1.8），当 $x\to1(x\neq1)$ 时的变化趋势.

表 1.2

x	0.9	0.99	0.999	…	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	…	2.1	2.01	2.001	2.0001

从表 1.2 中可以看出，当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 无限接近于 2.

课堂速记

课堂速记

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，A 为常数，如果在自变量 x 无限趋近于 x_0 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

关于定义应注意以下两点：

(1) 定义中的“函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义”表明对 x_0 这一点有无定义没有要求，因为我们这里研究的是当 x 趋近于 x_0（但不等于 x_0）时，函数 $f(x)$ 的变化趋势与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的值无关，甚至在 x_0 处，$f(x)$ 可以没有定义，如例 1.

(2)“自变量 x 无限趋近于 x_0 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A”的意思是当 $|x-x_0|$ 无限减小时，函数与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可以任意小，要多小就有多小，只要 $|x-x_0|$ 充分小就行.

从几何上看，极限$\lim\limits_{n\to x_0}f(x)=A$ 表示：x 无限趋近于 x_0 时，$y=f(x)$ 上的点$(x,f(x))$无限靠近点(x_0,A). 如$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，$x$ 无限趋近于 1 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 上的点$(x,f(x))$无限靠近点$(1,2)$.

在 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限概念中，自变量 x 可以是 x_0 左侧的点（即 $x<x_0$），也可以是 x_0 右侧的点（即 $x>x_0$），有时函数只在左邻域（或右邻域）有定义或者只需要讨论 x_0 左邻域（或右邻域）的变化情况，所以有左极限（右极限）的概念.

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果 x 从 x_0 左（右）侧趋近于 x_0 时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，那么数 A 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0处的左（右）极限.

左极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)$；右极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)$.

容易证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在的充分必要条件是左极限和右极限存在且相等，即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}x-1, x<0,\\ 0, x=0,\\ x+1, x>0.\end{cases}$ 证明$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

证　因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$；

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，如图 1.9 所示.

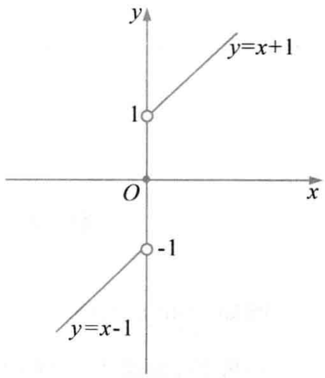


图 1.9

1.3.3　极限的性质

性质 1（唯一性）　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则必定唯一.

性质 2（局部有界性）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有界.

性质 3（局部保号性）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则 $\exists\delta>0$，当 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

性质 4（极限存在准则 Ⅰ）　如果三个变量 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，总有关系 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立，且自变量在同一变化中，若 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

此性质对变量是函数和数列都是成立的，也称夹逼准则，如图 1.10 所示.

课堂速记

性质 5（极限存在准则 Ⅱ）　单调有界数列必有极限.

现在介绍什么是单调数列，如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \leqslant x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，就称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的；如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \geqslant x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，就称数列 $\{x_n\}$ 是单调减小的.

极限存在准则 Ⅱ 告诉我们，有界且单调的数列一定有极限.

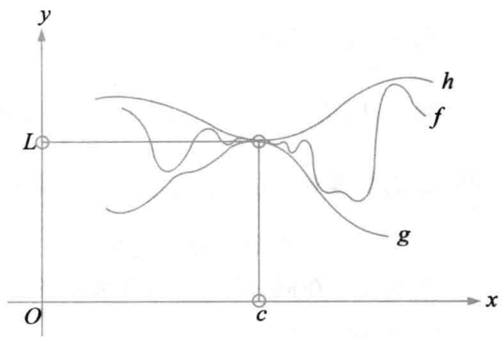


图 1.10

例如，数列 $x_n = 1-\frac{1}{2^n}$，显然 x_n 是增加的，且 $x_n < 1$，所以，由极限存在的准则 Ⅱ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，我们已经知道 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1$.

1.3.4　无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 5　在自变量某一变化过程中，变量 $f(x)$ 的极限为零，则称 $f(x)$ 为自变量在此过程中的无穷小量，简称无穷小，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$.

我们在理解无穷小时，要注意：

(1) 无穷小是以零作为极限的变量，不要与绝对值很小的数相混淆，零是可以做为无穷小的唯一的数；

(2) 无穷小与自变量的变化过程有关.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^x=0$，所以函数 $(\frac{1}{2})^x$ 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$，所以函数 $(x-1)^2$ 是当 $x\to1$ 时的无穷小；

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$，所以数列 $\frac{(-1)^n}{n}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

定理 2　在自变量 x 的某一变化过程中，函数 $f(x)$ 有极限的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小. 即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x).$$

此定理有下面一些应用：

(1) 在以后的极限四则运算定理和其他定理的证明中会用到；

(2) 将一般极限问题转化为特殊极限问题（无穷小），$A=f(x)-\alpha(x)$；

(3) 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x)\approx A$，误差为 $\alpha(x)$.

无穷小的运算性质.

性质 1　有限个无穷小量的代数和仍是无穷小；

注意：无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如，$n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}$ 是无穷小，但 n 个 $\frac{1}{n}$ 之和为 1，不是无穷小.

性质 2　有界变量与无穷小的积仍是无穷小.