基础性、拓展性通识课程系列教材

顾问◎刘沛林　总主编◎皮修平　副总主编◎王　鹏

数学学科概论

主编◎杨柳　罗李平

著名商标 上海市

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

基础性、拓展性通识课程系列教材

顾问◎刘沛林　总主编◎皮修平　副总主编◎王　鹏

数学学科概论

主编◎杨柳　罗李平

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学学科概论/杨柳,罗李平主编. —上海:华东师范大学出版社,2012. 2
基础性·拓展性通识课程系列教材
ISBN 978-7-5617-9296-4

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①杨…②罗…　Ⅲ. 数学-高等学校-教材　Ⅳ. O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 023093 号

基础性、拓展性通识课程系列教材
数学学科概论

主　　编　杨　柳　罗李平
项目编辑　方学毅
审读编辑　李　娜
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　浙江临安曙光印务有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　8.5
字　　数　193 千字
版　　次　2012 年 5 月第一版
印　　次　2012 年 5 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-9296-4/O·215
定　　价　19.00 元

出 版 人　朱杰人

序

培养健全人格的公民，一直是人类教育追求的终极目的。为达此目的，古希腊先哲亚里士多德率先进行了积极的探索并提出了“自由教育”（亦称“博雅教育”或“文雅教育”）这一命题，他主张通过读、写、音乐、绘画、哲学等来培养公民的子女，使他们具有“自由而高尚的情操”。亚里士多德的“自由教育”命题和主张对西方乃至全人类的教育思想和教育实践产生了深远的影响，为后来西方大学“通识教育”理念的形成和发展奠定了思想基础。

从17世纪30年代开始，西方的一些大学开始尝试通识教育。到20世纪初，一些美国高校开始开设通识教育课程并不断进行改革创新。20世纪40年代，哈佛大学校长科南特在《自由社会的通识教育》（1945年哈佛报告书）中首次明确提出了通识教育的目标：有效的思考、思想的沟通、恰当的判断、分辨各种价值。科南特在该报告的导言中指出，“通识教育的核心问题，是使自由和人道的传统持续不断，单单获得知识，发展专门技能与专门能力，并不能为理解奠定宽广的基础，而理解恰恰是维护我们的文明的基本要素”，“甚至即使学生在数学、物理学、化学、生物学等方面有扎实的基础，而且能够读写几种语言，仍然没有为自由社会的公民提供足够的教育背景，因为这样的课程和人类个人的情感经验、人类群体的实践经验缺乏联系”。他认为课程应该包括人文学科、社会学科、自然学科三大领域。此后，美国各大学普遍关注通识教育，纷纷开设通识教育课程。到了20世纪50年代末和70年代末，美国大学掀起了两次通识教育改革高潮，确定了“核心课程”模式的美国通识教育的框架。

战后美国快速发展的历史从一个侧面表明，美国大学的通识教育无疑是成功的。因为从某种意义上来说，它为美国经济社会的发展和科学技术的进步奠定了“教育基础”，它为美国成为世界科技强国和经济强国孕育了一大批人文大师、科学巨匠和杰出的创新型人才。因此，美国大学的通识教育令世人瞩目，成为世界各国大学学习、模仿、借鉴的典范。目前，虽然人们对于通识教育的内涵和目标还存在不尽一致的看法，但通识教育作为一种教育观已逐渐成为大学教育教学改革的核心理念之一。

进入21世纪以来，面对更加激烈的国际竞争，世界各国都不约而同地从战略高度对教育特别是高等教育寄予了更高的期望，提出了更高的要求，而且采取了一系列重大改革举措。中国作为最大的发展中国家，立足于实现中国现代化和中华民族的伟大复兴，强调全面推进素质教育、培养全面发展的公民，并陆续提出和实施科教兴国战略、人才强国战略、建设创新型国家和文化强国战略，对高等教育和高校提出了新的更高的要求，先后实施“211工程”、“985工程”和“高等学校教学质量与教学改革工程”，要求高校把“创新人才培养模式，提高人才培养质

量”作为高等教育改革发展的核心。在这种背景下，我国高等教育战线掀起了一场教育教学改革热潮。各高校纷纷探索和尝试新的人才培养模式，调整学科专业结构，修订人才培养方案，优化课程体系，强化教材建设，转变教学方式，更新教学手段。特别需要指出的是，受到美国通识教育的启发，针对建国后我国高等教育过分强调专业教育而忽视大学生综合素质教育培养的弊端，从20世纪末开始，我国在部分高校先后进行了“文化素质教育”的试点和推广，由此开启了我国高校中国特色的通识教育改革与研究的大门。

然而在这些改革中，由于受到传统教育观念的束缚，加之对通识教育的目的以及其普通性、基础性、广博性、主体性和深刻性等特征认识的不足，大多数高校的通识教育改革仍处于起步阶段。时至今日，作为知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观等主要载体的通识教育课程和教材的建设以及教学方式的转变尚未取得令人可喜的突破，人才培养的效果和质量仍不能满足经济社会发展和学生个性发展的需要，“创新人才培养模式，提高人才培养质量”依然任重道远。

但是任何改革从来都是“开弓没有回头箭”，通识教育教学改革更是如此。因为通识教育改革涉及的对象最终是人，确切地讲是学生及其发展，而且每一个学生背后连系着一个家庭的希望，每一代学生的成长与发展都连系着国家和民族的未来。美国教育家欧内斯特·博耶认为，发展个性与强调社会责任是高等教育的两个强有力的传统，具有极其重要的地位。所以，高校的通识教育课程改革和教材建设必须站在学生的可持续发展和成才的需要上，必须站在国家经济社会发展的需要上。具体而言，高校的通识教育课程改革和教材建设要有利于学生健全人格、全面发展的需要和国家未来对创新型建设人才的需要，把基础知识的积累、基本技能的训练、生活态度的形成、审美情绪的陶冶、人文修养的塑造、科学思维的培养、精神意志的砥砺、生命成长的体验、人生智慧的启迪、理想信念的养成和价值观的树立等统摄到学生自我发展、自觉发展和国家经济社会发展的需要上来，而不是以教育工具性的短视目光仅仅观照学生近期专业发展和就业求职的浅层需要。

衡阳师范学院作为一所拥有百年历史的地方高师院校，2005年以来在通识教育教学改革方面作了大量的探索和实践，先后三次修订人才培养方案，每一次修订都将通识教育课程体系优化与教材建设作为突破通识教育改革瓶颈的切入点。我们立足校本，组织精干力量精心编写了《生命与健康》、《文学欣赏》、《音乐鉴赏》、《大学美术鉴赏》、《儒学与修身》等30多部通识课程教材，并将之命名为“基础性、拓展性通识课程系列教材”。这套通识课程系列教材主要有以下四个方面的特点：

一是模块化和有机性。在体系结构上体现了模块化的特点，整套教材分为“生命·生活·健康”、“文化·修养·成长”、“科学·技术·技能”和“经济·商务·管理”四个模块，贯彻了哈佛大学前任校长科南特的通识教育课程应是人文学科、社会学科、自然学科三大领域有机结合的课程体系思想。

二是基础性和深刻性。30多部教材所涉及的知识内容都与当代大学生的基本认知、基本观念、基本技能和基本素质的形成密切相关，着眼于帮助大学生对相关基础学科基本内容和基本方法的了解和掌握，为以后的专业学习及个人的发展打下广泛的基础。整套教材也不仅

仅是让学生获取多方面的基础知识，更重要的是通过对基础知识的学习，促进学生的思维发展，发展其理性，拓展其智慧，触及其灵魂，陶冶其人格，从而促进人的和谐发展。

三是广阔性和拓展性。整套教材试图通过广泛的“知识食谱”，为学生提供多种多样的知识素养，帮助大学生拓展对文学、艺术、经济、管理、生活、生命、信仰、哲学和科学等的了解，开阔其胸襟，陶冶其情操，使其人生更加充实，精神不断升华，从而提高其文化品位和生命质量。

四是普适性和通俗性。整套教材尽管在体例构思上不拘一格，在编写风格上也各显特色，但在语言文字表达上都尽可能地突出普适性和通俗性，不管是理论阐述，还是举例说理，都力求具有逻辑性、思想性和亲近感，让每一位大学生读者和一般读者都能阅读、理解和分享。

当然，作为一所地方高师院校教育教学改革的一种尝试，我们编写的这套教材无疑有许多需要改进和完善的地方，比如在课程模块上仍需进一步优化充实，在教材内容上仍需进一步突出丰富化和延展性，等等。但“千里之行，始于足下”，教材建设从来都要经历“尝试——优化——完善”这样一个过程，大学通识课程的教材建设更是如此。所以令人欣慰的是，我们现在已经迈出了可贵的第一步。在此，我们要特别感谢华东师范大学出版社，没有他们的精心策划和大力支持，这套教材也难以与读者见面。

总主编

2011年11月

前　言

数学是一门应用十分广泛的学科，是科学技术的基础，它的应用几乎遍及各学科领域。我系组织编写的《数学学科概论》，旨在通过对数学学科的分支、专业及课程的简介，使学生对数学学科的结构、历史及发展趋势、思想方法和应用有一个初步、整体的了解，增强学生的学习积极性和自觉性，巩固专业思想，明确学习目标，优化学习方法，提高学习效率。

本教材首先在第一章和学生谈谈什么是数学，简单介绍学科发展历史和趋势，然后分别在第二到九章介绍分析学、代数学、几何学、随机数学、科学计算、计算机软件、数学建模、数学教育等方面的知识，力求简明，对主要课程的内容、思想方法、课程地位、学法及参考资料、科技创新与毕业论文设计的指导、就业与考研指导进行重点介绍，并关注国家教育改革发展的新要求和研究动向，努力培养学生的创新精神与方法。

本教材由杨柳、罗李平任主编，第一章由杨柳、罗李平编写，第二章由陈源、肖娟、杨柳编写，第三章由李浏兰、彭白玉编写，第四章由高正晖、王艳群、唐祥德编写，第五章由吴雄韬、易艳春编写，第六章由阳志锋、魏继东、官兆刚编写，第七章由李龙、彭仁忠编写，第八章由周勇、王增波、李元旦编写，第九章由刘姣、杨柳编写。

最后由杨柳、罗李平统一整理。

中国石油大学的费祥历教授对本书的编写提供了宝贵的建议和课件等资料，在此对他深表感谢！感谢湖南省普通高等学校教学改革研究项目（湘教通[2011]315号，序号293、300）的资助。

由于编写者知识所限，书中难免有不妥之处，恳请同行批评指正，在此深表感谢！

编者

2011年10月

目录

1 导论…… 1

1.1 数学的特点与作用 …… 1

1.2 数学的发展 …… 2

1.3 数学学科的结构 …… 5

1.4 数学问题与数学奖励 …… 6

1.5 数学学习与研究…… 13

2 分析学 …… 23

2.1 数学分析…… 23

2.2 微分方程…… 26

2.3 函数论…… 29

2.4 泛函分析…… 34

2.5 运筹学…… 36

2.6 常微分方程定性与稳定性方法…… 39

3 代数学 …… 41

3.1 代数学的发展历史与现状…… 41

3.2 代数学课程及研究内容与意义…… 42

4 几何学 …… 46

4.1 几何学发展概述…… 46

4.2 空间解析几何…… 63

4.3 高等几何…… 63

4.4 微分几何…… 65

4.5 拓扑学…… 66

5 随机数学 …… 67

5.1 随机数学综述…… 67

5.2 课程中的人物介绍…… 68

5.3 随机数学课程发展与应用…… 71

6 科学计算 …… 75

6.1 科学计算主要内容…… 75

6.2 微分方程数值解法…… 75

6.3 神经网络计算…… 76

6.4 最优化理论与方法 …… 77
6.5 数值分析 …… 78

7 计算机软件 …… 83
7.1 计算机软件的概念及相关知识 …… 83
7.2 计算机软件课程及研究内容与意义 …… 85

8 数学建模 …… 98
8.1 数学模型及数学建模 …… 98
8.2 常见模型及算法简介 …… 102
8.3 中学数学建模 …… 107

9 数学教育 …… 110
9.1 数学教育的发展 …… 110
9.2 数学教师教育 …… 113
9.3 数学教育研究 …… 119

1 导　论

和同学们谈数学

同学们从小学一直都学习着数学，但有的同学对数学学科的整体理解还有待进一步提高，只有了解了数学的特点与作用、数学的发展历史、数学的学科结构，才能更好地掌握数学的规律，从而更好地学习和研究数学。数学是基础的工具学科，对当今经济、社会发展起着重要作用，有许多数学问题和实际问题期待同学们去探索、解决。

1.1　数学的特点与作用

弗·培根(F. Bacon)曾提出"知识就是力量"的响亮口号，同时还说"数学是打开科学大门的钥匙"。那么，数学是什么？恩格斯认为：数学是研究（现实世界中的）数量关系与空间形式的一门科学。E·波莱尔认为：数学是我们确切知道我们在说什么，并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学。R·柯朗认为：数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考，以及完美和谐的愿望，它的基础是逻辑和直觉，分析和推理，共性和个性。方延明认为：数学是研究现实世界中数与形之间各种形式模型的结构的一门科学。徐利治认为：数学是"实在世界的最一般的量与空间形式的科学，同时又作为实在世界中最具有特殊性、实践性及多样性的量与空间形式的科学"。其实数学还是一门艺术，一门创造性艺术。美国近代数学家哈尔莫斯(P. R. Halmos)说："数学是创造性艺术，因为数学家创造了美好的新概念；数学是创造性艺术，因为数学家像艺术家一样地生活，一样地思索；数学是创造性艺术，因为数学家这样对待它。"数学家和文学家、艺术家在思维方法上是有共同点的，都需要抽象，也都需要想象和幻想。数学能陶冶人的美感，增进理性的审美能力。一个人数学造诣越深，越是拥有一种直觉力，这种直觉力实际上就是理性的洞察力，也是由美感所驱动的选择力，这种能力有助于使数学成为人们探索宇宙奥秘和揭示规律的重要力量。正如德国数学家皮索特和萨马斯基在他们合著的《普通数学》中所说："数学是艺术又是科学，它也是一种智力游戏，然而它又是描绘现实世界的一种方式和创造现实世界的一种力量。"数学的"美"主要体现在简洁性、对称性、和谐性、奇异性上。

和其他学科比较，数学的特点是：

1. 抽象性

数学的研究对象本身就是抽象的，并且在数学的抽象中只保留量的关系和空间形式而舍

弃了其他一切。数学的抽象是逐步提高的，它们所达到的抽象程度大大超过了其他学科。

2. 精确性

数学的精确性表现在数学推理的逻辑严格性和数学结论的确定无疑性。汉克尔说："在大多数科学里，一代人要推倒另一代人所修筑的东西，只有数学，每一代人都能在旧建筑上增添一层新楼。"

3. 应用的广泛性

华罗庚说："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在。"20 世纪，随着应用数学分支的大量涌现，数学已经渗透到几乎所有的科学领域。不仅物理学、化学等学科仍在广泛地享用数学的成果，连过去很少使用数学的生物学、语言学、历史学等也与数学结合，形成了内容丰富的生物数学、数理经济学、数学心理学、数理语言学、数学历史学等边缘学科。从哲学的观点来看，任何事物都是量和质的统一体，都有自身量的方面的规律，不掌握量的规律，就不可能对各种事物的质获得明确的、清晰的认识，而数学正是一门研究量的科学，它不断地在积累和总结量的规律性，因而必然成为人们认识世界的有力工具。

马克思说："一门科学只有当它达到能够成功地运用数学时，才算真正发展了。"英国物理学家麦克斯韦概括了由实验建立起来的电磁现象规律，把这些规律表述为"方程的形式"，用纯粹数学的方法推导出可能存在着电磁波并且这些电磁波应该以光速传播。据此，他提出了光的电磁理论。此外，他的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波。24 年后，德国物理学家赫兹在振荡电路放电实验中证实了电磁波的存在，不久，意大利的马可尼和俄国人波波夫又在此基础上独立地发明了无线电报。从此，电磁波走进了千家万户。物理学家伦琴发现 X 射线而成为 1901 年开始的诺贝尔物理学奖的第一位获奖者，当有人问他需要什么时，他的回答是："第一是数学，第二是数学，第三是数学。"对计算机作出了划时代贡献的冯·诺伊曼(Von Neumann)认为："数学处于人类智能的中心领域……，数学方法渗透支配着一切自然科学的理论分支，它已愈来愈成为衡量成就的主要标志。"

1.2 数学的发展

法国数学家庞加莱(Poincaré)说："如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。"数学史具有多种不同的分期形式，从不同的侧面反映了人们对数学的认识过程和观点。我们比较赞同如下分期形式：

数学的萌芽时期(远古时代—公元前 6 世纪)：这一时期的数学知识是零碎的，没有命题的证明和演绎推理。常量数学时期(公元前 6 世纪—17 世纪上半叶)：比较系统的知识体系、比较抽象的并有独立的演绎体系的学科。中国古代数学名著《九章算术》和古希腊的《几何原本》是这一时期的代表作。现在中学数学课程的主要内容基本上是这一时期的成果。变量数学时期(公元 17 世纪上半叶—19 世纪 20 年代)：笛卡儿的解析几何学、牛顿-莱布尼茨的微积分及围绕微积分的理论和应用而发展起来的一大批数学分支，使数学进入了一个繁荣的时代。近

代数学时期(19 世纪 20 年代—20 世纪 40 年代):微积分基础的严格化、近世代数的问世、非欧几何的诞生和集合论的创立都是这一时期的成就。空前的创造精神和严格化是其主要特点。微积分、复变函数论、线性代数、概率统计等现在理、工科大学生必修的这些数学课程基本上形成并严格化于 17 世纪中叶至 20 世纪初期。现代数学时期(20 世纪 40 年代—现在):以数学理论为基础的计算机的发明使数学得到空前广泛的应用。泛函分析、模糊数学、分形几何、混沌理论等新兴数学分支产生,这些理论已进入大学高年级及研究生的学位课程中。

17 世纪创立了微积分,18 世纪的数学主要是微积分的应用,19 世纪的数学重在加固微积分的基础,20 世纪的数学则是尽可能推广由此取得的成果。

微积分不仅可以广泛应用于各个学科的方方面面,而且为数学的发展开辟了全新的研究课题,对近代数学发展的影响十分深远。革命导师恩格斯对微积分曾评价道:“在一切理论成就中,未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩,那就正在这里。”

18 世纪被称为数学上的英雄时代。世界数学发展的中心在欧洲,主要在法国。英国的泰勒(Taylor, 1685—1731)、马克劳林(Maclaurin, 1698—1746),瑞士的伯努利家族(Bernoulli, 17—18 世纪,祖孙三代出过十多位数学家)、欧拉(Euler, 1707—1783),法国的棣莫弗(de Moivre, 1667—1754)、达朗贝尔(d'Alembert, 1717—1783)、拉格朗日(Lagrange, 1736—1813)、拉普拉斯(Laplace, 1749—1827)、勒让德(Legendre, 1752—1833)、蒙日(Monge, 1746—1818)等都是杰出的代表。

19 世纪成为数学发展的全新世纪,由于跨世纪数学王子高斯(Gauss, 1777—1855)的成就,世界数学中心从世纪初的法国转移到了德国。

1. 分析学。为微积分建立一个坚实的理论基础,严密的逻辑体系十分有必要。为此做出主要贡献的是捷克的波尔查诺(Bolzano, 1781—1848),法国的柯西(Cauchy, 1789—1857),挪威的阿贝尔(Abel, 1802—1829),德国的狄利克雷(Dirichlet, 1805—1985)、外尔斯托拉斯(Weierstrass, 1815—1897)、黎曼(Riemann, 1826—1866)、康托尔(Cantor, 1829—1920)、戴德金(Dedekind, 1831—1916)等数学家。

2. 代数方面。阿贝尔在 1824 年证明了:用根式求解一般的五次方程是不可能的。针对这种情况,法国数学家伽罗瓦(Galois, 1811—1832)思考了这样的问题:虽然高于四次的方程一般不能用根式解,但是有些特殊的方程的确有求根公式,那么能用公式求解的方程具有什么特点?

3. 几何方面:19 世纪在几何方面引起数学思想革命的成就是非欧几何的诞生。1826 年 2 月 12 日,俄国数学家罗巴切夫斯基在喀山大学公开发表自己的论文《论几何原理》一文,宣告了非欧几何的诞生。欧几里德几何、罗巴切夫斯基几何的差别分别是:“过直线外一点能且只能做一条直线与已知直线平行”、“过直线外一点能做无数条直线与已知直线平行”,由此可分别得到的推论:“三角形的内角和等于 180 度”、“三角形的内角和小于 180 度”,后来德国数学家黎曼进一步推广并建立了微分观点下的黎曼几何,把欧氏几何、罗氏几何包含到黎氏几何体系中。在黎曼几何的体系中,第五公设变成了“过直线外一点不能作直线与已知直线平行”,

一个直接推论是，“三角形的内角和大于 180 度”。非欧几何的创立改变了人们的几何观念，深刻地影响了人们的数学真理观，对物理学观念的变革也发生重大影响。

20 世纪的数学从 19 世纪的多样性走向统一性，统一的基础是德国数学家康托尔在 19 世纪末创立的集合论。在 20 世纪上半叶建立了以抽象、结构化与综合化为特征的五大学科：数理逻辑、测度与积分论、抽象代数、拓扑学和泛函分析。数理逻辑围绕形式逻辑的严格化、数学基础问题的解决而展开；抽象代数学用公理化的方法研究具有被称为群、环、域特殊结构的集合，并以荷兰数学家范德瓦尔登的《近世代数学》一书的出版，标志着抽象代数学基本体系的形成，在某种程度上确定了后来代数学研究的方向；法国数学家勒贝格(Lebesgue，1875—1941)在其 1902 年的博士论文《积分、长度、面积》一文中，对通常的区间长度、区域面积、立体体积概念作了本质的推广，建立了勒贝格测度与勒贝格积分。这一理论是近代偏微分方程理论、概率论、无穷级数理论和泛函分析等分析数学的基础。特别在勒贝格积分理论中解决了函数的黎曼可积性：有界函数黎曼可积的充要条件是其不连续点的集合是零测度集合。20 世纪发生的第二次世界大战，是人类文明的大浩劫。由于战争的需要，有一批杰出数学家运用数学知识为反法西斯战争服务，并在这个过程中，产生了应用数学。20 世纪的中后期，数学界的思想十分活跃，又有许多新的数学思想和分支诞生，如“非标准分析”、“突变理论”、“模糊数学”，“混沌理论”、“分形几何”等等，再如运筹学、密码学、控制论等学科。德国数学家鲁宾逊(Robinson，1918—1974)在 1961 年发表的《非标准分析》；法国拓扑学家托姆(Thom，1923—)在 1972 年出版的《构造稳定性和形态发生学》建立了突变理论；美国数学家扎德(Zadeh，1921—)在 1965 年发表了题目为《模糊集合》的论文，标志着模糊数学的诞生；1963 年美国气象学家洛伦兹发表了一篇关于气象预测数值分析的论文《确定性的非周期流》，从此开始了混沌科学的研究，1975 年李天岩和约克在论文《周期 3 蕴含混沌》中，正式提出科学上的“混沌(chaos)”这个名词，1977 年第一次国际混沌学会议在意大利召开，标志着混沌科学的诞生。

中国数学对世界数学的发展作出了突出的贡献。主要有：

1. 十进地位制。商朝已掌握了 3 万以内的十进制数目，并用地位制记录，三国时期的刘徽创造了十进制小数。外国直到 14、15 世纪才出现十进制小数。

2. 比例算法。《九章算术》中有系统的比例算法，刘徽称之为“今有术”。到中世纪与印度的“三数法则”一起传到中亚和阿拉伯国家，15 世纪才传入欧洲。

3. 正负数。我国是最早承认负数的国家，《九章算术》里已有负数运算法则。古希腊人一直不承认负数，欧洲直到 16 世纪才承认它。

4. 多元方程组的解法。《九章算术》中解线性方程组的方法“直除法”，欧洲直到 18 世纪才有类似的解法。

5. 中国剩余定理。《孙子算经》中的“物不知数”问题(“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何?”)相当于解一个 3 个同余式的同余式组，被西方誉为“中国剩余定理”。“物不知数”问题中世纪传到世界许多地方，欧洲到 18 世纪才有类似的结论。

6. 高次方程的解法。《九章算术》中就有一元二次方程的解法，王孝通在解决土木工程问

题时有解三次方程的计算,11 世纪时贾宪发现了二项式展开系数规律的“贾宪三角形”,也称“杨辉三角形”,在西方称为“帕斯卡(1623—1662)三角形”,比贾宪晚了 600 年。

7. 天元术和四元术。12、13 世纪我国发明了“天元术”,元代的朱世杰建立了天、地、人、物的“四元术”,他们是半符号化的代数。“天元”是一元方程中的未知数,相当于现在常用的 x。“四元”是方程组中的四个未知数,相当于现在的 w, x, y, z。法国 16 世纪才有类似的方法。

8. 高阶等差级数。魏晋南北朝时已有了求等差级数前几项和的公式,从北宋的沈括建立“间隙术”、经南宋杨辉的“垛积术”、由元代的朱世杰创立“招差术”,最终完善的高阶等差级数研究,是级数求和的先进方法,欧洲迟至 17 世纪才出现类似的研究。

9. 内插公式的应用。历法的编制历来是一个重要的问题,如何从几个观察数据中估算其他的数据,要用内插法。隋唐的一行和尚,元代的王恂、郭守敬等在天文学研究中分别用到了二次和三次内插公式,而欧洲直到 17 世纪才在天文历法中使用内插法。

10. 圆周率。东汉的张衡取 $\pi=\sqrt{10}$,刘徽用割圆术得 $\pi=3.14$,祖冲之求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$。祖冲之的圆周率值在世界上保持了一千多年的最好纪录。

11. 计算工具的发明。战国时期我国就发明了算筹,明代发明并普及的珠算盘,是至今仍在广泛使用的计算工具,在电子计算机发明前是世界上最完善的计算工具。

清末明初,大批学生出国留学,涌现了中国第一批现代数学家。如,郑之蕃、胡明复、姜立夫、冯祖荀、苏步青、杨武之等。他们回国后,一边进行数学研究,在国际一流刊物上发表数学论文,一边培养数学人才,国内各大学也办起了数学系,为中国近现代数学的发展奠定了基础。1977 年以后,随着“实践是检验真理的唯一标准”的大讨论的开展,中国人民经历了一次新的思想解放运动。我国的数学研究进入了一个新的发展时期。1982 年美籍华裔数学家丘成桐在他 33 岁时以杰出的工作获菲尔兹奖,但是在中国本土至今还没有人获得此奖项,而我们的近邻日本已有 3 位数学家获得菲尔兹奖。

1.3 数学学科的结构

数学学科的结构,指的是构成数学知识体系的各种知识单元之间的一种相对稳定的结合方式和联系形式。数学学科结构有广义与狭义之分。研究数学整个学科结构的是广义的学科结构,研究学校数学教育过程中数学课程设置结构的是狭义的学科结构。

数学出现四足鼎立的局面:

1. 纯数学:研究数、形、函数、各种方程式,采用演绎推理的方法。包括数论:以数为研究对象;几何学、拓扑学:以形为研究对象;代数学:源于代数方程式的研究,主要研究对象是群、环、域、模;分析学:以函数为研究对象;有限数学:以有限集合上的计数、关系,主要有图论、组合论。

2. 数学的应用:科学研究的基本程序:感性材料,定性的规则,数学模型,应用。数学应用的分类:微分方程模型、概率模型、决策模型、几何的应用、代数的应用、组合与图论。

3. 计算科学:通过设计算法,用计算机求解各种问题,是一门技术。主要包括:算法:计算过程的指令序列,如算术运算的方法、求最大公因数的欧几里德算法、任何 C 程序;计算理论:可解性、算法复杂性;数值计算:数学问题的数值解;非数值计算:计算机系统程序设计、组合优化、密码与编码、计算机代数。

4. 统计学:收集、描述、分析数据,像自然科学,也像工程技术。主要包括:收集数据:抽样调查、实验设计;描述数据:描述统计、探索性数据分析;统计分析:输入是数据和模型,输出是数据中隐含的信息;交叉学科:生物统计、计量经济学、模式识别、机器学习。

数学发展到现在,已经成为科学世界中拥有 100 多个主要分支学科的庞大的“共和国”。大体说来,数学中研究数的部分属于代数学的范畴;研究形的部分,属于几何学的范畴;沟通形与数且涉及极限运算的部分,属于分析学的范围。这三大类数学构成了整个数学的本体与核心。在这一核心的周围,由于数学通过数与形这两个概念,与其他科学互相渗透,而出现了许多边缘学科和交叉学科。

我们国家的数学学科分类如下:

0701 一级学科:数学　二级学科为:

070101 基础数学

070102 计算数学

070103 概率论与数理统计

070104 应用数学

070105 运筹学与控制论

据了解,数学教育有可能成为第六个数学二级学科。

1.4　数学问题与数学奖励

数学问题是数学的心脏。当一个学科不再有重要问题需要解决时,就不会再吸引人们去对其倾注很大的热情,也就意味着这一学科的发展将走向寿终正寝。来自于社会实践、科学研究以及数学内部源源不断的数学问题是推动数学可持续发展的主要动力。

在 1900 年巴黎国际数学家代表大会上,希尔伯特发表了题为《数学问题》的著名讲演。他根据过去特别是 19 世纪数学研究的成果和发展趋势,提出了 23 个最重要的数学问题。这 23 个问题通称希尔伯特问题,后来成为许多数学家力图攻克的难关,对现代数学的研究和发展产生了深刻的影响,并起了积极的推动作用,希尔伯特问题中有些现已得到圆满解决,有些至今仍未解决。他在讲演中所阐发的相信每个数学问题都可以被解决的信念,对于数学工作者是一种巨大的鼓舞。外尔(德,1885—1955):希尔伯特就像穿杂色衣服的风笛手,他那甜蜜的笛声诱惑了如此众多的老鼠,跟着他跳进了数学的深河。魏伊(法,1906—1998):希尔伯特问题就是一张航图,过去 50 年间,数学家总是按照这张航图来衡量他们的进步。

1. Cantor’s problem of the cardinal number of the continuum(康托的连续统基数问题)
2. The compatibility of the arithmetical axioms(算术公理的无矛盾性)

3. The equality of two volumes of two tetrahedra of equal bases and equal altitudes(两个等底等高的四面体体积相等问题)

4. Problem of the straight line as the shortest distance between two points(两点间以直线为距离最短线问题)

5. Lie's concept of a continuous group of transformations without the assumption of the differentiability of the functions defining the group[拓扑学成为李群的条件(拓扑群)]

6. Mathematical treatment of the axioms of physics(物理学的公理化)

7. Irrationality and transcendence of certain numbers(某些数的超越性的证明)

解决情况:需证:如果 α 是代数数,β 是无理数的代数数,那么 $\alpha\beta$ 一定是超越数或至少是无理数(例如,$2\sqrt{2}$ 和 $e\pi$)。苏联的盖尔封特(Gelfond)1929 年、德国的施奈德(Schneider)及西格尔(Siegel)1935 年分别独立地证明了其正确性。但超越数理论还远未完成。目前,确定所给的数是否超越数,尚无统一的方法。

8. Problems of prime numbers(素数问题)解决情况:素数是一个很古老的研究领域。希尔伯特在此提到黎曼(Riemann)猜想、哥德巴赫(Goldbach)猜想以及孪生素数问题。黎曼猜想至今未解决。哥德巴赫猜想和孪生素数问题目前也未最终解决,其最佳结果均属中国数学家陈景润。

9. Proof of the most general law of reciprocity in any number field(一般互反律在任意数域中的证明)

10. Determination of the solvability of a diophantine equation(丢番图方程的可解性)

解决情况:求出一个整数系数方程的整数根,称为丢番图(约 210—290,古希腊数学家)方程可解。1950 年前后,美国数学家戴维斯(Davis)、普特南(Putnan)、罗宾逊(Robinson)等取得关键性突破。1970 年,巴克尔(Baker)、费罗斯(Philos)对含两个未知数的方程取得肯定结论。1970 年,苏联数学家马蒂塞维奇最终证明:在一般情况答案是否定的。尽管得出了否定的结果,却产生了一系列很有价值的副产品,其中不少和计算机科学有密切联系。

11. Quadratic forms with any algebraic numerical coefficients(一般代数数域内的二次型论)

12. Extension of Kroneker's theorem on abelian fields to any algebraic realm of rationality(类域的构成问题)

解决情况:即将阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意的代数有理域上去。此问题仅有一些零星结果,离彻底解决还很远。

13. Impossibility of the solution of the general equation of the 7 - th degree by means of functions of only two arguments (一般七次代数方程以二变量连续函数之组合求解的不可能性)

14. Proof of the finiteness of certain complete systems of functions(某些完备函数系的有限的证明)

15. Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus(舒伯特技术演算的严密性)

解决情况：一个典型情况是，在三维空间中有四条直线，问有几条直线能和这四条直线都相交？舒伯特（Herman Casar Hannibal Schubert，1848—1911）给出了一个直观解法，希尔伯特要求将问题一般化，并给出严格基础。这个问题与代数几何有密切的联系。但严格的基础至今仍未建立。

16. Problem of the topology of algebraic curves and surfaces（代数曲线和曲面的拓扑研究）。解决情况：此问题前半部涉及代数曲线含有闭的分支曲线的最大数目。后半部要求讨论备 $dx/dy=Y/X$ 的极限环的最多个数 $N(n)$ 和相对位置，其中 X、Y 是 x、y 的 n 次多项式。对 $n=2$（即二次系统）的情况，1934 年，福罗献尔得到 $N(2)\geqslant 1$；1952 年，鲍廷得到 $N(2)\geqslant 3$；1955 年，苏联的波德洛夫斯基宣布 $N(2)\leqslant 3$，这个曾震动一时的结果，由于其中的若干引理被否定而成疑问。关于相对位置，中国数学家董金柱、叶彦谦 1957 年证明了（E2）不超过两串。1957 年，中国数学家秦元勋和蒲富金具体给出了 $n=2$ 的方程具有至少 3 个成串极限环的实例。1978 年，中国的史松龄在秦元勋、华罗庚的指导下，与王明淑分别举出至少有 4 个极限环的具体例子。1983 年，秦元勋进一步证明了二次系统最多有 4 个极限环，并且是（1，3）结构，从而最终地解决了二次微分方程的解的结构问题，并为研究希尔伯特第（16）问题提供了新的途径。

17. Expression of definite forms by squares（半正定形式的平方和表示）

18. Building up of space from congruent polyhedra（用全等多面体构造空间）

19. Are the solutions of regular problems in the calculus of variations always necessarily analytic?（正则变分问题的解是否总是解析函数？）

20. The general problem of boundary values（一般边值问题）

解决情况：此问题进展迅速，已成为一个很大的数学分支，目前还在继读发展。

21. Proof of the existence of linear differential equations having a prescribed monodromic group（具有给定奇点和单值群的 Fuchs 类的线性微分方程解的存在性证明）

22. Uniformization of analytic relations by means of automorphic functions（用自守函数将解析函数单值化）

解决情况：此问题涉及艰深的黎曼曲面理论，1907 年克伯（P. Koebe，1882—1945）对一个变量情形已解决而使问题的研究获重要突破，其他方面尚未解决。

23. Further development of the methods of the calculus of variations（变分法的进一步发展）希尔伯特提出的问题是相当艰深的。正因为艰深，才吸引有志之士去作巨大的努力。

数论中有两个著名问题：哥德巴赫猜想与费马大定理。一步之遥的哥德巴赫猜想：$12=5+7$，$20=3+17=13+7$，…1742 年，德国一位数学老师哥德巴赫曾向当时的大数学家欧拉提出如下问题：每个不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和。但欧拉未能给出解答，这就是著名的哥德巴赫猜想。数学王子高斯曾说过："数论是数学的皇冠，而哥德巴赫猜想则是皇冠上的明珠"。它事实上也是解析数论这一重要数论分支的一个中心课题。我国数学家在此取得了一系列重要的研究成果。1938 年，著名数学家华罗庚证明了：几乎所有大于 6 的偶数均可表示成两个奇素数之和。也就是说哥德巴赫猜想几乎对所有的偶数成立。随后，我国数学