王金德 编著

随机规划

SUI JI GUI HUA

南京大学出版社

随 机 规 划

STOCHASTIC PROGRAMMING

王金德 编著

国家自然科学基金项目

南京大学出版社

1990 · 南京

随 机 规 划

王金德　编著

*

南京大学出版社出版
（南京大学校内）
江苏省新华书店发行　　镇江前进印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张：12.5　字数：277千
1990年6月第1版　　1990年6月第1次印刷
印数：1—1500

*

ISBN　7-305-00484-7

O·29　　　　定价：2.65元

前　言

随机规划是运筹学中的新兴分支之一，它是随着（确定性）数学规划的不断发展而产生的。当数学规划问题中有随机变量介入时，便出现随机规划问题。而在大部分运筹学、管理科学的实际问题中，都有随机变量出现，因此，把随机规划的发展推到必然的日程上来了。

由于随机变量介入数学规划问题的方式不同，以及所联系的实际背景的不同，所对应的数学规划问题的提法也有多种，这就产生随机规划中的分布问题、多阶段问题和概率约束规划问题这三种模型。这些问题与确定性数学规划问题有着密切的联系，又有它们自身的特有的性质，因而，它们的理论和算法也处在这样的状态。

本书的任务是介绍随机规划的基本理论和算法。在第一章中，较为详细地介绍如何建立随机规划的模型，以使读者能正确理解它们究竟适合于哪些实际问题。在第二、三、四、五、六章中分别阐述分布问题、二阶段问题和概率约束问题的理论和算法。作者尽最大可能使本书的内容概括到直到完稿时为止已有的主要成果（除了尚未成熟的内容以外），以使本书的内容现代化。

因为考虑到读者已具有数学规划（包括线性规划、非线性规划）的一般知识，因此，凡是用到这些结果时不再详细介绍

或证明，只有一般数学规划书中不易见到的一些内容在这里作一简单介绍。附录中简要地介绍了数学规划中的一种逼近理论——上图收敛性理论，它在随机规划的逼近解法中起着重要作用。

随机规划在国际上也是一门新兴学科，从50年代起开始萌芽，现在正是它兴旺发展的时期。在我国，因为最近这几年才有人从事这方面的研究，所以，这一学科的资料相当缺乏，如果本书能对广大读者学习随机规划有所裨益，这将是作者最大的愿望。

在写作和出版此书过程中，得到许多方面的支持，其中特别应该提出的有：美国加州大学的R.Wets教授，他引导我进入随机规划这一领域并长期地给于支持；中国运筹学会的越民义先生、桂湘云先生等为使随机规划的研究在中国得到展开做了许多工作，起了重要作用；南京大学数学系郑维行教授郑重地向出版社推荐了此书；唐述钊教授为审阅此书初稿付出了辛勤劳动；当然，没有南京大学出版社的同志的努力，此书是不能与读者见面的。对此，作者在此一并表示衷心的感谢！

由于水平所限，不当之处在所难免，诚恳欢迎广大读者提出批评与建议。

王金德

于南京大学数学系

目　　录

第一章　随机规划的模型

在现实世界中，经常会碰到偶然现象，或称不确定性现象，它们一般被称为是随机现象。描述、刻划随机现象的量叫随机变量，含有随机变量的数学规划问题称为随机规划问题，不含有随机变量的数学规划问题，在这里，称为确定性的规划问题，以示区别。

例如，设某一线性规划问题

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i=1,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0, \ j=1,\cdots,n$$

表示一个生产安排问题，其中，$b_i, i=1,\cdots,m$，表示第i种原料的可利用量，$c_j, j=1,\cdots,n$，表示第j种产品的单价，a_{ij}表示制造每单位第j种产品所需第i种原料的量。如果这一规划问题所表示的问题是下一阶段（尚未到来）的生产安排问题，则量$a_{ij}, b_i, c_j, i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$中的某些或全部都可能是随机变量。

更富有随机性的例子为：假定需要设计一水库，以供发电、灌溉、航运及其他水利之用。问题是，要在给定的水文、地质、经济等方面的限制条件下，应设计多大容量的水库方能使水库获利最大，或是在满足各方面要求的条件下，应设计多大容量方能使水库造价最省？一般说来，若不考虑其中的随机因素，这将导致一个非线性规划问题。这里的一些约束条件如水文条件和经济方面的条件，显然都是一些随机的量，在设计水库时无法精确地预测这些量今后可能取的值是多少，而只能知道这些量今后可能取的值的概率分布如何。

含有随机变量的规划问题在经济学、管理科学中更是经常出现，可以说，在现实生活中，含有随机变量的规划问题比确定性的规划问题要多得多。

随机变量进入数学规划问题有各种各样的形式：随机变量出现于目标函数中，或出现在约束条件中，或同时出现于这二者之中。这时应如何恰当地形成数学规划问题并求解之，便是本书的任务。这一章中将叙述形成随机规划问题的原则与方法。

§1.1 处理含有随机变量的数学规划问题的几种方法

当数学规划问题中出现随机变量时，处理这些随机变量的一种似乎很自然的方法是：用这些随机变量的概率平均值（数学期望）代替随机变量本身，从而形成一个确定性的数学规划问题，然后，可用确定性规划的算法求解之。然而，许多例子表明，这种处理方法往往导致不合理的解。

例如，考虑下面的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = b_1 \\
& x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

其中，b_1为离散随机变量，它的分布律为

b_1	0	5	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

于是，b_1 的数学期望为 $Eb_1=5$。在(1.1)中用 Eb_1代替b_1，所得确定性规划为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\
& x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

它的最优解为$\overline{x}=(9/2, 1/2, 0, 0)$。

可是，对于规划问题(1.1)来说，$\overline{x}$只有1/2的概率为可行解：当$b_1=0$或$b_1=10$时，$\overline{x}$不是(1.1)的可行解。设(1.1)代表的是生产安排计划问题。若将$\overline{x}$作为所给问题的决策，则它只有一半的可能性是可行的；在另一半可能的情况下，它是不可行的，更谈不上是最优解，这种解$\overline{x}$，当然不是人们所能够接受的。

在实际问题中经常采用的处理规划问题中的随机变量的方法有两种：一种是等待观察到随机变量的实现以后再解出相应的规划问题(作出决策)；另一种是在观察到随机变量的实现以前便作出决策，但这时应事先考虑到，如果到随机变量的实现观察到以后，发现所作决策是不可行解，应作如何处

理的方针。这两种不同的处理方法将导致不同的随机规划模型。

(一) 等待观察到随机变量的实现后再作决策 (Wait and See)——分布问题

设某一规划问题的各项系数中含有随机变量，在观察到这些随机变量的实现以后，这些系数将变为已知的确定数，从而得到相应的确定性规划问题。对应于不同的观察值，便得到不同的确定性规划问题，从而有不同的最优值和最优解。这时，我们要解决的，不仅仅是各个确定性规划问题本身，而且要知道所有这些最优值的概率分布情况。

例如，设有线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c'x \\
\text{s.t} \quad & Ax=b \\
& Ex=f,\ x\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

其中，$b=(b_1,\cdots,b_m)'$，$c=(c_1,\cdots,c_n)'$，$x'=(x_1,\cdots,x_n)$，A 为 $m\times n$-矩阵，E 为 $m_1\times n$-矩阵，f 为 m_1维向量。设A,b,c的元素 $a_{ij},b_i,c_j,i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$ 都可以是随机的，它们定义在某一概率空间$(\Omega,\boldsymbol{F},P)$上；$E,f$ 则为非随机的矩阵和向量。

在观察到这些随机变量的实现 $a_{ij}(\omega)$，$b_i(\omega)$，$c_j(\omega)$，$i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n$之后，得到一个确定性的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1(\omega)x_1+\cdots+c_n(\omega)x_n \\
\text{s.t} \quad & a_{11}(\omega)x_1+\cdots+a_{1n}(\omega)x_n=b_1(\omega) \\
& \vdots \\
& a_{m1}(\omega)x_1+\cdots+a_{mn}(\omega)x_n=b_m(\omega) \\
& Ex=f,\ x\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

设(1.4)的最优解为$\overline{x}(\omega)$,最优值为$z(\omega)$。

对应于不同的样本点ω,(1.4)的各项系数的值不同,从而得出不同的$\overline{x}(\omega)$和$z(\omega)$。决策者在观察到随机变量的实现之前需要知道,对这些随机变量的各种可能值,$z(\omega)$可能取哪些值以及$z(\omega)$取某些值的概率有多大等,也就是说,要求出$z(\omega)$的概率分布。这种求$z(\omega)$的概率分布的问题称为分布问题(Distribution Problem)。

最一般的分布问题的形式为

$$\begin{aligned} z(\omega)=\min \quad & f(x,\xi(\omega)) \\ \text{s.t} \quad & x\in\Gamma(\xi(\omega)) \\ & x\in X\subset R^n \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中,ξ为一随机向量,Γ为点到集合的映射,X为与随机变量ξ无关的一个集合,欲求$z(\omega)$的概率分布。

如果$\Gamma(\xi(\omega))$可用函数形式的约束给出,则产生分布问题

$$\begin{aligned} z(\omega)=\min \quad & f(x,\xi(\omega)) \\ \text{s.t} \quad & g_i(x,\xi(\omega))\leqslant 0, i=1,\cdots,m \\ & h_j(x,\xi(\omega))=0, j=1,\cdots,h \\ & x\in X\subset R^n \end{aligned} \tag{1.6}$$

若其中诸 g_i,h_j 为线性函数,X为凸多面体,则产生如(1.4)的线性分布问题。对这种一般形式的分布问题同样是要求$z(\omega)$的分布函数及其方差、期望等与分布相关的量。

(二) 在观察到随机变量的实现之前便作决策(Here and Now)——二阶段有补偿问题

处理数学规划中的随机变量的另一方法是,在观察到随机变量的实现之前便作决策。现假定线性规划问题(1.3)中

目标函数的系数向量是非随机的，约束条件中的 A,b 可以是随机的．如果在观察到 A,b 的实现之前便作出决策 x，则很有可能，这一 x 对 A,b 的某些可能值不满足其中的约束条件

$$A(\omega)x=b(\omega)$$

如何处理约束条件受到破坏的不同原则将导致二类不同性质的问题，即二阶段有补偿问题(Two-Stage Problem with Recourse)和概率约束规划问题(Probabilistic Constrained Program)。这一小节中讨论二阶段有补偿问题。

先考察一个例子——报童问题(Newsboy Problem)。

设有一报童，每天清晨到报纸发行处去批发报纸到街上零售，每份报纸批发价为 a（分），零售价为 p（分），按规定，卖剩下的报纸不能退给发行处。设报童每天能销售出去的报纸份数为 b（份），根据他历来的经验，报童知道 b 的分布规律如何。现在，报童所要解决的问题是：每天凌晨他应从发行处批发多少份报纸为最好？

在这一决策问题中，决策者（报童）必须在观察到随机变量 b 的实现（今天能销售出去的报纸份数）之前作出决策。设他作出决策，批发 x（份）。若他在一天中正好能将这些报纸卖完（即全部卖完，卖完后也不再有可能卖出更多的报纸），则他所得的纯收入为 $(p-a)x$（分）；若没有卖完，剩下 y_2（份），则他要因此而损失 py_2（分）；若 x 份卖完后还不够，差 y_1（份），则他的损失为 qy_1（分）（可以理解为：否则，他还可以再多赚一些钱）。

显然，这里的 y_1,y_2 不可能同时不为零，y_1,y_2 应满足的约束条件为

$$x+y_1-y_2=b(\omega),\quad y_1\geqslant 0,\quad y_2\geqslant 0$$

对于选定的决策 x 和 b 的某一实现 $b(\omega)$，为了使他蒙受

的损失达到最小，应该选择 y_1, y_2，使它们为下列规划问题的最优解：

$$\begin{aligned} Q(x,\omega)=\min \quad & qy_1+py_2 \\ \text{s.t} \quad & y_1-y_2=b(\omega)-x \\ & y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

（注：在目前这一问题里，给定 x 和 $b(\omega)$，y_1 和 y_2 并无选择的余地：若 $b(\omega)-x\geqslant 0$，则必有 $y_1=b(\omega)-x, y_2=0$；若 $b(\omega)-x<0$，则必有 $y_2=x-b(\omega), y_1=0$。但在另外的一些问题中，y 变量可有选择的余地。）

由于事先并不知道今天会出现的 $b(\omega)$ 的真正值是多少，比较合理的方案是：考虑其损失的概率平均值 $\mathrm{E}Q(x,\omega)$。因此，报童所能得到的收入的数学期望值为

$$(p-a)x-\mathrm{E}Q(x,\omega)$$

从而，他所面临的决策问题可归结为

$$\max\,[(p-a)x-\mathrm{E}Q(x,\omega)]$$

或等价地

$$\begin{aligned} &\max\,[(p-a)x \\ &-\mathrm{E}\,(\min_{y_1,y_2\geqslant 0}(qy_1+py_2)\,|\,y_1-y_2=b(\omega)-x)] \end{aligned} \tag{1.7}$$

报童问题的特点有：

a）决策必须在观察到随机变量的实现之前作出；

b）若在随机变量的实现出现以后发现所作决策不满足约束条件，可引进一定的补偿量(Recourse) y（这里为 y_1, y_2）使约束条件得到满足；

c）所归结成的规划问题可分为二个阶段，决定 x →选择 y →决定 x（最优解）。其中第一个“决定 x”是指假定已决定了 x，后面的“决定 x”是指，在得到了关于 x 的规划问题(1.7)

之后真正地求出最优解$\bar{x}$.

再考虑一个较为一般的例子，设线性规划问题(1.3)表示下一阶段的生产计划问题，假定其中的c为确定性向量，A和b的元素可以是随机的，现欲在$A(\omega)$和$b(\omega)$的实现出现之前订好计划，作出决策x. 问什么样的决策是最优的?

设所作决策为x，对任一给定的ω，这一决策x有可能使约束条件

$$A(\omega)x=b(\omega)$$

受到破坏，这时可引进补偿量y和补偿矩阵(Recourse Matrix)$W(\omega)$，使得

$$A(\omega)x+W(\omega)y=b(\omega)$$
$$y\geqslant 0$$

当然，引进这一补偿一定会招致一些惩罚，引起一定损失，设为$q(\omega)y$(例如，若b表示原材料可利用量，设已作出决策：生产量为x，由于b为随机变量，对于给定的决策x可能引起原材料的不足或过剩。若不足，则需临时高价购进，若过剩，则将多余材料低价卖出，购进或卖出的量即为补偿，由此造成的损失即为补偿引起的惩罚).为使这一惩罚达到最小值(在给定x和$A(\omega)$,$b(\omega)$的条件下)，y应满足的规划问题为

$$\begin{aligned} Q(x,\omega)=\min\quad & q(\omega)y \\ \text{s.t}\quad & W(\omega)y=b(\omega)-A(\omega)x \\ & y\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

由于事先并不知道($A(\omega)$, $b(\omega)$)究竟出现什么值，适当的办法是考虑其损失函数的数学期望值$EQ(x,\omega)$，因此，决策者所面临的规划问题为：

$$\begin{aligned} \min\quad & c'x+EQ(x,\omega) \\ \text{s.t}\quad & Ex=f,\qquad x\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$